Analyse

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

L'analyse est l'étude des quantités infiniment petites et infiniment grandes, notamment en ce qui concerne les fonctions réelles. Elle développe des outils puissants comme la dérivation et l'intégration dont la portée atteint essentiellement tous les domaines des sciences.

Ce cours reprend et étoffe les notions abordées en mathématiques générales.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

Le concept de nombre est au cœur des mathématiques, tant en analyse qu'en algèbre. En mathématiques générales, nous nous sommes reposés sur notre intuition pour l'appréhender. Ici, nous allons définir ce socle de manière plus solide.

1.1 Construction

Les nombres naturels peuvent être définis via des axiomes, notamment par l'arithmétique de Peano, mais l'intuition qu'on s'en fait est rarement la source de confusion et on s'en contentera donc pour ce cours ; il en va de même pour les ensembles dérivés que sont ceux des nombres relatifs et rationnels. Les nombres réels, en revanche, sont moins évidents à cerner : la véracité de l'égalité $1 = 0,999\ldots$ égare encore bien des mathématiciens amateurs. Nous commencerons par rappeler les propriétés des nombres rationnels puis nous formaliserons celles qu'on attend des nombres réels avant de les construire rigoureusement.

Théorème (admis). *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est un corps ordonné : il est muni de lois d'addition et de multiplication qui sont commutatives ($x + y = y + x$ et $xy = yx$), associatives ($x + (y + z) = (x + y) + z$ et $x(yz) = (xy)z$), admettent des éléments neutres ($0 + x = x$ et $1x = x$), des inverses ($\exists u, u + x = 0$ et $x \neq 0 \Rightarrow \exists v, vx = 0$) et sont distributives ($x(y + z) = xy + xz$) ainsi que d'une relation d'ordre qui est réflexive ($x \leqslant x$), antisymétrique ($x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$), transitive ($x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$), totale ($x \leqslant y \vee y \leqslant x$) et compatible avec les opérations arithmétiques ($x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$ et $0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy$ quels que soient x, y et z).*

Il est évident pour quiconque a déjà partagé trois gâteaux en deux que l'ensemble $\mathbb{Z}$ ne permet pas de représenter certaines quantités, comme $3/2$; en d'autres termes, il admet des « trous ». C'est aussi le cas de $\mathbb{Q}$: nous avons vu en mathématiques générales que $\sqrt{2}$ n'était pas une quantité rationnelle. Pour formaliser cela, développons la notion d'ordre.

Définition. *Soit P une partie de $\mathbb{Q}$ et m un nombre rationnel.*
On dit que m est un minorant de P si $\forall p \in P, m \leqslant p$.
On dit que m est un majorant de P si $\forall p \in P, p \leqslant m$.

Exercice. *Donner, s'ils en existent, un minorant et un majorant de $\{1, 3/2, 2, 3\}$ dans $\mathbb{Q}$.*
Faire de même pour $\mathbb{N}$.

Lorsqu'un ensemble admet un majorant m, il en admet une infinité car $m + 1$ fait encore l'affaire. Ceci est peu commode et il est donc naturel de chercher le majorant idéal. Comme les majorants peuvent toujours être plus grands, le majorant idéal se doit d'être le plus petit possible.

Définition. *Soit P une partie de $\mathbb{Q}$ et m un nombre rationnel.*
On dit que m est la borne inférieure de P si c'en est un minorant plus grand que tous les autres.
On dit que m est la borne supérieure de P si c'en est un majorant plus petit que tous les autres.

Avec cette condition d'extrémalité, chaque borne, si elle existe, est forcément unique (le montrer en exercice).

Proposition. *Les bornes inférieures et supérieures sont uniques lorsqu'elles existent.*

Exercice. *Déterminer, si elles existent, les bornes inférieure et supérieure de $\{1, 3/2, 2, 3\} \subset \mathbb{Q}$.*
Faire de même pour $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

Malheureusement, même lorsqu'un majorant existe, la borne supérieure n'existe pas nécessairement.

Exemple. *Montrons que la partie $P = \{p \in \mathbb{Q} : p^2 \leqslant 2\} \subset \mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure. Tout majorant p vérifie $p > 0$ (car $1 \in P$) et $p^2 > 2$ (car $p \notin P$ rationnel). Alors $p - \frac{p^2-2}{p+2}$ est un majorant plus petit que p.*

Les bornes inférieures et supérieures n'existent donc pas nécessairement, même pour des parties bornées, ce qui formalise la notion de « trous » dans $\mathbb{Q}$. Or on attend justement du corps des nombres réels qu'il soit continu — il faut donc boucher ces trous en « rajoutant » les bornes supérieures des ensembles qui n'en ont pas.

Définition. *On appelle coupure de $\mathbb{Q}$ toute partie P vérifiant :*
— $P \neq \varnothing$ *et* $P \neq \mathbb{Q}$
— $\forall x \in P, \forall y \in \mathbb{Q}, y < x \Rightarrow y \in P$.
— $\forall x \in P, \exists y \in P, y > x$.
On appelle nombre réel toute coupure de $\mathbb{Q}$.

Pour voir que cet ensemble $\mathbb{R}$ présente toutes les propriétés voulues, remarquons d'abord que le passage de $\mathbb{Q}$ à ses coupures préserve les nombres rationnels : on peut représenter $q \in \mathbb{Q}$ par la coupure $\{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$. Il étend par ailleurs les opérations élémentaires.

Proposition. *Si P et Q sont deux coupures, on définit :*
— *la relation* $P < Q \Leftrightarrow P \subset Q$
— *la coupure* $P + Q = \{p + q : p \in P, q \in Q\}$
— *la coupure* $PQ = -\{pq : p \in P, q \in Q\}$ *si P et Q sont négatives*
Ces opérations font de $\mathbb{R}$ un corps ordonné.

On prouve la proposition ci-dessus en transportant les propriétés concernées de $\mathbb{Q}$ à ses coupures, ce qui est relativement élémentaire. En exercice, on pourra montrer que l'opération d'addition est bien définie et commutative. De surcroit, la propriété de la borne supérieure qui manquait à $\mathbb{Q}$ est maintenant satisfaite.

