Géométrie élémentaire

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

Ce cours reprend les notions de géométrie élémentaire vues au secondaire mais dans un cadre plus rigoureux et puissant utilisant notamment les outils modernes d'algèbre et d'analyse acquis pendant les deux premières années de licence.

Pour un traité complet sur le sujet, voir [1].

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout ce cours, le corps de base sera exclusivement celui des réels $\mathbb{R}$.

1.1 Définitions

Définition. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux applications, $+ : E \times E \to E$ (appellée « addition ») et $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (appelée « multiplication scalaire »), qui vérifient :*

1. $\forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \in E^3, \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)$ *(associativité)*
2. $\exists \overrightarrow{0} \in E, \forall \overrightarrow{u} \in E, \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ *(élément neutre)*
3. $\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists \overrightarrow{v} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *(élément inverse)*
4. $\forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in E^2, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ *(commutativité)*
5. $\forall \overrightarrow{u} \in E, 1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
6. $\forall \left(\lambda, \mu, \overrightarrow{u}\right) \in \mathbb{R}^2 \times E, \lambda \cdot \left(\mu \cdot \overrightarrow{u}\right) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u}$
7. $\forall \left(\lambda, \mu, \overrightarrow{u}\right) \in \mathbb{R}^2 \times E, (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$
8. $\forall \left(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{R} \times E^2, \lambda \cdot \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

Parmi les exemples classiques, on pourra notamment penser au plan usuel $\mathbb{R}^2$, à l'espace usuel $\mathbb{R}^3$, mais aussi à l'ensemble des nombres complexes, l'ensemble des matrices de taille $n \times m$, ou encore à l'ensemble des fonctions continues $\mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.

Corollaire. *On a $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*

Les éléments de E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ les scalaires. Intuitivement, on peut ajouter des vecteurs (par l'application $+$) et les étirer suivant les scalaires (par l'application $\cdot$). Les sommes de vecteurs étirés jouent donc un rôle central.

Définition. *Soit $(\overrightarrow{u_i}) \in E^k$ une famille de vecteurs.*
On appelle combinaison linéaire des $\overrightarrow{u_i}$ tout vecteur de la forme $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{u_i}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^k$.
Leur ensemble forme le sous espace vectoriel engendré par les $\overrightarrow{u_i}$ que l'on note $\langle\overrightarrow{u_i}\rangle_{i=1}^k$.
On dit que cette famille est :
— *génératrice si $\langle\overrightarrow{u_i}\rangle_{i=1}^k = E$.*
— *libre si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$ implique $\lambda = \overrightarrow{0}$.*
— *une base si elle est à la fois libre et génératrice.*

Théorème (dit « de la base incomplète »). *Si L est une famille libre et G une famille génératrice d'un espace E, il existe une base de E contenant L et contenue dans $L \cup G$.*

Proposition. *Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension et noté* $\dim(E)$.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est évidemment de dimension n ; il admet la base dite canonique :

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Corollaire. *Un espace vectoriel E est de dimension n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$: une base $(\overrightarrow{u_i})_{i\in\{1,\dots,n\}}$ de E étant choisie, on a l'isomorphisme*

$$(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}.$$

1.2 Produit scalaire

Ce cours traite exclusivement du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ ainsi que de la norme induite. Vous en verrez d'autres l'an prochain.

Définition. *On muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:*
- *du produit scalaire $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$;*
- *de la norme $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$;*

On dit alors :
- *que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.*
- *que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.*

Ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes.

Proposition. *Pour tout $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit scalaire vérifie :*
- $\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right\rangle = \overline{\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \right\rangle}$ (symétrie)
- $\left\langle \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = \lambda\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle$ (linéarité)
- $\overrightarrow{u} \neq 0 \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \right\rangle > 0$ (définie positivité)

Et la norme vérifie :
- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{u}\|$ (homogénéité)
- $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = 0$ (séparation)
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ (inégalité triangulaire)

Théorème (Cauchy–Schwarz). *Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$ on a $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$ avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

Ce résultat est en fait très général et s'applique à tout espace muni d'un produit scalaire. Dans le cas particulier des espaces $\mathbb{R}^n$ on peut exprimer (voire même définir) l'angle formé par deux vecteurs comme « défaut d'égalité ».

