Équations différentielles

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

Les équations différentielles décrivent l'évolution de quantités dans le temps ou l'espace. En mathématiques, leur étude forme un pan important de l'analyse et, en sciences appliquées, elles s'avèrent indispensables notamment à la modélisation des phénomènes physiques. C'est sous cet angle que ce cours va les aborder : nous prendrons soin d'expliquer en termes qualitatifs les résultats théoriques que nous énoncerons avant de les illustrer sur des exemples pratiques.

Nous aborderons en premier lieu la théorie générale avant de nous concentrer sur des classes d'équations plus restreintes pour lesquelles des résultats précis peuvent être obtenus.

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

Un cours sur les équations différentielles peut difficilement commencer sans citer l'ouvrage de référence [2] où les illustrations foisonnent et l'intuition abonde ; il est d'un niveau bien plus élevé que celui du présent cours mais le lecteur curieux gagnera à le consulter où qu'il en soit dans son étude des équations différentielles.

1.1 Motivation et première définition

Intuitivement, une équation différentielle exprime une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. Avant d'en adopter une définition formelle, passons en revue différents exemples issus de la modélisation de phénomènes physiques.

Solide en chute libre. Notons $y(t)$ l'altitude d'un solide en chute libre au temps t ; d'après la seconde loi de Newton, son accélération vérifie $y''(t) = G \approx 9.8\ m/s^2$. L'altitude y est donc l'une des solutions de cette équation différentielle — pour trouver la solution exacte, il faut connaître d'autres paramètres (appelés *conditions initiales*) comme par exemple l'altitude et vitesse verticale du solide à un instant donné.

Modèle proie–prédateur. Supposons que chaque jour 10% des cent-pieds mettent bas. Supposons aussi que les coqs mangent tous les cent-pieds qu'ils rencontres et que leur population évolue proportionnellement à la quantité de cent-pieds consommés. L'évolution avec le temps des populations de cent-pieds y et de coqs z satisfait alors un système du type

$$\begin{cases} y' = Ay - Byz \\ z' = Cyz - Dz \end{cases}$$

pour certaines constantes $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ dont $A = \frac{10}{100}$.

Propagation des vagues. Soit $u(t, x, y)$ la hauteur de l'océan aux coordonnées cartésiennes (x, y) et au temps t. En l'absence de toute force extérieure, cette grandeur satisfait

$$\partial_{t^2} u = c^2 \left(\partial_{x^2} u + \partial_{y^2} u\right)$$

où la constante c correspond à la vitesse de propagation.

Ce dernier exemple se distingue des autres en ce que sa fonction inconnue dépend de plusieurs variables réelles ; ce type d'équations différentielles, appelé *équations aux dérivées* *partielles* (EDP), sera brièvement abordé au chapitre 6. À cette exception près, le cours portera intégralement sur les *équations différentielles ordinaires* (EDO) dont la fonction inconnue ne dépend que d'une variable réelle.

Dans le soucis d'adopter une définition la plus générale possible, nous écrirons une équation différentielle sous la forme malcommode mais générique $f(x, y, y' \ldots) = 0$. Par ailleurs, même si la fonction inconnue y sera souvent réelle, on considérera parfois ponctuellement le cas vectoriel, c'est-à-dire avec $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$ avec $\ell > 1$.

Définition. *Une équation différentielle ordinaire est une fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^\ell)^{n+1}$. *Ses solutions sont les fonctions* $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$ *vérifiant*

$$f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

pour tout x *dans l'intervalle* I.

Le qualificatif *ordinaire* sera dorénavant sous entendu et, sauf mention explicite du contraire, on se restreindra au cas $\ell = 1$.

Exemple. *Pour* $n = \ell = 1$ *considérons* $f : (x, y_0, y_1) \mapsto y_1 + x - 1$. *Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $y'(x) + x - 1 = 0$, *c'est-à-dire* $y'(x) = 1 - x$ *; il s'agit donc des primitives de* $1 - x$, *à savoir les fonctions* $x \mapsto x - \frac{1}{2}x^2 + C$ *pour tout* $C \in \mathbb{R}$.

Exercice. *Pour chacune des équations différentielles ci-dessous, expliciter la fonction* f *puis déterminer l'ensemble des solutions définies sur* $I = \mathbb{R}$.

— $y = 0$
— $y' = 0$
— $y'' = 0$
— $y' = x^2$
— $y' = 1/x^2$
— $y' - y = 0$

1.2 Résolution d'équations d'ordre un

Définition. *L'entier* n *s'appelle l'ordre de l'équation différentielle.*

Pour $n = 0$, on a une équation en x et en y seulement. On peut ainsi la résoudre comme toute équation ordinaire en employant les techniques usuelles de calcul élémentaires.

Exercice. *Déterminer les fonctions solutions* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *des équations (différentielles) suivantes.*

— $x + y = 0$
— $x \cdot y = 1$
— $y^2 = xy + 1$
— $x \cdot y = 0$

De même que les équations polynômiales générales de degré cinq et plus ne sont pas résolubles par radicaux [1], nous verrons que la grande majorité des équations différentielles n'admettent pas de fonction solution s'exprimant commodément comme composition de fonctions élémentaires. Quantité de méthodes ad-hoc a néanmoins été développé afin de résoudre certaines classes particulières d'équations. Nous présentons ici les trois plus importantes ; elles illustrent notamment l'utilité du calcul de primitives.

Définition. *Une équation différentielle d'ordre un est dite linéaire si elle est de la forme*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

avec $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ *pour un intervalle ouvert* I.

Théorème. *Soit* $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ *une équation différentielle avec* $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. *Pour tout* $\alpha \in I$, *les solutions de l'équation définies en* α *sont exactement les fonctions*

$$x \longmapsto e^{\int_\alpha^x a(u)du} \left(\lambda + \int_\alpha^x e^{-\int_\alpha^t a(u)du} b(t)dt \right)$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On vérifie directement par le calcul que ces fonctions sont bien solutions. Le fait qu'il n'en existe aucune autre découle du théorème de Cauchy–Lipschitz que nous énoncerons puis prouverons au chapitre suivant. □

Pour faciliter les calculs, on gagnera à choisir systématiquement $\alpha = 0$ excepté lorsque les intégrales ne sont pas définies en zéro ; on choisira alors une autre valeur telle $\alpha = 1$.

Exercice. *Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.*
- $y' = y + x$
- $y' = xy + 1$
- $y' = y - \sin(x)$
- $y' = y/x + \sqrt{x}$

Définition. *Une équation différentielle d'ordre un est dite à variables séparables si elle est de la forme*

$$y' = f(x)g(y).$$

avec $f, g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ *pour un intervalle ouvert* I.

On résout de telles équations en écrivant $y' = dy/dx$ puis en manipulant les quantités dy et dx comme si elles étaient indépendantes ; cette approche est justifiée par la théorie des formes différentielles (parfois aussi appelées *éléments différentiels* dans ce contexte) qui dépasse le cadre de ce cours. L'équation $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ s'écrira ainsi

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

ce dont on intègrera les deux membres afin d'obtenir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

et il suffira alors de résoudre cette dernière équation en y.

Exercice. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*
- $y' = x^2y^2$
- $y' = y\ln(x)$
- $y' = \frac{\ln(1+x)}{\sin(y)}$

Définition. *Une équation différentielle d'ordre un est dite homogène si elle est de la forme*

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec $g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ pour un intervalle ouvert I.

On résout de telles équations en effectuant le changement de variable $u = y/x$, ce qui donne les identités :

$$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - u\right).$$

Ainsi, l'équation homogène $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ s'écrit en cette nouvelle inconnue

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u)$$

et l'on se trouve ramené au cas d'une équation à variables séparables en l'écrivant

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Exercice. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*
— $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$
— $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2$

1.3 Représentation des solutions

L'objectif de ce cours est bien moins d'apprendre à mettre en œuvre des techniques explicites de résolution d'équations différentielles, telles que celles présentées ci-dessus, que d'apprendre à étudier qualitativement ces équations en l'absence de solutions explicites, ce que nous aborderons dès le chapitre suivant. À cet usage, les (esquisses de) représentations graphiques seront une aide précieuse.

Définition. *Soit $f(x, y, y') = 0$ une équation différentielle d'ordre un. On appelle champ de vecteur l'application qui à chaque point du plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe l'ensemble des vecteurs $(1, d)$ vérifiant $f(x, y, d) = 0$. On appelle courbe intégrale le graphe de toute fonction solution.*

Proposition. *Toute courbe intégrale est tangente au champ de vecteur.*

Exemple. *Tracer grossièrement le champ de vecteur de l'équation différentielle $y' = e^x(y+1)$. Que dire des variations de ses fonctions solutions ?*

Comme pour les études de fonctions réalisées en première année, les études d'équations différentielles seront facilitées par la présence de symétries permettant de réduire le domaine étudié.

Proposition. *Notons S l'ensemble des solutions et C le champ de vecteurs de l'équation différentielle $f(x, y, y') = 0$.*

1. *Si $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow f(x, -y, -z) = 0$, alors C est stable par symétrie d'axe Ox et on a $y \in S \Rightarrow (x \mapsto -y(x)) \in S$.*

2. *Si* $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow f(-x,y,-z) = 0$*, alors* C *est stable par symétrie d'axe* Oy *et on a* $y \in S \Rightarrow (x \mapsto y(-x)) \in S$*.*
3. *Si* $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow f(-x,-y,z) = 0$*, alors* C *est stable par symétrie de centre* O *et on a* $y \in S \Rightarrow (x \mapsto -y(-x)) \in S$*.*
4. *Si* $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow f(x+\alpha, y+\beta, z) = 0$*, alors* C *est stable par translation de vecteur* (α,β) *et on a* $y \in S \Rightarrow (x \mapsto y(x-\alpha)+\beta) \in S$*.*

On pourra remarquer que la composition de deux quelconques des trois premières symétries donne la troisième ; ainsi il n'est jamais nécessaire que de déterminer si deux d'entre elles s'appliquent.

Exercice. *Étudier les symétries des équations différentielles suivantes puis en esquisser sans justification le champ de vecteur et les courbes intégrales.*

— $y' = \sin(y)$
— $y' = e^{y-x}$
— $y' = x\cos(y)$
— $x = \sqrt{yy'}$

Voir la figure 1.1.