Théorème (borne supérieure). *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. Soit Q un ensemble de coupure. On note P l'union des coupures de Q. C'est encore une coupure. Elle majore P et aucun majorant ne peut lui être inférieur. C'est donc la borne supérieure de Q. □

Exercice. *Déterminer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble* $\left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Faire de même pour $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice. *Soient deux parties non vides et bornées de* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $P \subset Q$. *Comparer leurs bornes.*

Par la suite, nous aurons tendance à oublier que les nombres réels sont des coupures : nous avons construit un ensemble $\mathbb{R}$ présentant les propriétés souhaitées, ce que nous avons montré rigoureusement ; on peut donc désormais utiliser cet ensemble et ses propriétés sans se préoccuper de la manière dont il a été construit. Cette section peut avoir troublé le lecteur ayant une forte intuition des nombres réels ; cela étant, sa démarche est la seule viable pour bâtir solidement les mathématiques — nous la reverrons plus tard dans des contextes moins familiers.

Finissons cette section en rappelant la notion d'intervalle.

Définition. *Pour tout nombres réels* x *et* y *on définit :*
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

Par abus de notation, on peut alors écrire que x est représenté par la coupure $]-\infty, x[\cap\mathbb{Q}$.

1.2 Densité et distance

La construction des nombres réels comme des coupures traduit le fait qu'un tel nombre n'est jamais bien loin d'un nombre rationnel. Nous allons maintenant formaliser ce concept appelé « densité ».

Théorème (corps archimédien). *Si* x *et* y *sont deux réels positifs, il existe un entier* n *tel que* $nx > y$.

Démonstration. Si la propriété ci-dessus est fausse, alors y majore l'ensemble $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$; notons donc z sa borne supérieure. Alors $z - x$ est encore majorant et, comme x, il est plus petit que z. Contradiction. □

Définition. *Soit* x *un nombre réel. Il existe un unique entier* n *appelé partie entière de* x *qui vérifie*

$$n \leqslant x < n + 1$$

Démonstration. L'ensemble $]-\infty, x] \cap \mathbb{N}$ est non vide et majoré (par x) ; il admet donc une borne supérieure. □

Théorème (densité des rationnels). *Si* x *et* y *sont deux réels vérifiant* $x < y$, *alors* $]x, y[\cap\mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Démonstration. Soit q un entier tel que $q(y - x) > 1$ et soit p le plus petit entier vérifiant $p > qx$. Alors $p < qy$ et on a donc $p/q \in]x, y[$. □

La densité des nombres rationnels dans les nombres réels est une propriété fondamentale qui découle de notre construction des réels comme bornes supérieures. Avec, on peut notamment vérifier que tout nombre réel est bien la borne supérieure de la coupure qui lui est associée.

Corollaire. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x = \sup(\mathbb{Q} \cap]-\infty, x[)$.*

Démonstration. En exercice. □

L'ensemble des nombres réels réalise simultanément des propriétés idéales en termes d'ordre et de distance ; nous verrons cela dans le chapitre dédié aux suites. Pour finir ce chapitre, nous introduisons le concept de distance et ses propriétés élémentaires.

Définition. *Soit x un nombre réel. Sa valeur absolue $|x|$ vaut x s'il est positif, $-x$ sinon.*
La distance entre deux nombres réels x et y est $|x - y|$.

Exercice. *Montrer que, quels que soient les réels x et y, on a*

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),$$
$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Proposition (inégalité triangulaire)**.** *Si x et y sont deux nombres réels, ils vérifient $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.*

Démonstration. Si x et y sont du même signe, alors on atteint le cas d'égalité.
Sinon, les propriétés d'ordre de $\mathbb{R}$ nous montrent que l'inégalité est vérifiée. □

1.3 Exercices

Exercice. *Caractériser la coupure représentant le nombre réel que l'on note communément $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$.*

Exercice. *Montrer que les ensembles ci-dessous sont non vides et majorés puis déterminer leur borne supérieure.*
— $[-1, \sqrt{3}/2[\cap \mathbb{Q}$
— $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 2\}$
— $\{1 - x^2 : x \in \mathbb{R}\}$
— $\{1 - x - x^2 : x \in \mathbb{R}\}$
— $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Exercice. *Montrer la compatibilité de la borne supérieure avec les opérations arithmétiques courantes, c'est-à-dire que, pour toutes parties A et B, on a*

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \max(\sup(A), \sup(B)), & & \\ \sup(A + B) &= \sup(A) + \sup(B) & & \text{où } A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \\ \sup(-A) &= -\inf(A) & & \text{où } -A = \{-a : a \in A\}. \end{aligned}$$

Que dire de la borne supérieure de $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$?

1.4 Fonctions classiques

Les nombres réels que nous avons définis ne sont pour l'instant que munis des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et d'inverse. Nous allons maintenant définir les autres opérations courantes de manière rigoureuse.

Définition. *On définit les puissances d'un nombre réel positif x par étapes :*

1. *Si n est un entier positif, alors on pose $x^n = x \cdot x \cdots x$ (n fois).*
2. *Si m est un entier positif, alors on pose $x^{1/m} = \sup\{y \in \mathbb{R}_+ : y^n < x\}$.*
3. *Si $q = n/m$ est un rationnel positif, alors on pose $x^q = (x^n)^{1/m} = (x^{1/m})^n$.*
4. *Si y est un réel positif, alors on pose $x^y = \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q}_+, q < y\}$.*

Exercice. *Vérifier les propriétés classiques $x^y x^z = x^{y+z}$ et $(x^y)^z = a^{yz}$ pour tout réels positifs x, y et z.*

Définition. *Soit x et y deux réels positifs. Le logarithme de y en base x est $\log_x y = \sup\{z \in \mathbb{R}_+ : x^z < y\}$.*

Exercice. *Montrer la propriété $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.*

1.5 Examen

Chapitre 2

Suites

Rappelons qu'une suite réelle est une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, en d'autres termes, une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. C'est en un certain sens l'exemple le plus simple de fonctions « intéressantes » : seul leur comportement en l'infini mérite d'être étudié.