Théorème (dit « de l'angle »). *On a $\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right\rangle = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.*

Exercice. *Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soient $\overrightarrow{u} = (0, 2, \sqrt{5})$ et $\overrightarrow{v} = (2, 0, -\sqrt{5})$. Déterminer les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels le vecteur $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$ est unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{u}$.*

Exercice. *Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soient $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 3, -2)$. Calculer l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Considérons à présent les bases adaptées à la notion de produit scalaire.

Lemme. *Toute famille de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux est libre.*

Démonstration. Soit $0 = \sum \lambda_i \overrightarrow{u_i}$ une combinaison linéaire nulle de tels vecteurs. En prenant le produit scalaire avec $\overrightarrow{u_1}$ on trouve $0 = \sum \lambda_i \left\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_i} \right\rangle$ soit encore $0 = \lambda_1 \left\| \overrightarrow{u_1} \right\|^2$ et, comme $\overrightarrow{u_1} \neq \overrightarrow{0}$ on a $\lambda_1 = 0$. □

Pour simplifier ce genre d'expressions, il est opportun de considérer des vecteurs unitaires.

Définition. *On dit qu'une famille $\left(\overrightarrow{u_i}\right)$ est orthonormée lorsqu'elle vérifie*

$$\left\langle \overrightarrow{u_k}, \overrightarrow{u_\ell} \right\rangle = \begin{cases} 1 & si\ k = \ell \\ 0 & si\ k \neq \ell \end{cases}.$$

La décomposition de tout vecteur $\overrightarrow{w}$ dans une base orthonormée $(\overrightarrow{u_i})$ est transparente :

$$\overrightarrow{w} = \sum_i \left\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u_i} \right\rangle \overrightarrow{u_i}$$

On peut facilement déduire une base orthonormée d'une base arbitraire.

Algorithme (procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt).

Entrée : *Une base $(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_n})$.*
Sortie : *Une base orthonormée.*

1. *Pour k de 1 à n :*
2. *Calculer $\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{b_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \overrightarrow{b_k}, \overrightarrow{c_i} \right\rangle \overrightarrow{c_i}$.*
3. *Calculer $c_k = \frac{\overrightarrow{a_k}}{\|\overrightarrow{a_k}\|}$.*
4. *Renvoyer $(\overrightarrow{c_1}, \ldots, \overrightarrow{c_k})$.*

L'étape 2 rend le nouveau vecteur orthogonal aux précédents, il est ensuite normalisé à l'étape suivante. Noter que ce procédé préserve le sous espace vectoriel engendré dans le sens où, pour tout k, on a $\langle b_i \rangle_{i=1}^k = \langle c_i \rangle_{i=1}^k$.

Exercice. *Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs (x, y, z) vérifiant tous $xyz = 1$. Lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt.*

1.3 Produits mixte et vectoriel

Le cours d'algèbre linéaire a introduit la notion de déterminant comme un volume ; nous allons maintenant reprendre cette notion avec une terminologie purement géométrique.

Définition. *On appelle produit mixte d'une famille $\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ la quantité*

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right] = \det\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$$

où les coordonnées des vecteurs sont écrites dans la base canonique ou, de manière équivalente, dans toute base orthonormée directe.

Exemple. *Lorsque $n = 2$ on a* $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Évidemment, les propriétés vues en cours d'algèbre linéaire sont toujours à connaître, en premier lieu que le produit mixte s'annule si et seulement si la famille est liée.