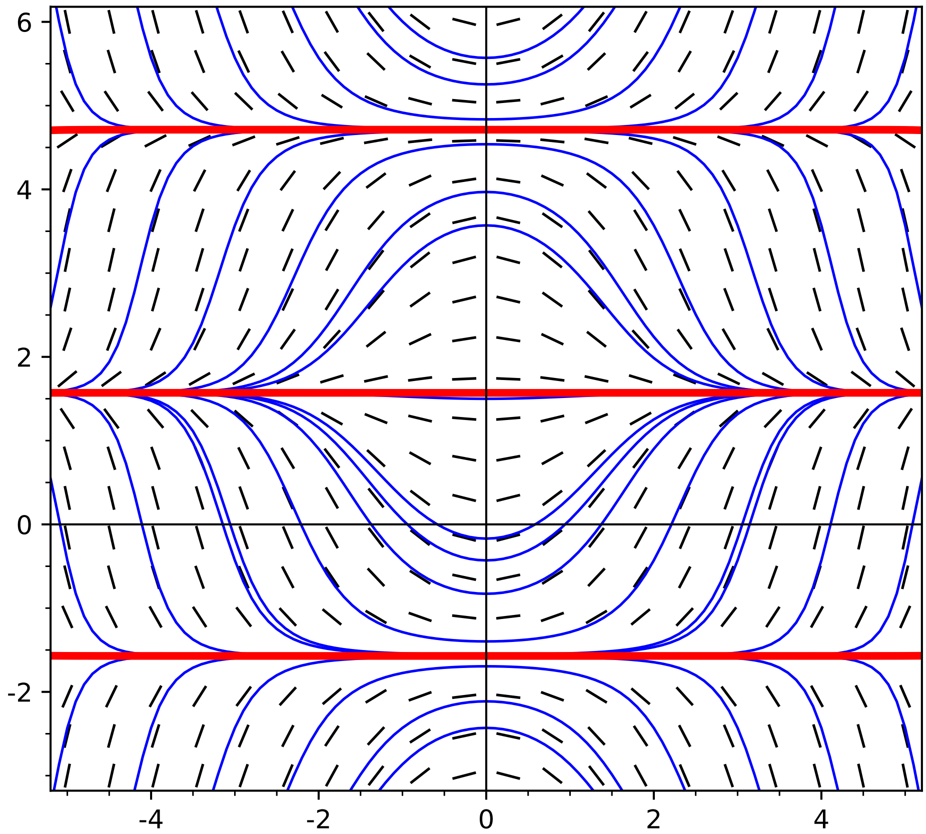

FIGURE 1.1 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = x\cos(y)$. En rouge, les solutions constantes.

Chapitre 2

Théorème de Cauchy–Lipschitz

Le théorème de Cauchy–Lipschitz est le résultat principal de ce cours. Nous allons l'énoncer, préciser la terminologie nécessaire, puis attaquerons sa preuve, judicieusement découpée en plusieurs étapes.

2.1 Problème de Cauchy

Une équation différentielle peut admettre plusieurs, une seule, ou aucune solution. Afin d'identifier celles pertinentes pour un problème posé, on est souvent amené à introduire des contraintes supplémentaires appelées conditions initiales. Elles prennent typiquement la forme $y(\alpha) = \beta_0, y'(\alpha) = \beta_1, \ldots$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ donné.

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale ; il consiste à déterminer s'il existe une fonction solution de l'équation satisfaisant la condition. Nous avons déjà vu que, dans certain cas, aucune solution n'existe. Le théorème de Cauchy–Lipschitz apporte une réponse positive dans certains cas bien précis.

Théorème (Cauchy–Lipschitz). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue localement lipschitzienne en la seconde variable. Pour tout $(\alpha, \beta) \in U$ il existe une unique fonction y définie sur un intervalle maximal solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, \left(y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}\right)\right), \\ \beta = \left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)(\alpha). \end{cases} .$$

Son intervalle de définition est ouvert.

Détaillons maintenant les subtilités de ce résultat.

Forme normale. Il ne concerne que les équations différentielles en *forme normale*, c'est-à-dire du type $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. On ne pourra l'appliquer à une équation différentielle d'ordre n qu'après l'avoir mise sous cette forme, c'est-à-dire avoir résolu l'équation en $y^{(n)}$.

Condition initiale. Le théorème ne s'applique que lorsque la condition initiale est de la forme $y(\alpha) = \beta_0, y'(\alpha) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)} = \beta_{n-1}$. On ne pourra donc pas l'appliquer directement lorsque, par exemple, elle sera du type $y(0)y'(0) = 1$ ou encore $y(0)y(1) = 1$.

Solution maximale. Par « définie sur un intervalle maximal », on entend que ladite fonction solution ne peut pas être prolongée en une fonction solution dont l'intervalle de définition est strictement plus grand. Car on rappelle que deux fonctions sont considérées comme distinctes lorsque leurs domaines diffèrent.

2.2 Fonctions lipschitziennes

Reprenons tout d'abord la notion classique de fonction lipschitzienne.

Définition. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ pour laquelle*

$$\forall x \in U, \forall y \in U, \|f(x) - f(y)\| \leqslant \gamma \|x - y\|.$$

On pourra notamment remarquer que cette propriété implique l'uniforme continuité. Elle est cependant bien plus forte, au point qu'il serait très contraignant d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz sous cette condition. Heureusement, sa version locale suffit.

Définition. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite satisfaire localement une propriété lorsque tout point $\alpha \in U$ admet un voisinage V pour lequel $f|_V$ satisfait cette propriété.*

Exercice. *Déterminer si chaque fonction ci-dessous est lipschitzienne ou localement lipschitzienne.*

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Les démonstrations de l'exercice ci-dessus peuvent être généralisées ainsi :

Théorème. *Toute fonction $\mathscr{C}^1(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est localement lipschitzienne.*

Démonstration. Soit f une telle fonction et α un point de U. Soit V une boule fermée centrée en α et inclue dans U. Quels que soient x et y dans V on a

$$\|f(y) - f(x)\| = \|\int_x^y f'(t)dt\| \leqslant \int_x^y \|f'(t)\| dt.$$

La dérivée f' étant continue sur le compact V elle y est bornée, ce qui entraine $\|f(y) - f(x)\| \leqslant \gamma\|y - x\|$ pour $\gamma = \max_{t \in V} \|f'(t)\|$; la fonction f est donc lipschitzienne sur V. □

Dans le cas du théorème de Cauchy–Lipschitz, le domaine U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et on distingue la première et la seconde variable ; c'est donc la variante suivante qui est utilisée. On pourra néanmoins démontrer similairement que toute fonction continument dérivable sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ satisfait cette condition.

Définition. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite localement lipschitzienne en la seconde variable si tout point de U admet un voisinage V et une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ pour lesquels*

$$\forall (t, x) \in V, \forall (t, y) \in V, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant \gamma \|x - y\|.$$

(Remarquer que la première coordonnée des points considérés est la même.)

Exercice. *Appliquer si possible le théorème de Cauchy–Lipschitz aux problèmes suivants.*

— $x = y + y' + y''$ *avec* $y(0) = 1$
— $x = y \cdot y' \cdot y''$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$
— $x = y \cdot y' \cdot y''$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$

2.3 Réduction à l'ordre un

L'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$$

est équivalente au système d'équations différentielles d'ordre un

$$\begin{cases} y'_{n-1} = f(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-3} = y_{n-2} \\ \quad\vdots \\ y'_0 = y_1 \end{cases}$$

qui lui même peut s'écrire $y' = g(t, y)$ d'inconnue le vecteur $y = (y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0)$ pour

$$g : t, \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Naturellement, g est localement lipschitzienne en la seconde variable dès lors que f l'est. Aussi, pour le reste de ce chapitre, nous utiliserons g plutôt que f : les informations supplémentaires qu'elle véhicule nous aiderons à démontrer l'existence de solutions.

2.4 Existence locale

Soit $g : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue localement lipschitzienne en la seconde variable avec U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $(\alpha, \beta) \in U$. Nous allons montrer l'existence, pour $\delta > 0$ suffisamment petit, d'une fonction y vérifiant

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

quel que soit $t \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$. Nous en déduirons plus loin l'existence de solutions définies sur un intervalle maximal.

Remarquons tout d'abord que le problème de Cauchy tel qu'écrit ci-dessus (équation différentielle et condition initiale) est parfaitement équivalent à sa forme intégrale, c'est-à-dire

$$y(t) = \beta + \int_\alpha^t g(s, y(s)) ds.$$

Notant $B(c, d)$ la boule ouverte de centre c et de rayon d, on se place sur un voisinage de (α, β) du type $B(\alpha, \delta) \times B(\beta, \varepsilon)$. Pour $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petits, la fonction g est lipschitzienne et bornée (car continue) donc il existe γ et M tels que

$$\forall (t, x), \forall (t, y), \quad \|g(t, x) - g(t, y)\| \leqslant \gamma \|x - y\| \quad \wedge \quad \|g(t, x)\| \leqslant M.$$

Partons maintenant de la fonction constante $t \mapsto \beta$ et martelons là de sorte à ce qu'elle satisfasse de mieux en mieux l'équation différentielle, ou plutôt sa forme intégrale. On considère la suite :

$$\begin{aligned} u_0 &: t \mapsto \beta \\ u_{k+1} &: t \mapsto \beta + \int_\alpha^t g(s, u_k(s))ds \end{aligned}$$

Quitte à choisir $\delta < \varepsilon/M$ on a $\mathrm{im}(u_n) \subset B(\beta, \varepsilon)$ et on peut ainsi appliquer les hypothèses concernant la fonction g :

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u_k\|_\infty &= \left\| \int_\alpha^t (g(s, u_k(s)) - g(s, u_{k-1}(s))ds) \right\|_\infty \\ &\leqslant \left\| \int_\alpha^t \gamma \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| ds \right\|_\infty \\ &\leqslant \gamma\delta \|u_k - u_{k-1}\|_\infty \end{aligned}$$

Pour $\delta < \frac{1}{2\gamma}$ cela donne $\|u_{k+1} - u_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|u_k - u_{k-1}\|_\infty$ d'où l'on déduit que $\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}\|u_1 - u_0\|$ et enfin que cette suite est de Cauchy. L'espace $\mathscr{C}^0(B(\alpha, \delta), \mathbb{R}^n)$ muni de la norme infinie étant de Banach, elle converge vers une fonction $u(t)$ vérifiant

$$u(t) = \beta + \int_\alpha^t g(s, u(s))ds.$$

Exemple. *Calculer les premiers termes de la suite u_k ci-dessus dans le cas du problème différentiel $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

2.5 Lemme de Gronwall

Même s'il ne sera utilisé que de manière occasionnelle, le résultat technique ci-dessous est extrêmement puissant en ce qu'il permet de résoudre une classe entière de ce que nous pourrions appeler des inéquations différentielles.