Les définitions et propriétés élémentaires concernant les suites ont déjà été vues en mathématiques générales. Ici, nous les revoyons de manière plus rigoureuse.

2.1 Croissance, bornes et convergence

Définition. *On dit qu'une suite x admet une limite s'il existe un réel ℓ vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n > m, x_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[.$$

Dans ce cas, on dit que ℓ est la limite de la suite x et on note $\ell = \lim x$.

Exercice. *Vérifier les limites « évidentes » des suites ci-dessous.*

— *La limite d'une suite constante est sa valeur.*
— *La limite de la suite de terme général $\frac{1}{n}$ est* 0.
— *La suite de terme général $(-1)^n$ n'admet pas de limite.*

Proposition. *Si x et y sont deux suites réelles admettant pour limite respectives ℓ et m, et λ un scalaire réel.*

— *λx admet comme limite $\lambda\ell$.*
— *$x + y$ admet comme limite $\ell + m$.*
— *$x \cdot y$ admet comme limite ℓm.*

Exercice. *Démontrer la proposition ci-dessus.*

Proposition. *Soient x et y deux suites vérifiant $x_n \leqslant y_n$. Si elles admettent toutes deux des limites, alors* $\lim x \leqslant \lim y$.

Remarque. *Lorsque $x_n < z_n$, on ne peut pas généralement conclure que* $\lim x < \lim z$. *Prendre par exemple $x_n = \frac{1}{n}$ et $z_n = 0$.*

2.2 Exercices

2.3 Critères de convergence

Définition. *On dit qu'une suite x est :*

— *minorée par M si, pour tout n, on a $x_n \geqslant M$.*
— *majorée par M si, pour tout n, on a $x_n \leqslant M$.*
— *croissante si, pour tout n, on a $x_{n+1} \geqslant x_n$.*
— *décroissante si, pour tout n, on a $x_{n+1} \leqslant x_n$.*

Théorème. *Toute suite croissante et majorée admet une limite.*
Toute suite décroissante et minorée admet une limite.

Démonstration. Soit x une suite croissante et majorée. L'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par x est non-vide et majoré ; il admet donc une borne supérieure que l'on note ℓ. Soit alors $\varepsilon > 0$. Si aucun $n \in \mathbb{N}$ n'est tel que $x_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, alors $\ell - \varepsilon$ est un majorant de l'ensemble qui est plus petit que ℓ, ce qui contredit le fait que ℓ soit la borne supérieure. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Comme x est croissante et majorée par ℓ, on a $\forall n \geqslant N, x_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. □

Exercice. *Faire la démonstration correspondante pour les suites décroissantes minorées.*

Définition. *On dit qu'une suite x est de Cauchy si elle vérifie la condition*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall m > N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Théorème. *Toute suite de Cauchy converge.*

Exercice. *Soit x la suite de Fibonacci définie par $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Montrer par récurrence la formule*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

On considère maintenant la suite de terme général $\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Montrer que c'est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Montrer toutefois que sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Proposition (gendarmes). *Soient x, y et z trois suites vérifiant $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ pour tout n. Si x et z admettent la même limite, alors il en va de même pour y.*

Proposition (suites adjacentes). *Soient une suite croissante x et une suite décroissante y vérifiant* $\lim(y - x) = 0$. *Alors x et y admettent la même limite.*

Exercice. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est croissante. À n fixé, on pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$. Montrer alors qu'elle est adjacente à la suite $v_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$. Par définition, leur limite est e^x.*

Exercice. *Soit deux réels $a \geqslant b$. On se propose d'itérer le calcul des moyennes arithmétique $\frac{a+b}{2}$ et géométrique $\sqrt{ab}$.*

Soit donc u et v les suites vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}.$$

Calculer les trois premiers termes de u et de v pour $a = b = 10$ puis pour $a = 0$ et $b = 20$.
Montrer que $u_n \geqslant v_n$ pour tout n.
Montrer que u décroît et que v croît.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
Leur limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique.

2.4 Exercices

2.5 Formules explicites : suites et séries géométriques

Définition. *Une suite x est dite géométrique si son terme général est de la forme $x_n = aq^n$; le réel q s'appelle la raison.*

Les limites de ces suites sont évidentes.

Théorème. *Soit x la suite de terme général $x_n = aq^n$ avec $a \neq 0$; on a :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ \text{aucune} & \text{si } q < -1 \end{cases}$$

On pourra montrer ce théorème élémentaire en exercice en étudiant la monotonie de x.

Exercice. *Étudier la convergence des suites de terme général :*

$$x_n = \frac{1-3^n}{2^n} \qquad y_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n} \qquad z_n = \frac{2^n+1}{n^n - 1}$$

Proposition. *Quelque soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Démonstration. Multiplier le membre de gauche par $(1-q)$; on trouve alors une somme télescopique. □

D'après ce qui précède, cette quantité converge lorsque $n \to \infty$ si et seulement si $|q| < 1$.

2.6 Formules explicites : suites récurrentes linéaires

Définition. *Une suite x est dite récurrente linéaire s'il existe un vecteur $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ avec $a_k \neq 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_k x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

On dit que cette relation de récurrence est d'ordre k et de polynôme caractéristique $P(X) = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

Exercice. *Vérifier que la suite de Fibonacci est récurrente linéaire ; écrire alors son polynôme caractéristique.*

Théorème. *Soit un polynôme scindé à racines simples $P(X) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$.*

L'ensemble des suites récurrentes linéaires de polynôme caractéristique $P(X)$ est un espace vectoriel de dimension k admettant pour base

$$\left((\alpha_1^n), \dots (\alpha_k^n)\right).$$

Exercice. *Démontrer ce théorème.*

Exercice. *Montrer que si le polynôme caractéristique d'une relation de récurrence admet une racine α avec multiplicité m, alors les suites*

$$\left((\alpha^n), (n\alpha^n), (n^2\alpha^n), \dots (n^{m-1}\alpha^n)\right)$$

vérifient cette relation de récurrence et sont indépendantes.

En déduire une généralisation du théorème ci-dessus aux polynômes arbitraires.