Définition. *Lorsque* $\left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right]$ *est strictement positif (resp. négatif), on dit que la base* $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ *est directe (resp. indirecte).*

Introduisons à présent le produit vectoriel (bien connu dans $\mathbb{R}^3$) dans toute sa généralité.

Définition. *On appelle produit vectoriel d'une famille* $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right)$ *de n vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ l'unique vecteur noté $\overrightarrow{u_1} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{u_n}$ vérifiant, pour tout $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{w}\right] = \left\langle \overrightarrow{u_1} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{w} \right\rangle.$$

Démonstration. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur satisfaisant cette condition et décomposons le dans la base canonique $(\overrightarrow{e_i})_{i=1}^{n+1}$; ses coordonnées $(v_i)_{i=1}^{n+1}$ vérifient $v_i = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_i} \rangle = \left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{e_i}\right]$ ce qui démontre l'unicité du produit vectoriel. Inversement, vérifions que vecteur $(v_i = \left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{e_i}\right])_{i=1}^{n+1}$ satisfait la condition : pour tout vecteur $\overrightarrow{w} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$ on a bien

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{e_i}\right] w_i = \left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{w}\right]$$

cette dernière égalité s'obtenant par multilinéarité du déterminant. □

Le produit vectoriel peut donc s'obtenir en évaluant des déterminants mineurs ; de cela découle, dans le cas de $\mathbb{R}^3$, la formule explicite bien connue :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on pourra aussi identifier le produit vectoriel grâce aux trois caractéristiques suivantes induites par sa définition :

— Le produit vectoriel est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$.

— Sa norme est égale à $\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right]\right|$ écrit dans le sous espace engendré par ces vecteurs.

— Son sens est tel que $\left[\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_1} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{u_n}\right]$ soit positif.

Proposition. *Comme le produit mixte, le produit vectoriel est une application multilinéaire et antisymétrique.*

Exercice. *Soit* $\overrightarrow{u} = (4, 3, 0)$. *Trouver un vecteur* $\overrightarrow{v}$ *tel que* $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = -11$ *et* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (0, 0, 3)$.

Exercice. *Soient les vecteurs* $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ *et* $\overrightarrow{v} = (-1, 0, -1)$. *Déterminer les vecteurs* $\overrightarrow{x}$ *satisfaisant l'égalité* $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$.

Exercice. *Soient les vecteurs* $\overrightarrow{u} = (0, \lambda, 3)$ *et* $\overrightarrow{v} = (0, -9, 9)$. *Déterminer en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ les vecteurs* $\overrightarrow{x}$ *pour lesquels* $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} = 12$ *et* $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Exercice. *Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$ *et* $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$. *Déterminer l'unique vecteur* $\overrightarrow{w}$ *orthogonal à* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *tel que* $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] = 1$. *Décomposer le vecteur* $(1, 1, 1)$ *dans la base* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. *Montrer que pour tout triplet* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *on a* $\left\|a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}\right\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Chapitre 2

Espaces affines

2.1 Définitions

Définition. *On appelle espace affine tout ensemble $\mathbb{A}$ muni d'un espace vectoriel sous-jacent $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ et d'une application $+ : \mathbb{A} \times \overrightarrow{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ vérifiant, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{A}^2$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \overrightarrow{\mathbb{A}}^2$:*

— $P + \overrightarrow{0} = P$

— $(P + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

— $P + \overrightarrow{u} = P \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (liberté)

— $\exists \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}, P + \overrightarrow{PQ} = Q$ (transitivité)

Les éléments de $\mathbb{A}$ s'appellent les points et ceux de $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ les vecteurs.

Intuitivement, un espace affine est un espace vectoriel dont on aurait oublié l'origine. On visualise bien les vecteurs d'un espace vectoriel comme partant de l'origine ; au contraire, dans un espace affine, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ part naturellement de P pour aller à Q mais peut aussi bien être porté par tout couple de points de la forme $(P + \overrightarrow{u}, Q + \overrightarrow{u})$. Cette notation introduit une redondance dont naît l'identité ci-dessous.