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle contenant un réel α. Rappelons que l'équation différentielle linéaire d'ordre un $x' = ax + b'$ avec condition initiale $x(\alpha) = b(\alpha)$, autrement dit le problème de Cauchy sous forme intégrale $x(t) = b(t) + \int_\alpha^t a(u)x(u)du$, a pour solution exacte

$$x(t) = e^{\int_\alpha^t a(u)du}\left(b(\alpha) + \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^u a(s)ds} b'(u)du\right)$$

soit encore, après intégration par partie et simplifications,

$$x(t) = b(t) + \int_\alpha^t e^{-\int_t^u a(s)ds} a(u)b(u)du.$$

Lemme. *Si $a \geqslant 0$, alors toute fonction x vérifiant*

$$x(t) \leqslant b(t) + \int_\alpha^t a(u)x(u)du$$

pour tout $t \geqslant \alpha$ vérifie aussi

$$x(t) \leqslant b(t) + \int_\alpha^t e^{-\int_t^u a(s)ds} a(u)b(u)du.$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$e^{-\int_\alpha^t a(u)du} \int_\alpha^t a(u)x(u)du;$$

sa dérivée vaut

$$e^{-\int_\alpha^t a(u)du} a(t)\left(x(t) - \int_\alpha^t a(u)x(u)du\right).$$

Par hypothèse, ce dernier facteur est inférieur à $b(t)$; en intégrant de α à t la majoration de cette dérivée, on trouve

$$e^{-\int_\alpha^t a(u)du} \int_\alpha^t a(u)x(u)du \leqslant \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^u a(s)ds} a(u)b(u)du$$

d'où l'on obtient par la relation de Chasles

$$\int_\alpha^t a(u)x(u)du \leqslant \int_\alpha^t e^{-\int_t^u a(s)ds} a(u)b(u)du$$

et le résultat suit en substituant cette majoration dans l'hypothèse. □

2.6 Unicité locale

Soient x et y deux solutions d'un même problème de Cauchy définies sur un même voisinage de la condition initiale. On a :

$$\begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(\alpha) = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

En intégrant leur différence, on obtient

$$x(t) - y(t) = \int_\alpha^t (g(s,x(s)) - g(s,y(s)))ds.$$

Comme précédemment, en se restreignant à un voisinage $B(\alpha,\delta)$, on a un réel γ tel que

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \int_\alpha^t \gamma\|x(s) - y(s)\|ds$$

Le lemme de Gronwall s'applique alors avec $b = 0$, ce qui implique $x = y$.

2.7 Unicité globale

Soient $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : J \to \mathbb{R}$ deux solutions d'un même problème de Cauchy définies sur des intervalles maximaux ; elles vérifient en particulier toutes deux une condition initiale du type $x(\alpha) = \beta = y(\alpha)$.

Nous allons d'abord montrer l'égalité $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in I \cap J$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors l'un des deux ensembles

$$E = \{t \in I \cap J \cap [\alpha, \infty[: x(t) \neq y(t)\},$$
$$F = \{t \in I \cap J \cap]-\infty, \alpha] : x(t) \neq y(t)\}$$

est non vide. Supposons qu'il s'agisse de E ; puisqu'il est tminoré, cet ensemble admet une borne inférieure m. La fonction $x - y$ étant continue et nulle sur $[\alpha, m[$, on a $x(m) = y(m)$; l'unicité locale des solutions vérifiant la condition initiale $(m, x(m))$ contredit alors la définition de m. Un raisonnement similaire permet de traîter le cas $F \neq \emptyset$. On en déduit comme prévu que les fonctions x et y coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition.

Considérons maintenant la fonction

$$z : \begin{cases} I \cup J \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad t \longmapsto \begin{cases} x(t) \text{ si } t \in I \\ y(t) \text{ si } t \in J \end{cases} \end{cases} .$$

Elle est bien définie puisque x et y coïncident sur $I \cap J$; elle est en outre dérivable puisque $I \cap J$ contient un voisinage de α et elle satisfait enfin le même problème de Cauchy que x et que y. La fonction z est par ailleurs un prolongement de x et de y ce qui contredit leur maximalité excepté dans le cas $z = x = y$. Ceci montre l'unicité de la fonction définie sur un intervalle maximal solution d'un problème de Cauchy.

2.8 Existence globale

Nous allons à présent invoquer l'énoncé ci-dessous qui, malgré son nom, jouit d'un statut d'axiome. (Techniquement, son énoncé est équivalent à l'axiome du choix.) On concluera d'abord qu'il existe une unique solution définie sur un intervalle maximal puis, en un second temps, on montrera que cet intervalle est ouvert.

Lemme (Zorn). *Soit un ensemble ordonné E dans lequel :*
- *Tout couple d'éléments admet un majorant.*
- *Toute suite croissante admet un majorant.*

Alors E admet un unique élément maximal.

Notons S l'ensemble des fonctions solutions d'un même problème de Cauchy définies sur un intervalle. On prend pour E l'ensemble des intervalles de définition des fonctions de S, muni de la structure d'ordre partiel induite par l'inclusion. On démontre facilement qu'il satisfait les deux hypothèses du résultat ci-dessus :
- Si x et y sont deux fonctions de S, alors la fonction suivante est bien définie et dans S :

$$\begin{cases} \operatorname{dom}(x) \cup \operatorname{dom}(y) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad t \longmapsto \begin{cases} x(t) \text{ si } t \in \operatorname{dom}(x) \\ y(t) \text{ si } t \in \operatorname{dom}(y) \end{cases} \end{cases}$$

- Si (x_n) est une suite de fonctions de S vérifiant $\operatorname{dom}(x_n) \subset \operatorname{dom}(x_{n+1})$ quel que soit n alors la fonction suivante est bien définie et dans S :

$$\begin{cases} \bigcup_n \operatorname{dom}(x_n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad t \longmapsto x_n(t) \text{ avec } n \text{ suffisament grand} \end{cases}$$

Le lemme de Zorn fournit donc une fonction solution z définie sur un intervalle maximal. Si cet intervalle est fermé à l'une de ses extrémités m alors l'existence locale de solutions vérifiant la condition initiale $(m, z(m))$ permet de prolonger z ce qui contredit sa maximalité. On en déduit que $\operatorname{dom}(z)$ est un intervalle ouvert.

2.9 Graphes des solutions

Proposition. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue localement lipschitzienne en la seconde variable. Les graphes $\{(t, y(t))\}$ des solutions maximales y de l'équation différentielle $y' = g(t, y)$ partitionnent U.*

Démonstration. L'unicité des solutions maximales montre que leurs graphes sont d'intersection vide. Leur existence garantie quant à elle que chaque condition initiale de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ soit atteinte. □

Rappelons que, dans le cas des équations différentielles réelles d'ordre un, on peut facilement tracer le graphe dans le plan (les courbes intégrales) d'une fonction solution maximale, en suivant le champ de vecteurs associé à l'équation.

Exercice. *Partitionner le plan en solutions maximales de $y' = y$. Puis $y' = y + x$. Puis $y' = \sqrt{y}$.*

Proposition. *Soit une équation différentielle pour laquelle le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si la limite d'une solution maximale en une borne finie de son domaine de définition existe, cette limite n'est pas dans U.*

Démonstration. Si la solution maximal $y :]a, b[$ admet une limite finie en a, on peut la prolonger par continuité sur $[a, b[$. Toujours par continuité, la dérivée de cette nouvelle fonction satisfait la même équation différentielle que y ; cette dernière n'est donc pas maximale. □

Remarquons que, lorsque y' est bornée au voisinage de a, alors y admet nécessairement une limite en a. En effet, pour toute suite (x_k) de limite a, par le théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} |y(x_k) - y(x_\ell)| &= \left| y'(c) \cdot (x_k - x_\ell) \right| \\ &\leqslant \gamma \, |x_k - x_\ell| \end{aligned}$$

et la suite $y(x_k)$ est ainsi de Cauchy puisque (x_k) l'est. En particulier, lorsque $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et que y' est bornée on aura nécessairement $\mathrm{dom}(y) = \mathbb{R}$.

2.10 Exercices

Exercice. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) - \int_0^t u f(u) du = 1.$$

Exercice. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t)^{1/3}.$$

Exercice. *Considérons l'équation différentielle $y^2 + y'^2 = 1$.*

Montrer que, sur un voisinage de zéro, elle admet exactement deux solutions y de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $y(0) = 0$. Montrer le même résultat pour $y(0) = 1/2$.

Montrer qu'aux bornes de son intervalle de définition toute fonction solution $\mathscr{C}^1$ tend vers ± 1. Quels sont les prolongements alors possibles ?

Caractériser les solutions $\mathscr{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}$.

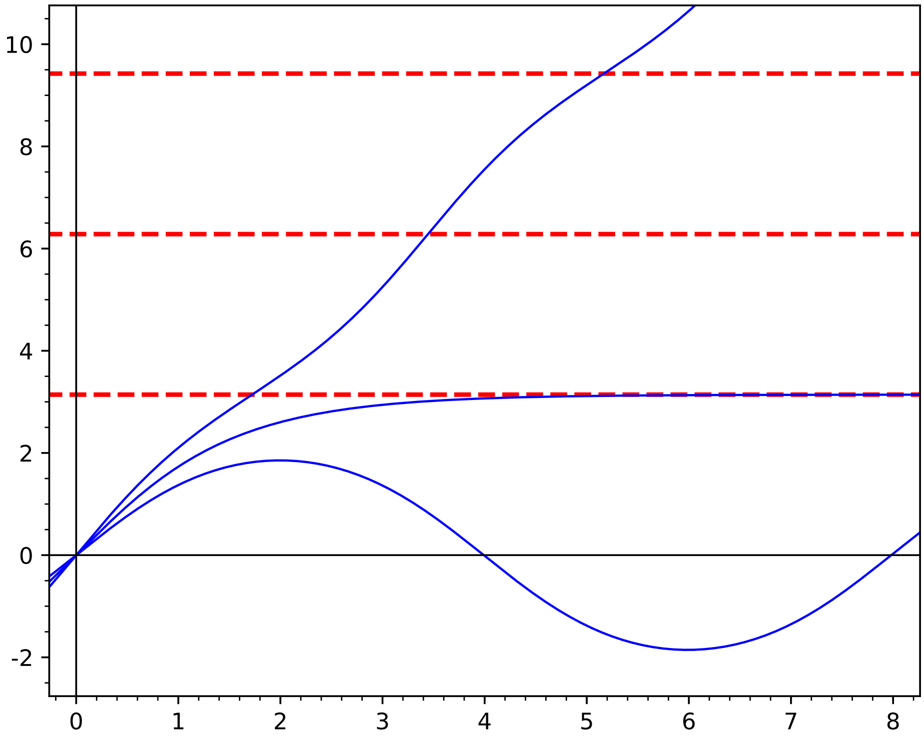

FIGURE 2.1 – Solutions de l'équation différentielle $x'' = -\sin(x)$ présentant chacune l'un des trois comportements asymptotiques possibles. En rouge, les constantes π, 2π et 3π.

Exercice. *Tracer les graphes des solutions de l'équation différentielle* $y' = \sin(y)$.

On pourra traiter au premier abord le cas des conditions initiales $y(0) = \alpha \in]0, \pi[$.

Exercice. *Établir l'existence d'une unique fonction réelle maximale* y *vérifiant* $y' = 1 + x^2 y^2$ *et s'annulant en zéro. Utiliser l'égalité*

$$\frac{1}{y(1)} - \frac{1}{y(x)} = \int_1^x \frac{y'}{y^2}$$

afin de montrer que son intervalle de définition n'est pas $\mathbb{R}$ *entier. En déduire qu'il est de la forme* $]-\alpha, \alpha[$ *et voir que y* y *est impaire.*

Dessiner l'allure de y.