2.7 Suites extraites

Définition. *Soit u une suite de terme général u_n. Si ϕ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la suite v de terme général $v_n = u_{\phi(n)}$ est qualifiée de suite extraite (ou sous suite) de u.*

Proposition. *Une suite admet une limite si et seulement si toutes ses sous-suites extraites admettent la même limite.*

Exercice. *Prouver la proposition ci-dessus.*

Théorème (Bolzano–Weierstrass). *Toute suite bornée admet une sous suite convergente.*

Démonstration. Soit m_0 un minorant et M_0 un majorant d'une suite u. On pose $\phi(0) = 0$.

Comme u prend une infinité de valeurs dans $[m_0; M_0] = [m_0; \frac{m_0+M_0}{2}] \cup [\frac{m_0+M_0}{2}; M_0]$, elle en prend une infinité dans l'un de ces deux intervalles au moins ; on le note $[m_1; M_1]$. Il existe donc un indice $\phi(1)$ tel que $\phi(1) > \phi(0)$ et $u_{\phi(1)} \in [m_1; M_1]$.

Comme u prend une infinité de valeurs dans $[m_1; M_1] = [m_1; \frac{m_1+M_1}{2}] \cup [\frac{m_1+M_1}{2}; M_1]$, elle en prend une infinité dans l'un de ces deux intervalles au moins ; on le note $[m_2; M_2]$. Il existe donc un indice $\phi(2)$ tel que $\phi(2) > \phi(1)$ et $u_{\phi(2)} \in [m_2; M_2]$.

Par récurrence, cela définit une suite extraite v de terme général $v_n = u_{\phi(n)}$. Elle est de Cauchy car, pour tout $n < m$, les valeurs u_n et u_m sont dans $[m_n; M_n]$ donc $|u_n - u_m| \leqslant M_n - m_n = \frac{M_0 - m_0}{2^n}$ ce qui tends vers zéro lorsque n tends vers l'infini. □

2.8 Exercices

2.9 Examen

Chapitre 3

Fonctions

Définition. *On appelle fonction tout objet f qui, à chaque élément x d'un ensemble E, associe un unique élément y d'un ensemble F ; on note :*

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto y = f(x) \end{cases}$$

L'ensemble de départ E s'appelle le domaine (ou ensemble de définition) de f, et l'ensemble d'arrivé F s'appelle le codomaine de f. On dit que $y = f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f.

Dans ce cours, on s'intéressera presque exclusivement aux fonctions réelles, c'est à dire définies sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les suites réelles fournissent des exemples de telles fonctions puise que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$; toutefois nous verrons que, dans toute leur généralité, les fonctions sont des objets bien plus riches que les suites.

Exemple. *On note $\delta_{\mathbb{Q}}$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon.*

Rappelons que l'on peut combiner deux fonctions réelles $f : F \to \mathbb{R}$ et $g : G \to \mathbb{R}$ par les opérations :

$$f + g : \begin{cases} F \cap G \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases} \qquad f - g : \begin{cases} F \cap G \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) - g(x) \end{cases}$$

$$f \cdot g : \begin{cases} F \cap G \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases} \qquad f / g : \begin{cases} F \cap g^{-1}(\mathbb{R}^\times) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x)/g(x) \end{cases}$$

$$f \circ g : \begin{cases} g^{-1}(F) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(g(x)) \end{cases}$$

Exercice. *Évaluer la fonction $\delta_{\mathbb{Q}} \circ (x \mapsto x^2 + 1)$ en $3/2$. La décrire autant que faire se peut.*

3.1 Limites

Les entiers étant isolés les uns des autres (voir le cours de topologie), la seule notion de limite pertinente pour les suites était en l'infini. Avec les fonctions réelles, en revanche, il est pertinent d'étudier la limite en tout point qui « touche » le domaine de définition.

Définition. *Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $z \in \mathbb{R}$ un réel. On dit que f admet le réel y comme limite en z si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad x \in \,]z-\eta, z+\eta[\, \cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \,]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\,.$$

On note alors $y = \lim_{x \to z} f(x)$.

En changeant subtilement les intervalles intervenant dans cette définition, on peut la décliner en une myriade de variantes. Par exemple, les notions de limites à gauche et à droite dont vous avez peut-être connaissance s'obtiennent en prenant respectivement $]z-\eta, z[$ et $]z, z+\eta[$ comme intervalle pour x. Plus importantes sont les limites dites infinies et celles en l'infini qui utilisent des intervalles de la forme $]-\infty, \cdot[$ ou $]\cdot, \infty[$; rappelons les définitions des limites finies en l'infini puis des limites infinies en un réel fini :

$$\lim_{x \to \infty} = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists H, \quad x \in \,]H, \infty[\, \cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \,]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$$
$$\lim_{x \to z} = \infty \Leftrightarrow \forall E, \exists \eta > 0, \quad x \in \,]z-\eta, z+\eta[\, \cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \,]E, \infty[$$

Exercice. *Écrire une proposition logique stipulant que la fonction $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet comme limite $-\infty$ en $-\infty$?*

La notion de limite des fonctions peut entièrement se ramener à celle des suites.

Proposition. *Une fonction $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet y comme limite en z si et seulement si, pour toute suite réelle x_n qui converge vers z, la suite $f(x_n)$ converge vers y.*

Exercice. *Si vous aimez jongler avec des epsilons, cette preuve est pour vous !*

Par cette proposition, il est évident que la notion de limite des fonctions est compatible avec les opérations vues plus haut ; plus explicitement, si f et g sont deux fonctions réelles, alors les égalités suivantes sont vérifiées lorsqu'elles sont bien définies.

$$\lim_\alpha (f+g) = \lim_\alpha f + \lim_\alpha g \qquad \lim_\alpha (f-g) = \lim_\alpha f - \lim_\alpha g$$
$$\lim_\alpha (f \cdot g) = \lim_\alpha f \cdot \lim_\alpha g \qquad \lim_\alpha (f/g) = \lim_\alpha f / \lim_\alpha g$$
$$\lim_\alpha (f \circ g) = \lim_{(\lim_\alpha g)} f$$

Concluons notre rappel des limites de fonctions en donnant les versions fonctionnelles des théorèmes de majoration et des gendarmes.