Proposition (relation de Chasles). *Quels que soient les points P, Q et R, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.*

En application, on peut caractériser certaines figures géométriques classiques.

Définition. *On dit que $PQRS$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.*

Exercice. *En utilisant la relation de Chasles, montrer que cette condition équivaut à $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ et aussi à $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR}$.*

Comme nous allons le voir, la notion de milieu peut être définie et manipulée de manière purement affine.

Définition. *On appelle milieu de AB le point $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.*

Exercice. *Montrer que $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.*

Exercice. *Montrer que les milieux des côtés de tout quadrilatère forment un parallélogramme.*

Exercice. *Montrer que, dans un triangle :*

— *la droite menée par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième.*
— *les médianes sont sécantes et que leur point d'intersection est situé aux deux tiers à partir du sommet.*

Lorsque l'espace vectoriel sous-jacent est muni d'une norme, comme c'est le cas de $\mathbb{R}^n$, un espace affine est automatiquement muni d'une distance.

Définition. *On appelle distance entre deux points P et Q la quantité $d(P,Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$.*

Proposition. *Elle vérifie, pour tout triplet $(P,Q,R) \in \mathbb{A}^3$:*
— $d(P,Q) \in \mathbb{R}_+$ (positivité)
— $d(P,Q) = d(Q,P)$ (symétrie)
— $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$ (séparation)
— $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$ (inégalité triangulaire)

On généralise souvent cette notion en exprimant la distance d'un point P à un ensemble de points R comme la quantité $\inf_{Q \in R} d(P,Q)$.

Afin de ramener l'étude d'un espace affine arbitraire au cas de $\mathbb{R}^n$, il nous faut non seulement choisir une base mais aussi fixer un point comme origine.

Définition. *On dit que $\left(O, \left(\overrightarrow{u_i}\right)\right) \in \mathbb{A} \times \overrightarrow{\mathbb{A}}^n$ est un repère de $\mathbb{A}$ si la famille $\left(\overrightarrow{u_i}\right)$ est une base de $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Les coordonnées d'un point $P \in \mathbb{A}$ dans ce repère sont les uniques scalaires $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}.$$

2.2 Barycentres

Les combinaisons linéaires jouent un rôle primordial dans l'étude des espaces vectoriels ; nous allons maintenant étudier la notion correspondante pour les espaces affines.

Définition. *On appelle barycentre d'une famille de points $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ tout point M vérifiant une égalité de la forme*

$$\lambda_1 \overrightarrow{MP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MP_2} \cdots + \lambda_k \overrightarrow{MP_k} = \overrightarrow{0}$$

pour des coefficients $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^k$ de somme non nulle.

Remarquons que, pour des coefficients $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^k$ fixés, il existe un unique point M vérifiant cette égalité. Par la relation de Chasles, on peut en effet l'écrire sous la forme équivalente

$$\lambda_1 \left(\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_1P_1}\right) + \lambda_2 \left(\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}\right) \cdots + \lambda_k \left(\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{P_1P_k}\right) = \overrightarrow{0}$$

soit encore

$$M = P_1 - \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \left(\lambda_2 \overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{P_1P_k}\right).$$

Proposition. *L'ensemble des barycentres d'une famille est exactement le plus petit sous espace affine qui la contient.*

Démonstration. Évidente vue l'égalité ci-dessus. □

Les sous-espaces affines engendrés par deux points distincts sont bien connus.

Définition. *On appelle droite* (PQ) *l'ensemble de points* $\left\{P + \lambda\overrightarrow{PQ} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Un vecteur $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ *est dit directeur d'une droite* D *si* $D + \overrightarrow{v} = D$.

Proposition. *Soit* $\overrightarrow{v}$ *est un vecteur directeur de* D. *Un vecteur* $\overrightarrow{w}$ *est lui aussi directeur de* D *si et seulement si il est colinéaire à* $\overrightarrow{v}$.