Exercice. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on note* x_α *la solution maximale du problème différentiel* $x'' = -\sin x$ *avec les conditions initiales* $x(0) = 0$ *et* $x'(0) = \alpha$*. Quel est son ensemble de définition ?*

Montrer que la quantité $x_\alpha'^2/2 - \cos x_\alpha$ *est constante ; en déduire le comportement asymptotique de* x_α *et en esquisser le graphe. Voir la figure 2.1.*

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires

Au delà du théorème de Cauchy–Lipschitz, on ne sait dire que peu de choses sur les solutions des équations différentielles générales. En revanche, on dispose de résultats plus poussés dans le cas des équations différentielles linéaires.

3.1 Généralités

Définition. *Une équation différentielle $y^{(n)} = f(t, (y, y', \dots, y^{n-1}))$ est dite linéaire si la fonction f est affine en la seconde variable, c'est-à-dire s'il existe des fonctions a_i et b telles qu'elle s'écrive*

$$y^{(n)}(t) = b(t) + a_0(t)y(t) + a_1(t)y'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t).$$

Les fonctions a_i sont appelés coefficients et b le second membre. Lorsque $b = 0$ on dit que l'équation est homogène ou encore sans second membre.

Le cas homogène est donc celui où la fonction f est linéaire en la seconde variable ; cette discordance des terminologies algébriques et analytiques est regrettable et on prendra soin de ne pas se laisser porter à confusion.

Exercice. *Déterminer si les équations différentielles ci-dessous sont linéaire et, lorsque c'est le cas, si elles sont homogènes et si leurs coefficients sont constants.*

- $y'' + y = 1$
- $y''y = 1$
- $e^{y'} = y$
- $e^x = y$
- $e^x y' = y$
- $e^x + y' = y$

Le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique très aisément dans le cas linéaire.

Lemme. *Soit une équation différentielle linéaire dont les coefficients et le second membre sont continus sur un ouvert D. Cette équation vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz sur le domaine $U = D \times \mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Si ses fonctions a_i et b sont continues, la fonction $f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) = b + a_0y_0 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1}$ l'est bien évidemment aussi. En tout point de D, chaque a_i et b admet un voisinage sur lequel il est borné ; sur l'intersection de ses voisinages, il existe donc $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t, y) - f(t, z)| \leqslant \gamma \|y - z\|$. □

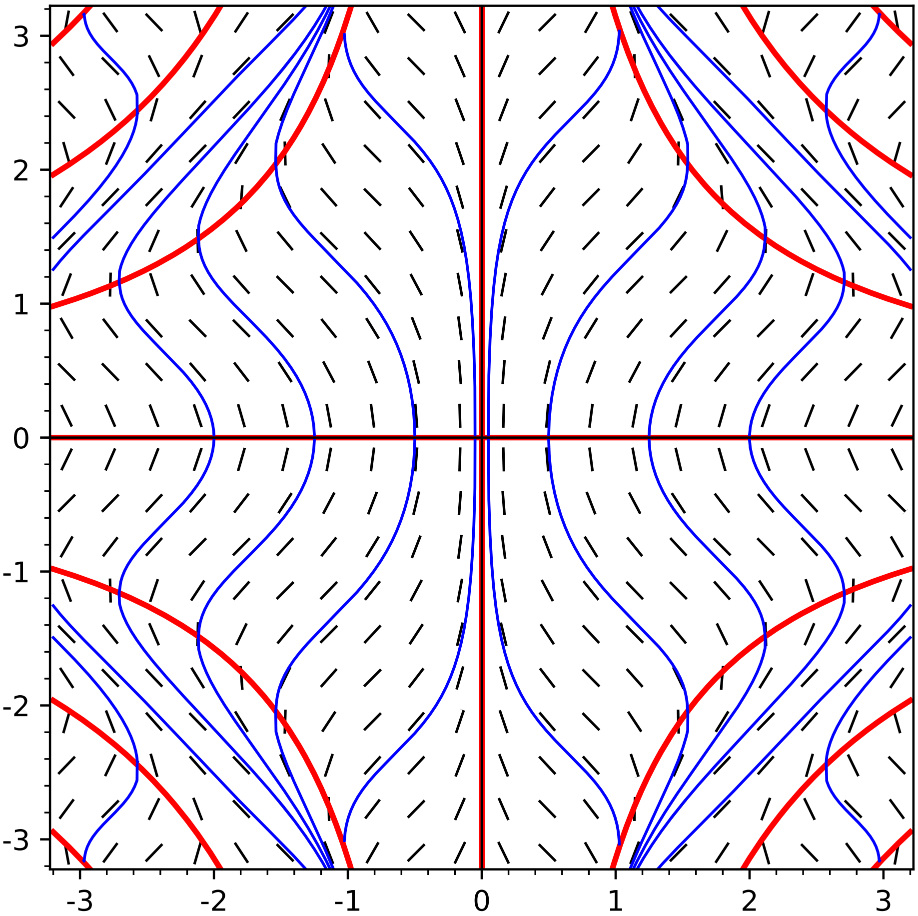

FIGURE 3.1 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{\sin(xy)}$. En rouge, le complémentaire du domaine où Cauchy–Lipschitz s'applique.

Exercice. *Pour chacune des équations ci-dessous, déterminer le plus grand domaine U sur lequel le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique.*

— $y' = |x|y - e^x$
— $x^2 y' = xy + 1$
— $y^{(2)} = \frac{1}{\cos(x)} y' + \frac{1}{\sin(x)} y + x$
— $y' \sin(xy) = 1$

Consulter la figure 3.1.

Concluons en montrant que le domaine de définition des solutions maximales est prévisible.

Proposition. *Si les coefficients et le second membre d'une équation différentielle linéaire sont continus sur un intervalle ouvert I, alors ses solutions maximales sont définies sur I entier.*

Remarquons que le cas des équations différentielles linéaires d'ordre un a déjà été traité. En effet, nous avons vu au premier chapitre que $y' = ay + b$ implique

$$y(x) = e^{\int_\alpha^x a(u)du} \left(\lambda + \int_\alpha^x e^{-\int_\alpha^t a(u)du} b(t) dt \right).$$

Les fonctions a et b sont continues donc intégrables sur I et la solution $y(x)$ est donc définie sur cet intervalle tout entier.

Démonstration. Soient b et a_k des fonctions de classe $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et soit y une solution maximale de l'équation différentielle linéaire $y^{(n)} = b + a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}$ avec $n \geqslant 2$. On a donc $Y' = AY + B$ pour

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

La norme satisfait

$$\begin{aligned} \|Y\|'(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|Y(t+\varepsilon)\| - \|Y(t)\|}{\varepsilon} \\ &\leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|Y(t+\varepsilon) - Y(t)\|}{\varepsilon} \quad = \|Y'(t)\| \end{aligned}$$

et l'on obtient ainsi $\|Y\|' \leqslant \|AY + B\|$. Supposons que le domaine de y admette une borne $\alpha \in I$ et plaçons nous sur un voisinage de α. Puisque A et B sont continues elles sont localement bornées ce qui implique $\|Y\|' \leqslant a\|Y\| + b$. Le lemme de Gronwall donne alors une borne sur $\|Y\|$ qui elle-même induit une borne sur $|y'|$. Pour toute suite (x_k) de limite α, par le théorème des accroissements finis, on a $|y(x_k) - y(x_\ell)| = |y'(c) \cdot (x_k - x_\ell)| \leqslant \gamma\, |x_k - x_\ell|$ et la suite $y(x_k)$ est ainsi de Cauchy puisque (x_k) l'est. Ainsi y admet une limite en α ce qui est impossible puisque Cauchy–Lipschitz s'applique sur $\alpha \times \mathbb{R}^n$. □

3.2 Espaces solutions

Proposition. *Soit une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n dont les coefficients sont continus sur un intervalle I. L'ensemble des fonctions solutions maximales est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.*

Démonstration. La somme de deux solutions est bien évidemment toujours solution, tout autant que le produit d'une solution par un scalaire réel ; l'ensemble des solutions forme donc un sous-espace vectoriel. Pour en déterminer la dimension, on en construit une base : pour chaque $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, le théorème de Cauchy–Lipschitz donne une fonction solution satisfaisant la condition initiale $y^{(i)}(\alpha) = \delta_{i=j}$ pour tout i ; ces solutions forment une famille libre et, par l'unicité de Cauchy–Lipschitz, génératrice. □

Exercice. *Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes :*
— $y'' + y = 0$
— $y^{(4)} = y$

Proposition. *Soit (E) une équation linéaire et (H) l'équation homogène associée, soit :*

$$\begin{aligned} (E) \quad y^{(n)} &= b + a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} \\ (H) \quad y^{(n)} &= \phantom{b + {}} a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Alors, l'ensemble $S_{(E)}$ des solutions de (E) est un espace affine de direction $S_{(H)}$. Autrement dit, pour tout $z \in S_{(E)}$, on a

$$S_{(E)} = \left\{ z + w : w \in S_{(H)} \right\}.$$

Démonstration. Immédiate par linéarité de l'équation et de la dérivation. □

Exercice. *Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = x$. Même question pour $y^{(4)} + x^5 = 120x + y$.*

3.3 Exponentielle de matrices

Rappelons pour commencer que toute équation différentielle $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ peut se ramener à un système d'équations différentielles d'ordre un :

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \quad \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f(t, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Lorsque l'équation différentielle est linéaire, c'est-à-dire lorsque la fonction f s'écrit $f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = b(t) + a_0(t)y_0 + a_1(t)y_1 + \cdots + a_{n-1}(t)y_{n-1}$, le système ci-dessus admet la forme matricielle :

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \qquad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Toute équation différentielle linéaire d'ordre n équivaut donc à une équation différentielle de la forme $Y' = AY + B$ où les variables A, B et l'inconnue Y dénotent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans respectivement $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$.

Abordons premièrement le cas où la matrice A est constante et le vecteur B nul.

Théorème. *Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Les fonctions $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $Y' = AY$ sont exactement celles de la forme*

$$t \longmapsto \exp(tA)\lambda$$

lorsque λ parcours $\mathbb{R}^n$.

Empressons nous de définir cette notion d'exponentielle matricielle mais mettons dès maintenant le lecteur en garde contre la croyance erronée que cette généralisation présente une trop grande similitude avec sa cousine réelle.

Définition. *Soit A une matrice carrée. La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

converge coefficient par coefficient vers une matrice que l'on note e^A.

Exercice. *Calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. De même pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice. *Montrer que si A et B commutent alors on a $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Démonstration du théorème. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $Z(t) = \exp(tA)$; la série définissant l'exponentielle converge normalement et on peut donc la dériver terme à terme pour obtenir

$$Z'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} (tA)^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k A (tA)^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (tA)^{k-1} = AZ(t);$$

on a ainsi $Z' = AZ$. Considérons maintenant les colonnes $(Y_i(t))_{i=1}^n$ de $Z(t)$. Elles forment une famille libre puisque $Z(t)$ est inversible par l'identité $e^{tA} e^{-tA} = e^{tA-tA} = e^0 = \mathrm{id}_n$; elles vérifient en outre $Y_i' = AY_i$. Les fonctions Y_i forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ de l'équation différentielle $Y' = AY$ puisque celui-ci est de dimension n. Toutes les solutions Y s'obtiennent alors comme combinaison linéaire des Y_i, c'est-à-dire comme produit de Z par un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^n$. □

On peut grâce à cette solution homogène traiter le cas d'équations avec second membre.