Théorème. *Soient $f \leqslant g$ deux fonctions réelles. Lorsque ces limites existent, on a* $\lim_\alpha f \leqslant \lim_\alpha g$.

Corollaire. *Soient $f \leqslant g \leqslant h$ trois fonctions réelles. Si f et h admettent une même limite en α, alors il en va de même pour g.*

3.2 Limites classiques

On rappelle les valeurs et limites de la fonction exponentielle :

$$\lim_{-\infty} \exp = 0 \qquad \exp(0) = 1 \qquad \lim_{\infty} \exp = \infty$$

Le logarithme népérien (noté ln ou log) en est la réciproque, ses valeurs et limites sont donc inversées :

$$\lim_0 \log = -\infty \qquad \log(1) = 0 \qquad \lim_\infty \log = \infty$$

Rappelons aussi les valeurs entières des fonctions trigonométriques ; pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(0+2k\pi) &= 0 & \cos(0+2k\pi) &= 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) &= 1 & \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) &= 0 \\ \sin(\pi+2k\pi) &= 0 & \cos(\pi+2k\pi) &= -1 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) &= -1 & \cos\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) &= 0 \end{aligned}$$

Pour tout réel $\alpha > 0$, on a enfin les limites classiques suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^\alpha &= 0 & \lim_{x\to\infty} x^\alpha &= \infty \\ \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} &= \infty & \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} &= 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} &= 1 & \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 & \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice. *En utilisant la définition formelle de la limite, démontrer deux au choix des formules ci-dessus.*

De nombreuses limites peuvent se ramener aux égalités ci-dessus en appliquant les règles élémentaires de calcul de limites et, éventuellement :
— en effectuant un changement de variable ;
— en exploitant l'identité $a^b = \exp(b\log(a))$.

3.3 Exercices

Exercice. *Calculer les limites suivantes :*
— $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$
— $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{1+\log(x)}}$

3.4 Continuité

Définition. *Une fonction réelle est dite continue en un point de son ensemble de définition si elle y admet une limite qui coïncide avec sa valeur en ce point.*

Elle est dite continue si elle l'est en chaque point de son ensemble de définition.

Il découle directement des résultats sur les limites vu plus haut que la somme, la différence, le produit, le quotient (si le dénominateur est non nul) et la composée de deux fonctions continues sont continues.

Exercice. *Dire lesquelles des fonctions suivantes sont continues :*
— $x \mapsto x^2$

— $x \mapsto x^3 - x + 1$
— $x \mapsto \sqrt{|x|}$
— $x \mapsto \frac{x}{|x|}$
— $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$
— $x \mapsto (1+x^3)^{-1}$
— $x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Définition. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle non définie en $a \in \mathbb{R}$ mais y admettant une limite. La fonction*

$$\begin{cases} I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & si\ x \in I \\ \lim_a f & si\ x = a \end{cases} \end{cases}$$

s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Exercice. *Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes ?*
— $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$
— $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$
— $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

3.5 Exercices

3.6 Examen

3.7 Conséquences de la continuité

Théorème (valeurs intermédiaires). *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. Soit une f fonction continue et $[a;b]$ un intervalle contenu dans son domaine de définition. Montrons alors que tout élément $\gamma \in [f(a); f(b)]$ est dans $f(I)$.

Considérons le cas $f(a) < f(b)$. L'ensemble $E = \{x \in [a;b] : f(x) \leqslant \gamma\}$ est non vide car $a \in E$ et il est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure c. Comme c est limite de suites d'éléments de E, on a $f(c) \leqslant \gamma$. Si $f(x) < \gamma$, comme pour tout $\varepsilon > 0$ on a $f(c+\varepsilon) > \gamma$, la fonction f admet un discontinuité en γ ce qui est impossible. □

Intuitivement cela signifie qu'on peut tracer cette fonction sans lever le crayon.

Exercice. *Soit f une fonction réelle continue sur $[0;1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^\times$, l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet une solution. Appliquer ce résultat à la fonction $x \mapsto x - \frac{\sin(n\pi x)^2}{\sin(n\pi)^2}$. Et si n est un réel ?*

Théorème (compacité). *L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.*

Démonstration. On suppose que l'intervalle image n'est pas fermé ou borné. On prend une suite de x telle que $f(x)$ tends vers la borne ouverte ou infinie. On extrait une sous-suite convergente... □

3.8 Comparaisons asymptotiques

Définition. *Soient f et g deux fonctions réelles, et soit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

- *On note $f = O_\alpha(g)$ « f est dominée par g en α » lorsque la quantité f/g est bornée sur un voisinage d'α.*
- *On note $f \sim_\alpha g$ « f et g sont équivalentes en α » lorsque la quantité f/g a pour limite 1 en α.*
- *On note $f = o_\alpha(g)$ « f est négligeable devant g en α » lorsque la quantité f/g a pour limite 0 en α.*

Notons que si f et g sont équivalentes, alors f et dominée par g et inversement. Aussi, si f est négligeable devant g, elle f est aussi dominée par g.

Exemple. *On a les comparaisons suivantes :*

$$\begin{array}{llll} x = o_0(x+1) & 2x = O_0(x) & x = o_0(\sqrt{x}) & \sin(x) \sim_0 x \\ x = O_1(x+1) & 2x = O_1(x) & x \sim_1 \sqrt{x} & \sin(x) = O_1(x) \\ x \sim_\infty x+1 & 2x = O_\infty(x) & \sqrt{x} = o_\infty(x) & \sin(x) = o_\infty(x) \end{array}$$

Proposition. *Soient f, g, h et i quatre fonctions réelles. On a :*

- *Si $f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f \sim h$.*
- *Si $f \sim g$ et $h \sim i$ alors $fh \sim gi$.*
- *Si $f \sim g$ et $h \sim i$ alors $f/h \sim g/i$.*
- *Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.*
- *Si $f = O(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.*
- *Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$ alors $f = o(h)$.*
- *Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors $f + g = o(h)$.*
- *Si $f = O(h)$ et $g = O(h)$ alors $f + g = O(h)$.*
- *Si $f = o(h)$ et $g = o(i)$ alors $fg = o(hi)$.*
- *Si $f = O(h)$ et $g = O(i)$ alors $fg = O(hi)$.*
- *$f \sim g$ si et seulement si $f - g = o(g)$.*

Attention ! Les équivalents sont très difficile à manipuler sans erreur. Par exemple, en l'infini, on a $x + 1/x \sim x$ et $-x \sim -x$, mais on n'a pas pour autant l'équivalence « somme » $1/x \sim 0$. Lorsque c'est possible, utiliser de préférence les notations o et O. Quelqu'un qui aurait écrit $x + 1/x - x = o(x)$ n'aurait pas commit d'erreur.