Définition. *On dit que deux droites sont parallèles (resp. perpendiculaires) si elles admettent des vecteurs directeurs colinéaires (resp. orthogonaux).*

Exercice. *Montrer que si l'intersection de deux droites est ni vide ni réduite à un point, alors ces deux droites sont confondues.*

Exercice. *Dans un espace affine, soit* I *le milieu du segment* $[PQ]$. *Démontrer que pour tout point* R *on a* $\left\langle \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{RI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{IP}\right\|^2$. *Pour* $k \in \mathbb{R}$ *donné, quel est le lieu des points* R *tels que* $\left\langle \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ} \right\rangle = k$.

2.3 Convexité

La situation est bien plus intéressante si on se restreint aux barycentres à coefficients positifs.

Définition. *Une partie* E *de* $\mathbb{A}$ *est dite convexe si elle est stable par barycentres à coefficients positifs ; c'est-à-dire que, pour toute famille finie* $\{P_1, \ldots, P_k\} \in E^k$ *et tout vecteur de coefficients* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ *il existe un point* $M \in E$ *vérifiant*

$$\lambda_1 \overrightarrow{MP_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{MP_k} = \overrightarrow{0}.$$

Évidemment, tout sous espace affine est convexe, mais on peut aussi donner d'autres exemples, notamment $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$ en dimension un, $[0, 1[^2$ et $[0, 1[\times\mathbb{R}_+$ en dimension deux ainsi que la boule unité en dimension trois.

Proposition. *Une partie* E *est convexe si et seulement si, pour tout points* P *et* Q *de* E, *le segment* $[PQ]$ *est entièrement inclus dans* E.

Démonstration. Le sens direct est évident. Le sens indirect s'obtient par récurrence sur k. □

Corollaire. *Toute intersection de convexes est convexe.*

Il est naturel de considérer les parties du plan issues du graphe d'une fonction réelle.

Définition. *Le graphe d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est l'ensemble* $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. *Son épigraphe est* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\right\} \subset \mathbb{R}^2$. *On dit que* f *est convexe si son épigraphe l'est.*

Par exemple, les fonctions suivantes sont convexes :
— $x \mapsto x$
— $x \mapsto |x|$
— $x \mapsto x^2$
— $x \mapsto e^x$

Proposition. *Une fonction* f *est convexe si et seulement si, pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in [0, 1]$ *on a*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Théorème. *Une fonction f de classe $\mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante. Ainsi, lorsque $f \in \mathscr{D}^2$ cela équivaut à la positivité de sa dérivée seconde.*

Démonstration. On peut montrer, comme étape intermédiaire, que f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de ses tangentes. □

Appliquons maintenant ces propriétés aux moyennes généralisées dont nous rappelons la définition déjà vue en cours de statistiques.

Définition. *Pour tout réel $\alpha \neq 0$, on appelle moyenne d'ordre α de la famille de réels strictement positifs $x = (x_1, \dots, x_k)$ la quantité*

$$M_\alpha(x) = \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Fixons à présent une famille x et étudions les valeurs de ces moyennes lorsque α varie.

Proposition. *La fonction $\alpha \in \mathbb{R}^* \mapsto M_\alpha(x)$ est croissante.*

Démonstration. Pour $\alpha < \beta$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ est convexe. Ainsi, en l'évaluant sur la famille $(x_1^\alpha, \dots, x_k^\alpha)$, on trouve

$$\left(\frac{1}{k}\left(x_1^\alpha + \cdots + x_k^\alpha\right)\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \frac{1}{k}\left(x_1^\beta + \cdots + x_k^\beta\right)$$

d'où l'on déduit aisément $M_\alpha(x) \leq M_\beta(x)$. □

Proposition. *Les moyennes généralisées admettent les limites remarquables suivantes :*

$$\lim_{\alpha\to-\infty} M_\alpha(x) = \min\{x_1, \dots, x_k\}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} M_\alpha(x) = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} x_i}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} M_\alpha(x) = \max\{x_1, \dots, x_k\}$$

2.4 Transformations

Toute fonction préservant la structure d'espace affine se doit naturellement de préserver la structure d'espace vectoriel sous-jacente.