Proposition. *Soit A une matrice de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ et B une fonction de $\mathscr{C}^0(I \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Les solutions de l'équation différentielle $Y' = AY + B$ sont les fonctions*

$$t \longmapsto e^{tA} \left(\lambda + \int_0^t e^{-uA} B(u) du \right)$$

lorsque λ parcours $\mathbb{R}^n$.

Attention toutefois à n'appliquer ce qui précède qu'au cas où A est constante !

Remarque. *Pour $A \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))$ quelconque, la fonction $Y : t \mapsto \exp \int_0^t A(u) du$ n'est pas nécessairement solution de l'équation différentielle $Y'(t) = A(t)Y(t)$, tout simplement parce que l'égalité $e^{A+B} = e^A e^B$ n'est en général vérifiée que lorsque les matrices A et B commutent.*

3.4 Cas homogène à coefficients constants

Soit $y^{(n)}(t) = a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t)$ une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants que nous écrivons sous forme matricielle $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, son espace vectoriel solution est celui des fonctions $t \mapsto e^{tA}\lambda$ lorsque λ parcours $\mathbb{R}^n$. Afin d'expliciter davantage cet ensemble, nous allons mettre en œuvre des techniques de réduction des endomorphismes.

Supposons que la matrice A admette n valeurs propres distinctes ; elle se diagonalise ainsi

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où la matrice dite *de passage* P a pour i^{e} colonne un vecteur propre associé à α_i. Alors

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel des solutions $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ de $Y' = AY$ est donc formé des fonctions

$$t \longmapsto P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\alpha_n t} \end{pmatrix} P^{-1} \lambda$$

lorsque λ parcours $\mathbb{R}^n$. Les trois matrices du membre de droite étant inversibles, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un vecteur λ pour lequel la première cordonnée de Y vaut $e^{\alpha_i t}$; ces fonctions forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions réelles y recherchées.

Lemme. *Le polynôme caractéristique de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est $u^n - a_{n-1} u^{n-1} - \cdots - a_1 u - a_0$ *; chacune de ses racines* α *admet comme vecteur propre*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}.$$

Mis bout à bout, ce qui précède donne le résultat ci-dessous dans le cas où le polynôme est scindé à racines simples ; le cas général est admis mais pourra être attaqué en exercice.

Théorème. *Soit $y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Si le polynôme $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0$ se factorise en $\prod_\alpha (u-\alpha)^{k_\alpha}$ alors l'espace vectoriel solution admet pour base la famille :*

$$\left(t \longmapsto t^\ell e^{\alpha t}\right)_{0 \leqslant \ell < k_\alpha}$$

On peut vérifier que ces fonctions sont bien solutions à l'aide du lemme ci-dessous.

Lemme. *Il existe un morphisme d'algèbre*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[u] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})) \\ a u^b \longmapsto \left(y \mapsto a y^{(b)}\right) \end{cases} .$$

En particulier, on a $\phi(P)(\phi(Q)(y)) = \phi(PQ)(y)$.

Pour les fonctions du théorème précédent, on a alors $\sum a_i u^i = (u-\alpha)Q(u)$ et donc $\sum a_i (e^{\alpha t})^{(i)} = (\alpha e^{\alpha t} - \alpha e^{\alpha t})Q(\cdots) = 0$.

Remarque. *On peut également résoudre les équations avec second membre en utilisant l'exponentielle matricielle. Mais on ne peut alors pas simplement utiliser l'inversibilité de P et de l'exponentielle matricielle pour esquiver le calcul de P. On ne donne donc pas de formule général, mais pourra traiter quelques exemples en exercice.*

Exercice. *Trouver toutes les fonctions y satisfaisant $y''' = 4y'' - 5y' + 2y + t$. Commencer par traiter l'équation homogène associée.*

3.5 Espaces solutions complexes

Un polynôme n'est pas toujours scindé sur le corps des réels. C'est cependant le cas sur $\mathbb{C}$ et les résultats précédents s'y généralisent directement. Lorsque l'on résout une équation différentielle réelle sur $\mathbb{C}$, il faut savoir isoler celles de ses solutions complexes qui sont réelles.

Lemme. *Soit $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes vérifiant une équation différentielle linéaire*

$$y^{(n)}(t) = b(t) + a_0(t)y(t) + a_1(t)y'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)$$

pour des coefficients a_i et second membre b dans $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Alors la partie réelle de y est aussi solution.

Exercice. *Résoudre l'équation différentielle $y''' = y$.*

Il est aussi utile de s'entraîner à résoudre les équations vectorielles.

Exercice. *Trouver toutes les fonctions y et z vérifiant*

$$\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + z \end{cases} .$$

En déduire les solutions de

$$\begin{cases} y' = y - z + t \\ z' = y + z \end{cases} .$$

Exercice. *Trouver toutes les fonctions x et y vérifiant*

$$\begin{cases} x'' = x + y \\ y' = x' - y \end{cases} .$$

3.6 Méthode de variation de la constante

L'appellation *variation de la constante* englobe les deux techniques classiques que voici.

Faire baisser l'ordre grâce à une solution particulière. Soit z une solution particulière d'une équation différentielle linéaire sans second membre $y^{(n)} = \sum a_i y^{(i)}$. On peut alors chercher d'autres solutions sous la forme $y = \lambda z$ où λ est une fonction inconnue ; cela donne :

$$(\lambda z)^{(n)} = \sum a_i (\lambda z)^{(i)}$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{(k)} z^{(n-k)} = \sum a_i \sum_{k=0}^{i} C_i^k \lambda^{(k)} z^{(i-k)}$$

Remarquer que le terme en λ s'annule car c'est l'équation de départ évaluée en z ; on est donc ramené à une équation différentielle en λ' d'ordre $n-1$.

Exercice. *Résoudre* $x^2 y'' = x y' - y$.

Exercice. *Résoudre* $y'' = (x+1)y' - x y$.

Trouver une solution particulière grâce aux solutions homogènes. Étant donnée une base $(z_1, \dots, z_n)$ de l'espace vectoriel des fonctions solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y^{(n)} = \sum a_i y^{(i)}$, on peut chercher une solution de l'équation avec second membre $y^{(n)} = \sum a_i y^{(i)} + b$ sous la forme $\sum \lambda_i z_i$ où les λ_i sont des fonctions inconnues. Supposant $0 = \sum \lambda_i' z_i^{(j)}$ pour tout $j \in \{0, \dots, n-2\}$, l'équation différentielle revient, après simplifications, à $b = \sum \lambda_i' z_i^{(n-1)}$; cela donne un système de n équations linéaires (pas différentielles) en les n inconnues λ_i' :

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1' z_1 + \cdots \lambda_n' z_n \\ 0 = \lambda_1' z_1' + \cdots \lambda_n' z_n' \\ 0 = \lambda_1' z_1^{(2)} + \cdots \lambda_n' z_n^{(2)} \\ \vdots \\ 0 = \lambda_1' z_1^{(n-2)} + \cdots \lambda_n' z_n^{(n-2)} \\ b = \lambda_1' z_1^{(n-1)} + \cdots \lambda_n' z_n^{(n-1)} \end{cases}$$

que l'on peut résoudre pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exercice. *Résoudre* $y'' = y + \cos(t)$.

3.7 Exercices

Exercice. *Considérons l'équation différentielle* $y y' = x$.

1. *Quel est le domaine* U *maximal sur lequel le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique ?*
2. *Montrer que la valeur absolue est une solution sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
3. *Soit* y *une solution maximale quelconque et* I *son intervalle de définition.*
   a. *Montrer que si* I *contient un nombre positif, alors* $I = \mathbb{R}$ *ou* $I =]\alpha, +\infty[$ *avec* $\alpha \geqslant 0$.
   b. *Montrer que si* I *contient un nombre négatif, alors* $I = \mathbb{R}$ *ou* $I =]-\infty, \alpha[$ *avec* $\alpha \leqslant 0$.
   c. *Lorsque que* $I \neq \mathbb{R}$, *montrer que* $\lim_\alpha y = 0$.

4. *Tracer la partition de l'espace en graphes des solutions.*
5. *Montrer que l'ensemble* $\pm\sqrt{x^2+\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *décrit toutes les solutions.*

Exercice. *Considérons l'équation différentielle* $y e^{y'} = x$.

1. *Quel est le domaine maximal sur lequel le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique ?*
2. *Montrer que si* y *est solution alors* $x \mapsto -y(-x)$ *l'est aussi.*
3. *Trouver une solution particulière* z.
4. *Soit* y *une solution maximale. Quel est son intervalle de définition ? On distinguera les cas* $y < z$ *et* $y > z$.
5. *Tracer la partition de l'espace en graphes des solutions.*

Exercice. *Déterminer les fonctions* f *pour lesquelles le problème différentiel* $y'' + y' + f y = 0$ *admet une base de solutions de la forme* (g, g^2).

Exercice. *Déterminer toutes les fonctions* y *vérifiant* $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x$ *et* $y(0)y'(0) = 1$.

Exercice. *Montrer que si* $(au^2 + bu + c) = (x - m - in)(x - m + in)$ *avec* $m, n \in \mathbb{R}$ *et* n *non nul, alors les solutions réelles de* $ay'' + by' + cy = 0$ *sont de la forme*

$$t \longmapsto (\lambda \cos(nt) + \mu \sin(nt))e^{mt}$$

Exercice. *Déterminer toutes les fonctions* y *vérifiant* $y''(x) - y'(x) + 3y(x) = 1$ *et* $y(0)y'(0) = 1$.

Exercice. *Déterminer toutes les fonctions* y *satisfaisant* $y''(t) = 2y'(t) + y(t)$.
Faire de même pour l'équation $y''(t) = 2y'(t) + y(t) + t$.
Et pour l'équation $y''(t) = 2y'(t) + y(t) + e^t$ *?*

Chapitre 4

Wronskien

Aussi appelée *déterminant wronskien* pour une raison évidente, cette quantité est un outil important en analyse, tout particulièrement pour l'étude des bases de solutions des équations différentielles linéaires homogènes.