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités classiques suivantes en zéro :*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1}) && = 1 + x + x^2 + O(x^3) \\
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + O(x^{n+1}) && = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \\
\log(1-x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} x^k + O(x^{n+1}) && = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha-0)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + O(x^{n+1}) && = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + O(x^3) \\
\sqrt{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(1-2k)4^k(k!)^2} x^k + O(x^{n+1}) && = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O(x^{2n+3}) && = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7) \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + O(x^{2n+2}) && = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)
\end{aligned}
$$

Démonstration. À l'ordre zéro par les dérivées : facile. Puis à l'ordre un par les dérivées secondes. □

Proposition. *Si $f = o(g)$ en α et $\lim_\beta h = \alpha$, alors $f \circ h = o(g \circ h)$ en β. Pareil pour la domination et l'équivalence.*

3.9 Examen

Chapitre 4

Dérivabilité

Les notions de comparaison comme l'équivalence et la domination nous permettent de considérer le comportement d'une fonction f au voisinage d'un point α. Afin d'étudier ce comportement de manière systématique, nous allons maintenant introduire la notion de dérivée.

4.1 Dérivabilité

Définition. *Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est dérivable en un point $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque la quantité*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

existe ; elle s'appelle alors la dérivée de f en α et se note $f'(\alpha)$.

Proposition. *Toute fonction dérivable en α est continue en α.*

Exemple. *Les fonctions suivantes sont dérivables en tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*
- $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x$
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - x + 1$
- $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$
- $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \log(x)$

Les fonctions suivantes ne sont pas dérivables en $\alpha = 0$:
- $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$
- $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$

La définition ci-dessus peut aussi s'écrire grâce aux relations de comparaison :

$$f'(\alpha) = \beta \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(\alpha) = \beta(x - \alpha) + o_\alpha(x - \alpha)$$

On voit alors apparaître l'équation de la droite tangente au graphe de f en α.

Définition. *Soit f une fonction réelle dérivable en α. On appelle tangente de f en α la droite d'équation $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$.*

Exercice. *Calculer l'intersection des tangentes à $x \mapsto x^2$ en 1 et -1.*

4.2 Dérivation

Définition. *On dit qu'une fonction réelle $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable si elle l'est en tout point $\alpha \in E$. On appelle alors fonction dérivée de f la fonction $f' : \alpha \in E \mapsto f'(\alpha)$.*

Exercice. *Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3 - x + 1$ en calculant la limite donnée dans la définition plus haut.*

Tout comme les limites, on peut calculer les dérivées de fonctions s'exprimant comme combinaisons de fonctions classiques en appliquant quelques règles de calcul. Rappelons d'abord ce que nous considérons comme fonctions classiques.

Proposition. *Les dérivées dites classiques comprennent les suivantes, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$.*

$$\begin{array}{lll} \sin(x)' = \cos(x) & \exp(x)' = \exp(x) & (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \\ \cos(x)' = -\sin(x) & \log(x)' = x^{-1} & \end{array}$$

Proposition. *Soient f et g deux fonctions réelles. On a les égalités suivantes :*

$$\begin{array}{ll} (f+g)' = f' + g' & (f \cdot g)' = f'g + fg' \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2} & (f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g) \end{array}$$

Exemple. *Prenons $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto x^2$. On a :*
- $(\sin(x) + x^2)' = \cos(x) + 2x$
- $(\sin(x)x^2)' = \cos(x)x^2 + 2x\sin(x)$
- $(\frac{\sin(x)}{x^2})' = \frac{\cos(x)x^2 - 2x\sin(x)}{x^4}$
- $(\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2)$

Lorsque l'on calcule des dérivées, penser à écrire toute puissance d'exposant non constant comme une exponentielle en utilisant l'identité $x^y = \exp(y\log(x))$; on pourra alors appliquer la règle concernant les fonctions composées.

Exercice. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*
- $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
- $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
- $x \mapsto x^x$
- $x \mapsto x^{\sqrt{x}}$

4.3 Inversion des fonctions continues

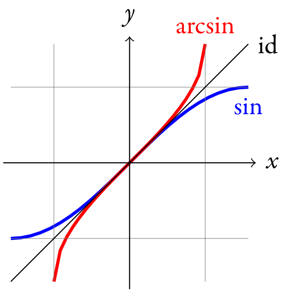
Définition. *Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que $g : F \to E$ est un inverse de f si $g \circ f = \mathrm{id}_E$.*

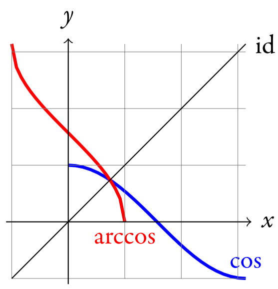
Une fonction admet un inverse si et seulement si elle est injective ; ce critère devient particulièrement explicite dans le cas des fonctions continues.

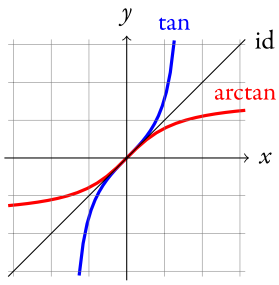
Proposition. *Une fonction réelle f continue sur un intervalle $E \subset \mathbb{R}$ est inversible si et seulement si elle est strictement monotone. Son inverse a alors la même monotonie que f.*

Démonstration. Si f n'est pas monotone, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Sinon, utiliser la croissance stricte pour obtenir l'injectivité. □

Ce théorème s'applique aux fonctions classiques :
— La fonction exponentielle sur $[-\infty, \infty]$.
— La fonction cosinus sur $[0, \pi]$.
— La fonction sinus sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
— La fonction tangente sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
Leurs inverses sont respectivement les fonctions logarithme, arccosinus, arcsinus et arctangente.