Définition. *On appelle application affine toute fonction sur les points qui induit une application linéaire sur les vecteurs. En d'autres termes, $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est affine si et seulement si $\overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ est bien définie et est linéaire.*

Corollaire. *Soient (O, B) un repère de $\mathbb{A}$ et (R, C) un repère de $\mathbb{B}$. Toute application affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ peut s'écrire sous la forme*

$$X \longmapsto Y = L(X + M) + N$$

où X dénote les coordonnées de $P \in \mathbb{A}$ et Y celles de $f(P) \in \mathbb{B}$, avec L une matrice et M et N des vecteurs.

Dans le cas où $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ cela peut se simplifier en $Y = LX + M'$; aussi on pourra entendre dire, par abus de langage, qu'une application affine n'est autre que la composée d'une translation et d'une application linéaire.

Définition. *On dit qu'une application affine f est une symétrie si elle vérifie $f \circ f = \mathrm{id}$.*
On dit qu'une application affine f est une projection si elle vérifie $f \circ f = f$.

En dimension finie, on peut montrer qu'elles sont toutes de la forme suivante.

Définition. *Soit E un sous espace affine et F un supplémentaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. On appelle projection d'un point P sur E suivant F l'unique point $\pi_E^F(P)$ de E tel que $\overrightarrow{P\pi_E^F(P)} \in F$. La symétrie associée est $\sigma_E^F(P) = P + 2\overrightarrow{P\pi_E^F(P)}$.*

Lorsque l'on dispose d'un produit scalaire, par exemple dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir des projections et symétries respectant cette structure.

Définition. *On appelle projection orthogonale sur un sous espace affine E l'application $\pi_E^\perp = \pi_E^F$ où F dénote le sous espace vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{\mathbb{A}}$:*

$$F = \overrightarrow{E}^\perp = \left\{\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathbb{A}} : \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}, \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right\rangle = 0\right\}$$

Le point $\pi_E^\perp(P)$ est celui de E qui est le plus proche de P.
Si D est une droite dont $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur et P un point, alors on a

$$\pi_D^\perp(Q) = P + \frac{\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \right\rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}.$$

2.5 Isométries

Soit $\mathbb{A}$ un espace affine muni d'un produit scalaire.

Définition. *On dit qu'une application $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une :*
— *isométrie lorsqu'elle préserve les distances ;*
— *similitude lorsqu'elle préserve les rapports de distance.*

Même si nous n'avons pas supposé que de telles applications étaient affines, elles le sont nécessairement.

Remarque. *Le produit scalaire est aussi préservé par les isométries du fait de l'identité $\left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$. De surcroit, les angles sont aussi préservés (grâce au théorème de l'angle).*

Proposition. *Toute isométrie ou similitude est une bijection et son application réciproque est de même nature.*

Démonstration. Montrons la bijectivité. Le second cas englobe le premier. Soit donc σ une application pour laquelle $d(\sigma(P)\sigma(Q))/d(P,Q)$ est une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$; on a donc $\|\sigma(\overrightarrow{u})\| = \lambda\|\overrightarrow{u}\|$ ou encore $\langle \sigma(\overrightarrow{u}), \sigma(\overrightarrow{v}) \rangle = \lambda^2 \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$. Une base orthonormée a donc pour image par σ une base orthogonale. La linéarité du produit scalaire nous permet alors de déduire que σ est une application linéaire. $\square$

Présentons maintenant des isométries et similitudes classiques.

Définition. *On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ l'application associant au point M le point $M+\overrightarrow{v}$. On appelle homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ l'application associant au point M le point $O+\lambda\overrightarrow{OM}$.*

C'est une isométrie lorsque $|\lambda| = 1$ et une similitude en général ; lorsque $\lambda = -1$ on a l'appelle encore la symétrie centrale de centre O.