4.1 Généralités

Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Le wronskien d'une famille $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de fonctions de classe $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction*

$$W_{(u_0,u_1,u_2,\ldots,u_n)} : t \in I \longmapsto \det \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_0' & u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Proposition. *Si la famille $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est liée, alors son wronskien est la fonction nulle.*

Démonstration. La dérivation est une application linéaire. Toute relation linéaire satisfaite par les u_i est ainsi satisfaite par leurs dérivées et donc par les colonnes de la matrice ci-dessus. □

La réciproque est fausse en général même si l'obtention d'un contre exemple est loin d'être évidente. Par ailleurs, nous verrons très bientôt que la réciproque est vraie si l'on se restreint aux familles formées de fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

Exercice. *Calculer le wronskien de la famille $(e^{\alpha t}, e^{\beta t}, e^{\gamma t})$; on remarquera que la matrice est de Wandermonde. En déduire pour quelles valeurs de α, β, γ ces fonctions sont liées.*

4.2 Propriétés

Proposition. *Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ des fonctions de classe $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{R})$ solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène d'ordre n. Quel que soit $\alpha \in I$, cette famille est liée si et seulement si son wronskien s'annule en α.*

Démonstration. Le sens direct découle de la proposition ci-dessus. Montrons le sens indirect. Si le wronskien s'annule en α, alors les vecteurs colonnes de la matrice correspondante, c'est-à-dire les conditions initiales en α des fonctions solutions u_i, sont liés. Une combinaison linéaire non triviale de ces fonctions a donc pour condition initiale le vecteur nul. Par l'unicité de Cauchy-Lipschitz, ce ne peut être que la solution identiquement nulle. $\square$

Remarquons que la nullité du wronskien en α implique que la famille est liée d'où découle, d'après la proposition ci-dessus, la nullité du wronskien sur tout son intervalle de définition.

Corollaire. *Le wronskien d'une base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est de signe constant sur tout intervalle où ces solutions sont définies.*

Démonstration. Le wronskien est le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des fonctions continues, c'est-à-dire un polynôme en des fonctions continues ; c'est donc une fonction continue et le théorème des valeurs intermédiaires s'applique. $\square$

On peut en réalité être bien plus précis que cela. Soit $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de solutions de l'équation différentielle $y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}$. Alors en explicitant le wronskien

$$W_{(u_0,u_1,\ldots,u_n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k\in\{1,\ldots,n\}} u_{\sigma(k)}^{(k)}$$

on voit que sa dérivée est la somme des déterminants

$$\begin{vmatrix} u_0' & u_1' & \cdots & u_n' \\ u_0' & u_1' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & u_1^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_0'' & u_1'' & \cdots & u_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & u_1^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_0' & u_1' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n+1)} & u_1^{(n+1)} & \cdots & u_n^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

dont tous les termes sauf le dernier sont nuls. D'après l'équation différentielle, cette quantité vaut

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_0' & u_1' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} a_k u_0^{(k)} & \sum_{k=0}^{n} a_k u_1^{(k)} & \cdots & \sum_{k=0}^{n} a_k u_n^{(k)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_0' & u_1' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n u_0^{(n)} & a_n u_1^{(n)} & \cdots & a_n u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Le wronskien satisfait donc $W_u' = a_n W_u$ soit $W_u(t) = W_u(\alpha)\exp\left(\int_\alpha^t a_n\right)$.

4.3 Applications

Soit $y'' = a_1 y' + a_0 y$ une équation différentielle d'ordre deux. Le wronskien de toute base de solution vaut $t \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^t a_1\right)$ pour une certaine constante λ.

Si f est une solution particulière de cette équation, toute fonction g telle que (f, g) est une base vérifie donc

$$W_{(f,g)} = f g' - f' g = (t \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^t a_1\right))$$

où la seconde inégalité est une équation différentielle linéaire d'ordre un en g. On peut fixer une valeur arbitraire pour λ, trouver une fonction g solution, et l'espace vectoriel de toutes les fonctions solutions est alors $\langle f, g \rangle$.

Parfois, cette approche marche mieux que la méthode de la variation de la constante.

Exemple. *On considère l'équation* $y'' = xy' + y$. *Vérifier que la fonction* $x \mapsto \exp(x^2/2)$ *est solution.*

Si (y, z) *forme une base de solutions, calculer son wronskien.*

En déduire une équation différentielle d'ordre un satisfaite par z, *puis calculer* z.

4.4 Exercices

Exercice. *Soient* (y_1, y_2) *une base de solutions de* $y'' = fy$ *pour* $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. *Montrer que leur wronskien* W *est contant. Supposant* $y_1 > 0$ *et* $y_2 > 0$ *montrer que la fonction* $z = \sqrt{2y_1y_2}$ *vérifie l'équation différentielle* $z'' + \frac{W}{z^3} = fz$.

Exercice. *Soit* (f, g) *une base de solutions de l'équation différentielle homogène* $y'' + py' + qy = 0$ *où* p *et* q *sont des fonctions continues définies sur un intervalle* I.

Montrer que les zéros de f *sont isolés et qu'ils sont entrelacés avec ceux de* g.

Exercice. *Soient* p *et* q *deux fonctions continues sur un intervalle* I *vérifiant* $p \leqslant q$. *Montrer que, si* x *et* y *sont solutions des problèmes différentiels*

$$x'' + px = 0, \qquad y'' + qy = 0,$$

alors y *s'annule entre chaque couple de zéros consécutifs de* x. *Qu'en déduit-on dans le cas* $p = q$ *?*

Supposant que p *admette un encadrement du type* $0 < m < p < M$, *montrer que deux zéros consécutifs* $\alpha < \beta$ *de* x *vérifient* $\pi/\sqrt{M} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi/\sqrt{m}$.

Exercice. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *une fonction intégrable ; on souhaite montrer que l'équation différentielle* $y'' + fy = 0$ *admet une solution non bornée.*

Considérons d'abord une solution bornée y *; montrer que sa dérivée admet zéro comme limite en l'infini. Que dire du wronskien d'une base* (y, z) *de solutions ? En déduire que les fonctions solutions ne peuvent toutes être bornées.*

Chapitre 5

Fonctions analytiques

5.1 Généralités

Rappelons brièvement les définitions et propriétés fondamentales concernant les fonctions analytiques vues au semestre précédent dans le cours portant sur les suites et les séries de fonctions.

Définition. *Soit f une fonction infiniment dérivable d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est analytique si tout point $u \in U$ admet un voisinage sur lequel la série de Taylor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-u)^k f^{(k)}(u)$$

converge uniformément vers $f(x)$.

Remarque. *Cette définition pourrait, de façon complètement équivalente, demander que la convergence soit normale. Cela découle des propriétés du rayon de convergence d'une telle série que nous ne rappellerons pas ici.*

Évidemment, tout polynôme est une fonction analytique. Plus généralement, la grande majorité des fonctions usuelles est analytique et les développements limités classiques donnent les séries entières correspondantes.

Exemple. *Les fonctions suivantes sont analytiques sur leur domaine de définition ; on rappelle ci-dessous leur développement en série entière en zéro.*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \qquad -\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Proposition. *La somme, le produit et la composition de fonctions analytiques sont analytiques.*

Théorème. *L'inverse d'une fonction analytique est analytique sur son ouvert de définition.*

Démonstration. Au voisinage de tout réel $u \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(u) \neq 0$, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(u+x)} &= \frac{1}{f(u)+(f(u+x)-f(u))}\\ &= \frac{1}{f(u)}\left(x \mapsto \frac{1}{1+x}\right)\circ\left(x \mapsto \frac{f(u+x)-f(u)}{f(u)}\right)\end{aligned}$$

□

Afin de construire explicitement une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ non analytique, on doit donc avoir recours à une approche originale. L'exercice ci-dessous est archi classique ; on gagnera à en rédiger proprement la solution.

Exercice. *Montrer que la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ admet un prolongement par continuité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer explicitement sa dérivée. Faire de même pour la dérivée seconde. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et vérifie $f^{(k)}(0) = 0$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$. En déduire qu'elle n'est limite de sa série de Taylor sur aucun voisinage de zéro.*

Exercice. *Montrer que la seule fonction analytique dont les zéros admettent un point d'accumulation est la fonction nulle.*

5.2 Solutions analytiques

Naturellement, la dérivation et l'intégration sont des morphismes de l'algèbre des fonctions analytiques vues comme leur série entière en un point. Pour simplifier les calculs, on choisit généralement zéro pour ce point.

Proposition. *Soit une fonction analytique de série entière $\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$.*
Sa dérivée est analytique de série entière $\sum_{k=1}^{\infty} k f_k x^{k-1}$.
Sa primitive est analytique de série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} f_k x^{k+1}$.

On peut chercher des solutions analytiques d'équations différentielles sous la forme de séries entières. Parfois, on peut reconnaître la fonction analytique correspondant à la série entière obtenue. Parfois, la série entière obtenue nous permet d'étudier d'éventuelles fonctions solutions.

Exemple. *Soit l'équation différentielle $y' = xy$. Une solution analytique en zéro de série entière $\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ satisfait*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k f_k x^{k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k ;$$

cette égalité peut aussi s'écrire coefficient par coefficient et revient donc au système

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ (k+1) f_{k+1} = f_{k-1} \end{cases}$$

Les solutions f admettent donc le développement en série entière

$$\begin{aligned}
& f(0)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right) \\
=& f(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}x^{2k} \\
=& f(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k \\
=& f(0)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice. *Trouver toutes les solutions analytiques de $x^2y' = y$.*
Et si l'on effectue le changement de variable $t = x - 1$?

Exercice. *Trouver l'unique solution de $y' = y^2$ vérifiant $y(0) = 1$.*

Exercice. *Résoudre l'équation différentielle $xy'' = y' - 4x^3y$. On pourra s'intéresser séparément aux solutions vérifiant $y(0) = 0$ puis $y''(0) = 0$.*

Exercice. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$ puis montrer qu'elle satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire l'identité $\frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots = \int_0^1 e^{\frac{1-t^2}{2}}\,dt$.*

5.3 Équations analytiques

Définition. *Une équation différentielle est analytique si elle s'écrit sous la forme $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ où f est une fonction analytique de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.*

On pourrait définir la notion de fonction analytique en plusieurs variables, mais, pour les objectifs modestes de ce cours, il suffira de savoir qu'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont analytiques est, elle-même, analytique.

Théorème. *Les fonctions solutions d'une équation différentielle analytique sont analytiques.*

Démonstration. Supposons que l'équation différentielle $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ est définie au voisinage de $t = 0$ et caractérisons-y toutes les solutions analytiques par leur développement en série entière :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}f_k x^{k-n} = f\left(\sum_{k=0}^{\infty}f_k x^k, \sum_{k=1}^{\infty}k f_k x^{k-1}, \ldots \sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{k!}{(k-n+1)!}f_k x^{k-n+1}\right)$$

Les fonctions analytiques étant infiniment dérivables, le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique et montre qu'il existe une unique solution pour chaque condition initiale, c'est-à-dire, pour chaque n-uplet $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ fixé. L'égalité de séries entières ci-dessus exprime alors chaque coefficient f_k pour $k \geqslant n$ en fonction des coefficients d'ordre inférieur, ce qui par récurrence définit une série entière.