Proposition. *Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable strictement monotone. Son inverse a pour dérivée*

$$\left(f^{-1}\right)' : x \in J \longmapsto \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Exemple. *La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est l'inverse du cube, sa dérivée est donc $x \mapsto (3(\sqrt[3]{x})^2)^{-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$; remarquons que l'on aurait trouvé le même résultat en appliquant la formule ci-dessus à l'écriture équivalente $x \mapsto x^{1/3}$.*

L'application la plus importante de la proposition ci-dessus est le calcul de la dérivée de la fonction arctan.

Exemple. *Comme* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$*, sa dérivée vérifie* $\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$ *; celle de sa fonction inverse est donc* $\arctan'(x) = \cos(\arctan(x))^2$.

La quantité $\arctan(x)$ *est l'angle d'un triangle rectangle de côté adjacent* 1 *et côté opposé* x *; l'hypoténuse associé étant* $\sqrt{1+x^2}$*, on trouve* $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$*. D'où :*

$$\arctan' : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

4.4 Exercices

4.5 Accroissements finis

Les deux premiers théorèmes ci-dessous devraient être des rappels du lycée et du cours de mathématiques générales. Cependant, leur démonstration grâce à la propriété de la borne supérieure sera une nouveauté.

Théorème. *On se place sur un intervalle. Si une fonction réelle f y est dérivable, alors :*

— *Si $f' \geqslant 0$ alors f est croissante.*
— *Si $f' \leqslant 0$ alors f est croissante.*
— *Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.*
— *Si $f' < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Attention ! Les réciproques des deux premières assertions sont vraies, mais celles des deux dernières sont fausses. Considérer notamment le cas de la fonction $x \mapsto x^3$.

Théorème. *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert $]a;b[$.*
Si f admet un extremum en α, alors $f'(\alpha) = 0$.

Attention ! Ceci est faux sur un intervalle non ouvert. Par exemple, la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}$ admet un minimum en 0 mais sa dérivée y est loin d'être nulle.

Théorème (Rolle)**.** *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle fermé $[a;b]$ non réduit à un point. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Si la fonction est constante, alors c'est réglé. Sinon, f admet un minimum ou un maximum différent de $f(a) = f(b)$, c'est-à-dire atteint (puisqu'elle est continue) ailleurs qu'en a ou en b. □

Théorème (accroissements finis)**.** *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle fermé $[a;b]$ non réduit à un point. Il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g : x \mapsto f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Exemple. *On souhaite trouver un encadrement de la valeur $\sqrt{3}$. Considérons pour cela la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[3,4]$. Elle y est dérivable de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$; d'après le théorème des accroissements finis, on a*

$$\frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{4-3} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right], \qquad \textit{c'est-à-dire,} \qquad \sqrt{3} \in \left[2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{7}{4}\right].$$

D'après la majoration grossière $\frac{1}{2\sqrt{3}} \leqslant \frac{1}{2}$ on trouve $\sqrt{3} \in [\frac{6}{4}, \frac{7}{4}]$. Ce nouvel encadrement implique alors l'inégalité $\frac{1}{2\sqrt{3}} \leqslant \frac{1}{3}$ et on obtient ainsi $\sqrt{3} \in [\frac{5}{3}, \frac{7}{4}]$. En itérant ce procédé, on obtient

$$\sqrt{3} \in \left[\lim(u_n), \frac{7}{4}\right] \qquad \textit{avec} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2u_n} \end{cases}$$

Et on peut même calculer $\lim(u_n) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.6 Exercices

4.7 Examen

4.8 Classes de fonctions

Définition. *Soit f une fonction réelle dérivable. Si sa dérivée f' est elle-même dérivable alors on dit que f est dérivable deux fois et on note $f^{(2)} = f''$. Par récurrence, on dit encore que f est n fois dérivable si sa dérivée $n-1$ fois dérivable. On note $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.*

Exemple. *La fonction $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais dérivable une seule fois en 0.*

Définition. *On a les notations suivantes pour les classes de fonctions usuelles :*

— *$\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$*

— *$\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions n fois continument dérivables de I dans $\mathbb{R}$*

où l'expression « continument dérivable » dénote que la dérivée existe et est continue.

Exemple. *La fonction $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas continument dérivable.*

4.9 Formule de Taylor

Théorème. *Soit f une fonction réelle dérivable n fois en α. On a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + o_\alpha((x-\alpha)^n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + o_\alpha((x-\alpha)^n). \end{aligned}$$

De plus, si f est dérivable $n+1$ fois, alors pour tout x il existe $\beta \in]\alpha, x[$ tel que l'on puisse remplacer $o_\alpha((x-\alpha)^n)$ par $\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}$ dans l'expression ci-dessus.

Démonstration. Le cas $n = 1$ concerne la dérivée première et a déjà été établi. Montrons maintenant cette égalité par récurrence. Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable. Le théorème des accroissements finis donne

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k &= (x-\alpha)\left(f'(\beta) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} k(\beta-\alpha)^{k-1}\right) \\ &= (x-\alpha)\left(f'(\beta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f'^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^k\right) \end{aligned}$$

pour un certain $\beta \in]\alpha, x[$. Par récurrence, comme f' est n fois dérivable, le second terme du dernier membre vaut $o((\beta-\alpha)^n)$ donc a fortiori $o((x-\alpha)^n)$; d'où le théorème. □

Exercice. *Écrire la formule de Taylor pour la fonction sinus à l'ordre trois en zéro. En déduire la limite de la quantité $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ lorsque $x \to 0$.*

4.10 Développements limités

Définition. *On appelle développement limité d'une fonction réelle f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ toute égalité de la forme*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-\alpha) + c_2(x-\alpha)^2 + \cdots + c_n(x-\alpha)^n + o\left((x-\alpha)^n\right)$$

pour certains coefficients $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}$.