Proposition. *La composée de deux translations est une translation.*

La composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation.

Proposition. *Toute symétrie orthogonale (aussi appelée réflexion) est une isométrie.*

Exercice. *Montrer que la composition de l'homothétie de centre O et de rapport λ avec celle de centre P et de rapport μ est :*

— *une translation lorsque $\lambda\mu = 1$ dont on déterminera le vecteur ;*

— *une homothétie lorsque $\lambda\mu \neq 1$ dont on déterminera le centre et le rapport.*

Exercice. *Montrer que la composition de la réflexion d'axe E avec celle d'axe F est une translation lorsque $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}$ dont on déterminera le vecteur.*

Chapitre 3

Géométrie plane

La plupart des notions introduites ici sont valables dans tout espace affine muni d'un produit scalaire. Nous allons toutefois nous restreindre au cas spécifique de $\mathbb{R}^2$. On notera (x, y) les coordonnées dans le repère canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

3.1 Droites du plan

Lemme. *La droite* (PQ) *a pour équation* $(x - x_P)(y_Q - y_P) = (y - y_P)(x_Q - x_P)$.

Définition. *La quantité* $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est appelée pente de la droite.*

Proposition. *Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.*

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1.

Proposition. *La droite* $ax + by + c = 0$ *admet comme vecteur directeur* $(-b, a)$ *et comme vecteur orthogonal* (a, b).

Proposition. *La distance du point* (x_0, y_0) *à la droite d'équation* $ax + by + c = 0$ *est* $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{w} = (a, b)$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de D. Si P est un point de D, la définition de la distance donne $d(Q, D) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \overrightarrow{PQ} + \lambda \overrightarrow{v} \right\|$. Sur la base orthonormée $\left(\overrightarrow{v_0} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}, \overrightarrow{w_0} = \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} \right)$ cette quantité se décompose en

$$\overrightarrow{PQ} + \lambda \overrightarrow{v} = \left\langle \overrightarrow{PQ} + \lambda \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0} \right\rangle \overrightarrow{v_0} + \left\langle \overrightarrow{PQ} + \lambda \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_0} \right\rangle \overrightarrow{w_0}$$

d'où

$$d(Q, D)^2 = \left(\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_0} \right\rangle + \lambda \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0} \right\rangle \right)^2 + \left(\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{w_0} \right\rangle + \lambda \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_0} \right\rangle}_{=0} \right)^2.$$

Pour $\lambda = \frac{-\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_0} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0} \right\rangle}$ le premier terme s'annule et le minimum vaut donc

$$d(Q, D) = \left| \left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{w_0} \right\rangle \right| = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{w} \right\rangle \right|}{\|\overrightarrow{w}\|}.$$

□

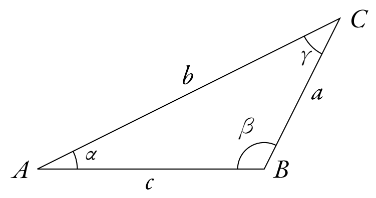

Figure 3.1 – Un triangle quelconque, ses côtés et ses angles.

Exercice. *Déterminer la distance du point* $(1,-1)$ *aux droites d'équations* $x-y=0$ *et* $2y+x=1$. *Montrer que ces deux droites sont concourantes et calculer l'angle qu'elles forment.*

3.2 Triangles

On considère maintenant le triangle (non dégénéré) ABC avec A, B et C trois points du plan non alignés. On utilisera la notation démodée $AB = d(A,B)$.