Pour montrer que cette série converge sur un voisinage de zéro, il faut voir que, la fonction f y étant analytique, son rayon de convergence est non nul. Ses coefficients sont alors bornés par une puissance k^{e} et c'est donc aussi le cas des coefficients que donne la récurrence. La série obtenue a ainsi elle même un rayon de convergence non nul. □

Chapitre 6

Équations aux dérivées partielles

Les équations différentielles ordinaires ne permettent de quantifier des variations qu'en une variable. De nombreux phénomènes physiques évoluent cependant de manière indissociable dans le temps et dans l'espace ; c'est notamment le cas des équations de diffusion (chaleur, ondes) et d'écoulement (fluides).

Pour modéliser ces phénomènes, on peut développer une théorie des équations différentielles portant sur les dérivées partielles de fonctions à plusieurs variables. Contrairement au cas ordinaire, nous verrons que peu de résultats sont connus pour celles-ci.

6.1 Définition

Définition. *Une équation aux dérivées partielles est une équation du type*

$$\begin{aligned} f(\quad & x, u(x), \\ & \partial_{x_1} u(x), \partial_{x_2} u(x), \ldots, \partial_{x_k} u(x), \\ & \partial_{x_1 x_1} u(x), \partial_{x_1 x_2} u(x), \ldots, \partial_{x_1 x_k} u(x), \\ & \partial_{x_2 x_1} u(x), \partial_{x_2 x_2} u(x), \ldots, \partial_{x_2 x_k} u(x), \\ & \ldots \\ & \partial_{x_k x_1} u(x), \partial_{x_k x_2} u(x), \ldots, \partial_{x_k x_k} u(x), \\ & \partial_{x_1 x_1 x_1} u(x), \partial_{x_1 x_1 x_2} u(x), \ldots, \partial_{x_1 x_1 x_k} u(x), \\ & \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{aligned}$$

où l'inconnue u est une fonction de $\mathscr{C}^n(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Son ordre est celui de la plus grande dérivée partielle dont elle dépend.

Une telle équation est dite linéaire si la fonction f l'est à x fixé.

Exemple. *L'équation $\partial_{x^2} u(x, y, z) + \partial_{y^2} u(x, y, z) + \partial_{z^2} u(x, y, z) = 0$ est linéaire d'ordre deux.*

Exercice. *Quel est l'ordre de l'équation $(\partial_x u(x, y))^2 + (\partial_y u(x, y))^2 = 0$? Quels sont ses solutions ?*

Exercice. *Quel est l'ordre de l'équation $u(x, y) + x\partial_x u(x, y) = 0$? Quels sont ses solutions ?*

6.2 Symétrie des dérivées mixtes

Théorème. *Soit u une fonction d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si les dérivées partielles $\partial_{xy} u$ et $\partial_{yx} u$ sont définies et continues sur U, alors elles y sont égales.*

Ce théorème ce généralise naturellement aux dérivées partielles d'ordre supérieur. L'ordre de dérivation n'a donc pas d'importance ce qui permet d'éliminer la moitié des termes de l'équation dans la définition ci-dessus.

Exercice. *Soit u une fonction de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$. En supposant qu'elles soient toutes définies et continues, combien admet elle de dérivées partielles d'ordre r ?*

6.3 Existence et unicité des solutions

Le théorème de Cauchy–Lipschitz n'admet pas de généralisation aux équations aux dérivées partielles. Seul le résultat ci-dessous donne une réponse satisfaisante à la question de l'existence et unicité des solutions, mais malheureusement dans un cadre bien trop restreint.

Théorème (Cauchy–Kowalevski). *Considérons une équation aux dérivées partielles vectorielle quasi linéaire*

$$\partial_{x_1} u(x) = b(x, u(x)) + \sum_{k=2}^{n} a_k(x, u(x))\partial_{x_k} u(x)$$

d'inconnue $u : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to u(x) \in \mathbb{R}^m$. On suppose que ses coefficients sont des fonctions analytiques $a_2, \dots, a_n$ définis sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $\mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$ et que son second membre b est analytique défini sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Alors, pour toute condition initiale de la forme

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = u_0(x_2, \dots, x_n)$$

où u_0 est une fonction de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que le couple $(x, u(x))$ soit dans U pour tout $x = (0, x_2, \dots, x_n)$, il existe une unique fonction analytique solution u définie sur un ouvert contenant la condition initiale.

On peut le restreindre au cas des fonctions à valeurs réelles en posant $m = 1$.

6.4 Équations linéaires d'ordre un

De nombreuses méthodes permettent d'attaquer avec plus ou moins d'efficacité des types d'équations aux dérivées partielles plus ou moins particuliers. Nous allons ici nous pencher sur le cas des équations différentielles linéaires d'ordre un et présenter la méthode dite *des courbes caractéristiques*.

Définition. *Une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre un en deux variables est de la forme*

$$a\partial_x u + b\partial_y u = c$$

où a, b, c et u sont des fonctions de deux variables $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Définition. *On appelle courbe caractéristique d'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toute arc paramétré $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $u \circ \varphi$ est constante.*

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions dérivables. On note $\varphi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Alors la dérivée de $u \circ \varphi$ vaut

$$\partial_t\left(u(\alpha(t), \beta(t))\right) = \alpha'(t) \cdot \partial_x u(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \cdot \partial_y u(\alpha(t), \beta(t)).$$

Ainsi donc, l'arc φ est courbe caractéristique de u si et seulement si la quantité ci-dessus est nulle. Lorsque u désigne une solution inconnue d'une équation aux dérivées partielles, on peut parfois trouver des couples (α, β) explicites annulant l'expression ci-dessus. Les courbes caractéristiques ainsi exhibés apportent alors des informations sur la forme générale de toute solution u.

Exemple. *Pour $c \in \mathbb{R}$ fixé considérons l'équation $c\partial_x u + \partial_y u = 0$ dite* de transport. *Un arc paramétré dérivable $\varphi = (\alpha, \beta)$ est courbe caractéristique d'une solution u si et seulement si $\partial_t\left(u(\alpha(t), \beta(t))\right) = 0$, soit encore, si et seulement si*

$$\alpha'(t) \cdot \partial_x u(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t) \cdot \partial_y u(\alpha(t), \beta(t)) = 0.$$

D'après l'équation différentielle, cette quantité s'annule lorsque $\alpha'(t) = c$ et $\beta'(t) = 1$. Quel que soit $d \in \mathbb{R}$, l'arc paramétré $t \mapsto (ct + d, t)$ est donc une courbe caractéristique. Ainsi, toute solution u vérifie donc $u(ct + d, t) = u(d, 0)$ quel que soit d. En posant $x = ct + d$ et $y = t$ on en déduit $u(x, y) = u(x - cy, 0)$.

Ainsi, toutes les fonctions solutions u sont de la forme $v(x - cy)$ avec $v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Chacune est entièrement déterminée par sa condition initiale en $y = 0$, à savoir la fonction $u(x, 0) = v(x)$.

Exercice. *On considère l'équation aux dérivées partielles dite de Bateman–Burgers $\partial_x u + u\partial_y u = 0$. Procéder pareillement afin de montrer que toutes ses fonctions solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ sont constantes.*

Chapitre 7

Problèmes

7.1 Cauchy–Lipschitz

Exercice. *Étudier l'équation différentielle* $y' = \sin(x + y)$*.*

Exercice. *Étudier l'équation différentielle* $y' = \tan(y - x)$*. Voir la figure 7.1.*

Exercice. *On considère l'équation* $ty'' - (t+4)y' + 2y = 0$*. Déterminer ses solutions polynômiales* P *et montrer que pour chacune* $t \mapsto P(-t)\exp(t)$ *est aussi solution. Montrer que les solutions définies sur* $]0, +\infty[$ *forment un espace vectoriel dont on donnera une base. Montrer alors que les solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *entier forment elles aussi un espace vectoriel; prouver que sa dimension est strictement supérieure à deux. Pour quels vecteurs* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *existe-t-il des solutions sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $y(0) = \alpha$ *et* $y'(0) = \beta$ *?*

Exercice. *Montrer qu'il existe une unique solution maximale* y *vérifiant* $y' = y^2 - x$ *et* $y(0) = 0$*. Calculer* $y'(0)$ *et* $y''(0)$ *puis justifier que* y *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *; on note dorénavant* $]a, b[$ *son intervalle de définition. Montrer que* $y^2(x) < x$ *pour tout* $x \in]0, b[$*. En déduire que* y *est décroissante sur* $]0, b[$*. Montrer que, si* b *est fini, alors* y' *est borné; en déduire que* $b = +\infty$*. Montrer qu'il existe* $\alpha > 2$ *tel que* $y'(\alpha) > -1$*. Prouver que, pour tout* $x \geqslant \alpha$*, on a* $y(x) \leqslant -\sqrt{x-1}$*. En déduire la limite de* y *en l'infini. Faire enfin un dessin; voir la figure 7.2.*

Exercice. *On modélise l'évolution de la population* y *de thons dans le pacifique par l'équation* $y' = y - y^2 - c$ *; les trois termes du membre de droite représentent respectivement la reproduction, la quantité limitée de nourriture et la pèche. Étudier le comportement asymptotique de* y *en fonction* $c \in \mathbb{R}_+$ *et de sa valeur initiale* $y(0)$*.*

Exercice. *Soit* x *une solution maximale de* $x' = x^2(x^2 - 1)$*. Montrer que si* $x(0) < 1$ *alors elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *entier. Si* $x(0) > 1$*, montrer que* $1/x$ *est de dérivée majorée par une constante strictement négative. Conclure en réalisant un dessin le plus complet possible.*

Exercice. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^\star$ *il existe un unique réel* $W(x)$ *vérifiant* $W(x)e^{W(x)} = x$*. On admet que la fonction dite* W de Lambert *ainsi définie est* $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}_+^\star)$*. Montrer qu'elle satisfait l'équation différentielle* $y' = \frac{y}{x(1+y)}$*. Étudier cette équation et esquisser les graphes de ses solutions. Consulter la figure 7.3.*

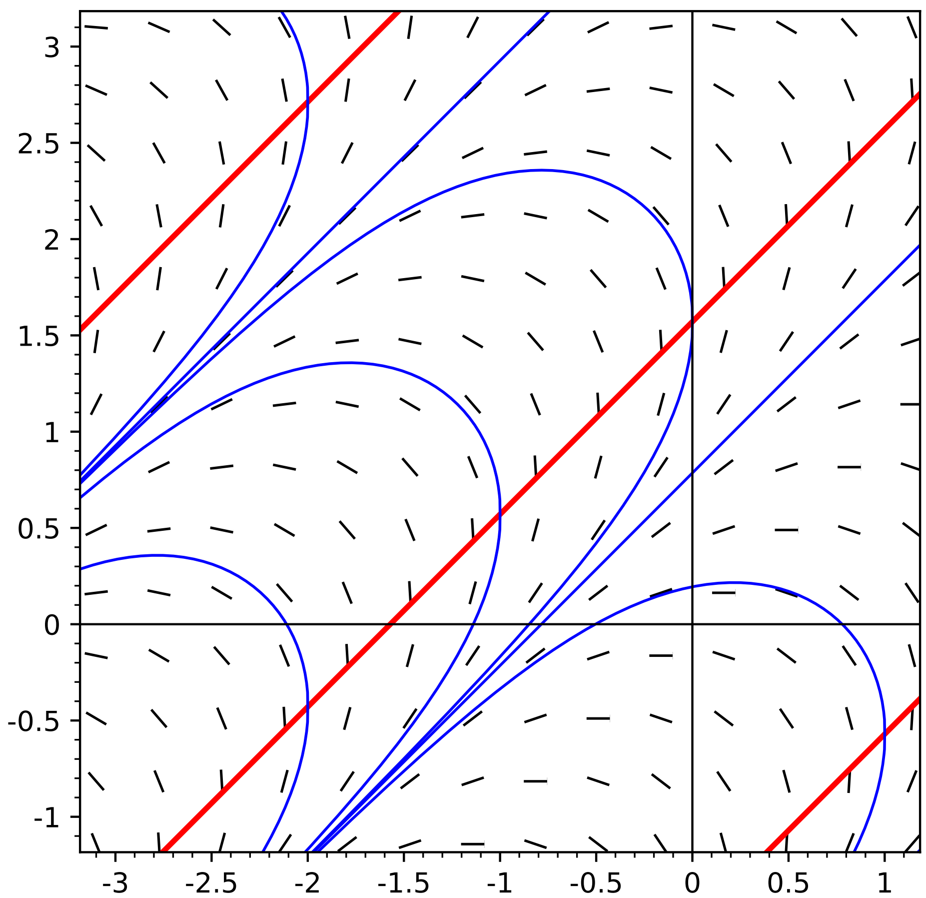

FIGURE 7.1 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = \tan(y - x)$. En rouge, le complémentaire du domaine où Cauchy–Lipschitz s'applique.