Proposition. *Lorsqu'un tel développement existe, ses coefficients sont unique.*

La formule de Taylor montre que toute fonction dérivable n fois admet un développement limité à l'ordre n et permet même de le calculer. Évidemment, on a aussi :

— Toute fonction admettant un développement limité à l'ordre zéro est continue.

— Toute fonction admettant un développement limité à l'ordre un est dérivable.

Mais cela n'est pas vrai aux ordres supérieurs !

Exercice. *Montrer que la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité à l'ordre deux en zéro mais n'y est pas dérivable deux fois.*

On peut combiner les développements limités de fonctions élémentaires pour former ceux de fonctions plus complexes comme on le ferait de polynômes, à condition de maîtriser les règles de calcul avec les petits o. Notamment :

Théorème. *Supposons*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k(x-\alpha)^k + o\left((x-\alpha)^n\right), \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{n} d_k(x-\alpha)^k + o\left((x-\alpha)^n\right). \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda c_k)(x-\alpha)^k + o\left((x-\alpha)^n\right), \\ f(x) + g(x) &= \sum_{k=0}^{n} (c_k + d_k)(x-\alpha)^k + o\left((x-\alpha)^n\right), \\ f(x) \cdot g(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} c_i d_j \right)(x-\alpha)^k + o\left((x-\alpha)^n\right). \end{aligned}$$

On peut pareillement composer des développements limités :

Théorème. *Supposons*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k(x-\alpha)^k + o\left((x-\alpha)^n\right), \\ g(x) &= \sum_{\ell=0}^{n} d_\ell(x-c_0)^\ell + o\left((x-c_0)^n\right). \end{aligned}$$

Alors on a :

$$g(f(x)) = \sum_{\ell=0}^{n} d_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} c_k (x-\alpha)^k \right)^\ell + o\left((x-\alpha)^n\right),$$

Faites bien attention ! Pour développer $g(f(x))$ en α, c'est en $f(\alpha)$ qu'il faut un développement limité de $g(x)$, pas en α.

Exercice. *Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre cinq en zéro :*
— $x \mapsto \exp(\sin(x))$
— $x \mapsto \exp(\cos(x))$

Pour calculer l'inverse d'un développement limité, il faut absolument avoir recours à la composition avec le développement bien connu de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en zéro. Pour calculer le quotient de deux développements limités, on multiplie alors tout simplement celui du numérateur par l'inverse de celui du dénominateur.

Exercice. *Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre cinq en zéro :*
— $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$
— $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Exercice. *Montrer que la fonction* $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ *peut se prolonger en zéro en une fonction infiniment dérivable ; y calculer son développement limité.*

4.11 Exercices

4.12 Développement asymptotique

Afin d'approcher une quantité $f(x)$ lorsque $x \to \infty$, on peut parfois utiliser un changement de variable pour se ramener aux développements limités. Typiquement, on pose $y = \frac{1}{x}$ et étudie alors $f(\frac{1}{y})$ lorsque $y \to 0$.

Prenons par exemple $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; on peut réécrire cette quantité de sorte à utiliser le développement de $\sqrt{1+y}$ lorsque $y = \frac{1}{x} \to 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) \\ &= \sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{x^3} - \frac{5}{128}\frac{1}{x^4} + o\left(x^4\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{8}x^{-3/2} + \frac{1}{16}x^{-5/2} - \frac{5}{128}x^{-7/2} + o\left(x^{-7/2}\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne une excellente approximation de la quantité $f(x)$ lorsque $x \to \infty$.

Exercice. *Développer pareillement la quantité* $\log(x+1) - \log(x)$ *lorsque x tend vers l'infini.*

Cet exercice a notamment comme conséquence importante le résultat suivant qui sera approfondi plus tard dans vos études :

Proposition. *Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que, lorsque $n \to \infty$, on ait :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n) + \gamma + o(1)$$

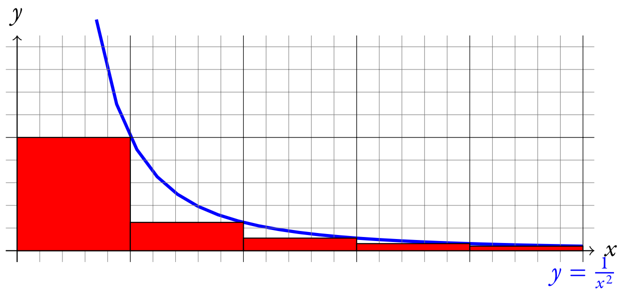
Démonstration. On trouve $\log(x+1)-\log(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\log(k+1) - \log(k) + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\log(k+1) - \log(k) \Big) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \\
&= \log(n+1) + \gamma + o(1)
\end{aligned}$$

car, en effet, cette première somme est télescopique et la seconde est majorée et croît avec n ; cette majoration s'obtient classiquement par

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &< 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} dx \\
&< 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2} dx \\
&< 2 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ce qui s'interprète bien en termes d'aires du plan :



□

4.13 Exercices

Rappelons qu'une étude de fonction consiste à déterminer :

- **le domaine d'étude :**
  - le domaine de définition
  - les éventuelles symétries permettant de le réduire (parité, périodicité, etc.)
- **la continuité :**
  - le domaine de continuité
  - les éventuels prolongements
- **la dérivabilité :**
  - le domaine de dérivabilité
  - la fonction dérivée
  - le tableau de variation
- **éléments remarquables :**
  - valeurs particulières
  - asymptotes

On peut alors tracer une esquisse du graphe de cette fonction.

Exercice. *Étudier la fonction* $x \mapsto x \log(x)$.

Exercice. *Étudier la fonction* $x \mapsto \log(x)\exp(x)$.

Exercice. *Étudier la fonction* $x \mapsto \log(\cos(x))$.

Exercice. *Étudier la fonction* $x \mapsto \frac{\sqrt{x}-1}{\log(x)}$.

Exercice. *Étudier la fonction* $x \mapsto \cos(x)^x$.

4.14 Examen

Bibliographie

[1] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*.
Traduit de l'anglais par Nicole Dhombres et François Hoffman. Masson, 1975.
isbn : 2225484007.