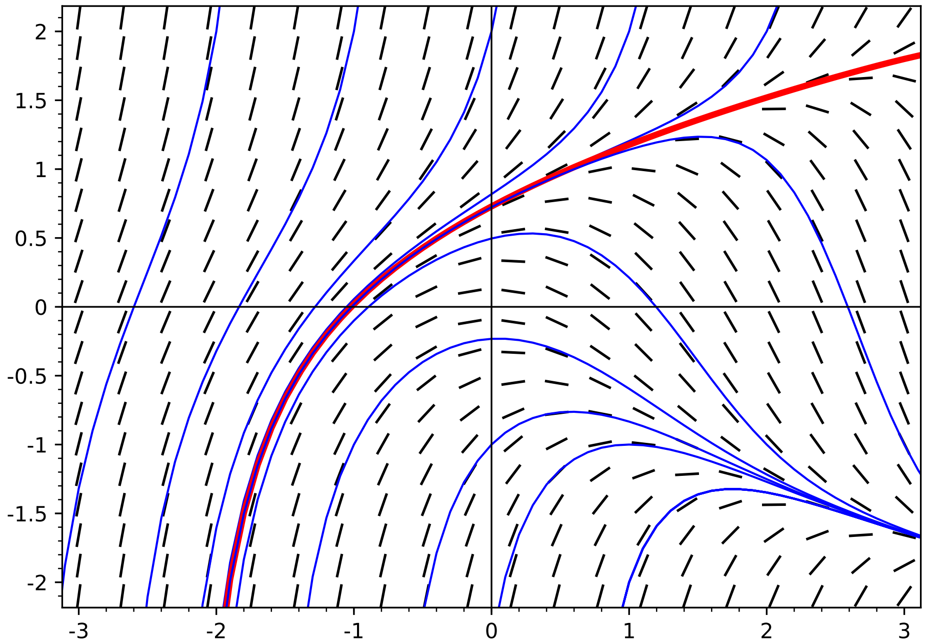

FIGURE 7.2 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = y^2 - x$. En rouge, la solution limite.

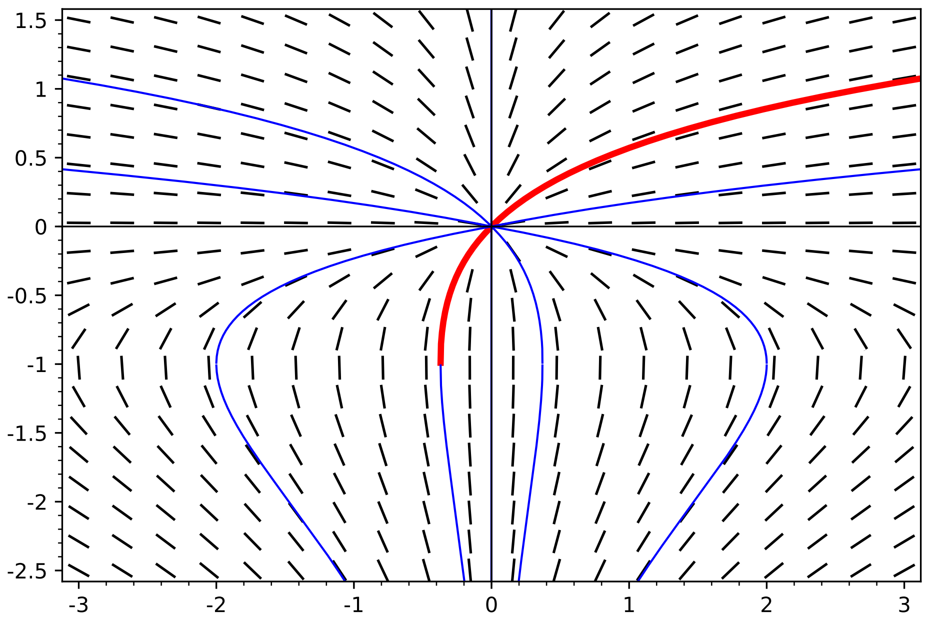

FIGURE 7.3 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{x(1+y)}$. En rouge, la fonction W de Lambert.

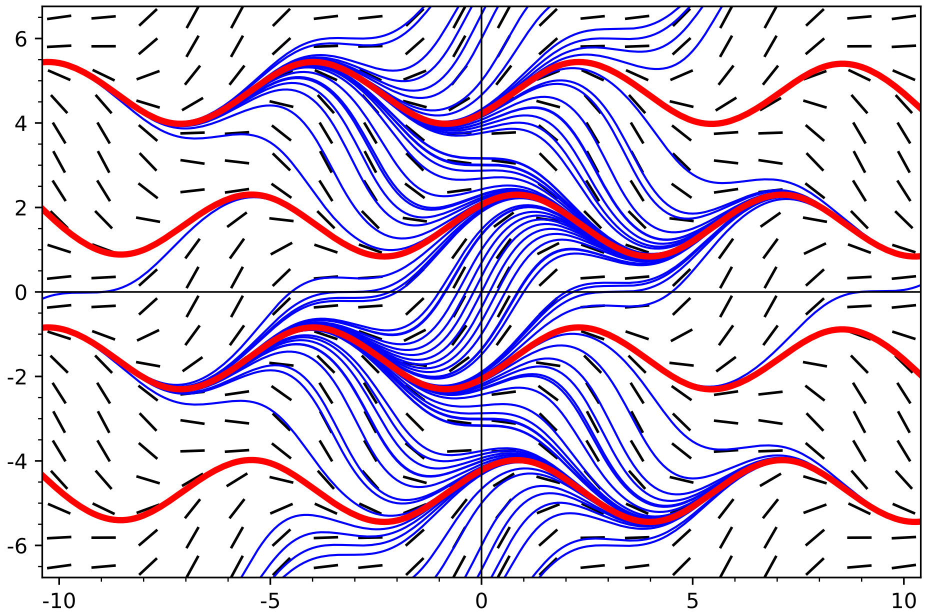

FIGURE 7.4 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = \cos(y) + \cos(x)$. En rouge, les solutions périodiques.

Exercice. *Étudier l'équation $x'' = \cos(x') + \cos(x)$. On se ramènera à un système de deux équations différentielles d'ordre un. On déterminera alors lesquelles de ses solutions constantes β sont stables, c'est-à-dire vérifient $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|X(0) - \beta\| < \eta \Rightarrow \|X - \beta\| < \varepsilon \wedge \lim_\infty X = \beta$ en considérant les valeurs propres du linéarisé en β du système.*

Exercice. *On considère l'équation $y' = \cos(y) + \cos(x)$. En déterminer toutes les symétries. Montrer que toute solution y est croissante (resp. décroissante) au voisinage de α lorsque $y(\alpha) = 0$ (resp. $y(\alpha) = \pi$) ; on pourra s'aider d'un développement limité. En déduire que toutes les solutions sont bornées et définies sur $\mathbb{R}$. Montrer enfin que cette équation admet des solutions périodiques ; on pourra pour cela voir qu'il suffit que $y(0) = y(2\pi)$. Consulter la figure 7.4.*

7.2 Calcul

Exercice. *Déterminer les solutions de l'équation différentielle $x^2(xy' - y) = y^2 - x^2$ en posant*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} .$$

Exercice. *Résoudre l'équation différentielle*

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 5y^{(3)} + 7y^{(2)} + 6y' + 2y = e^x .$$

7.3 Systèmes

Exercice. *Considérons les petites oscillations d'un pendule dans l'espace usuel.*

Notant x et y les déviations du pendule suivant les deux axes horizontaux, on a $x'' = -x$ et $y'' = -y$. Transformer ces deux équations du second ordre en quatre équations du premier ordre (à quatre variables).

Montrer que la somme des carrés de ces quatre variables est constante, c'est-à-dire que les trajectoires sont sur des sphères centrées en 0.

Montrer que les trajectoires sont des grands cercles de ces sphères.

Noter toutefois que tous les grands cercles ne sont pas des trajectoires.

Exercice. *On considère le système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} x' = x - y - (2+\rho)z \\ y' = x - y - (2+3\rho)z \\ z' = y + (3+\rho)z \end{cases} .$$

Le résoudre pour $\rho = 2$.

Le résoudre pour $\rho = 1$.

Le résoudre pour toutes les autres valeurs de ρ.

Déterminer explicitement l'unique solution vérifiant $(x, y, z)(0) = (1, 0, 0)$.

Exercice. *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y + e^t \\ y' = -x + y + t \end{cases} .$$

Exercice. *Montrer que la norme des solutions X du problème différentiel $X' = AX$ pour $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ est constante si et seulement si A est antisymétrique.*

7.4 Débrouillardise

Exercice. *Trouver toutes les applications $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,*

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Exercice. *Notons D l'opérateur de dérivation des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer qu'il y a équivalence entre :

— *les racines de P sont toutes de partie réelle strictement négative ;*

— *pour tout f, si $P(D)(f) \to_\infty 0$, alors $f \to_\infty 0$.*

Bibliographie

[1] Niels Henrik ABEL. « Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré ». *Œuvres Complètes de Niels Henrik Abel*. Édité par Peter Ludwig Mejdell SYLOW et Marius Sophus LIE. Groendahl, 1824.

[2] Vladimir ARNOLD. *Équations Différentielles Ordinaires*. Traduit du russe par Djilali EMBAREK. Collection MIR. Ellipses, 2012. ISBN : 2729873600.