Théorème (Pythagore)**.** *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *son orthogonaux alors on a* $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Démonstration. Le calcul donne

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle$$

et on trouve le résultat voulu en développant ce produit scalaire. □

Théorème (Thalès)**.** *Soit un triangle* ABC *et deux points arbitraires* $M \in (AB)$ *et* $N \in (AC)$. *Alors les droites* (BC) *et* (MN) *sont parallèles si et seulement si on a*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Démonstration. L'homothétie de centre A et de rapport $\lambda = AM/AB$ envoie le vecteur $\overrightarrow{BC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{AB}$. □

On pose maintenant (voir la figure 3.1) :

$$a = BC \qquad b = CA \qquad c = AB$$
$$\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \qquad \beta = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \qquad \gamma = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$$

Théorème. *On a* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Théorème (loi des sinus)**.** *On a :*

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Démonstration. Par définition du sinus, on a $\sin(\alpha) = \frac{h}{c}$ et $\sin(\gamma) = \frac{h}{a}$ où h dénote la hauteur issue de B. Cela donne $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{ac}{h} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. □

Définition. *On appelle médiane de AB la droite reliant son milieu à C.*
On appelle médiatrice de AB la droite qui lui est perpendiculaire et passe en son milieu.
On appelle bissectrice de A la droite D passant par A telle que $(\overrightarrow{AB}, D) = (D, \overrightarrow{AC})$.
On appelle hauteur issue de A la droite perpendiculaire à BC et passant par A.

Théorème. *Les trois hauteurs s'intersectent en un point appelé orthocentre.*
Les trois médianes s'intersectent en un point appelé centre de gravité.
Les trois bissectrices s'intersectent en un point appelé centre du cercle inscrit noté J.
Les trois médiatrices s'intersectent en un point appelé centre du cercle circonscrit noté Ω

Définition. *Le cercle inscrit a pour centre J et est tangent aux trois côtés.*
Le cercle circonscrit a pour centre Ω et passe par les trois sommets.

On pourra démontrer ces deux derniers résultats par le calcul pur.

Exercice. *Soit le triangle de sommets $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer des équations de ses côtés, hauteurs, médianes et médiatrices.*

3.3 Coniques

Définition. *L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant $x^2 + y^2 = z^2$ est appelé cône de révolution. L'intersection d'un tel ensemble avec un plan s'appelle une conique.*

Soit $ax + by + cz + d = 0$ l'équation du plan en question, avec $(a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$. Considérons d'abord le cas $d = 0$ c'est-à-dire celui où le plan passe par l'origine :
— Lorsque $c^2 > a^2 + b^2$ c'est un point.
— Lorsque $c^2 = a^2 + b^2$ c'est une droite.
— Lorsque $c^2 < a^2 + b^2$ c'est l'union de deux droites.
Plus généralement, on qualifiera de conique « dégénérée » tout point ou union de deux droites. Tout autre conique sera dite « propre » ; c'est le cas ici pour $d \neq 0$ (voir la figure 3.2) :
— Lorsque $c^2 > a^2 + b^2$ c'est une ellipse.
— Lorsque $c^2 = a^2 + b^2$ c'est une parabole.
— Lorsque $c^2 < a^2 + b^2$ c'est une hyperbole.

Ramenons maintenant toute conique dans $\mathbb{R}^2$ en fixant arbitrairement un repère (O, x, y) du plan qui la contient. Il s'ensuit que toute conique est décrite par une équation polynômiale du second degré. Inversement, on a :

Théorème. *Toute courbe vérifiant une équation quadratique, c'est-à-dire du type*

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \overrightarrow{0}$, est une conique. Si elle n'est pas dégénérée, alors :
— *Lorsque $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ c'est une ellipse.*
— *Lorsque $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ c'est une parabole.*
— *Lorsque $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ c'est une hyperbole.*

On peut heureusement mettre ces équations sous une forme plus agréable.

Théorème (définition analytique). *Soit $\mathscr{C}$ une conique non dégénérée. Il existe des réels strictement positifs λ et μ et une base orthonormée dans laquelle $\mathscr{C}$ admet pour équation :*
— *si c'est une ellipse, $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.*

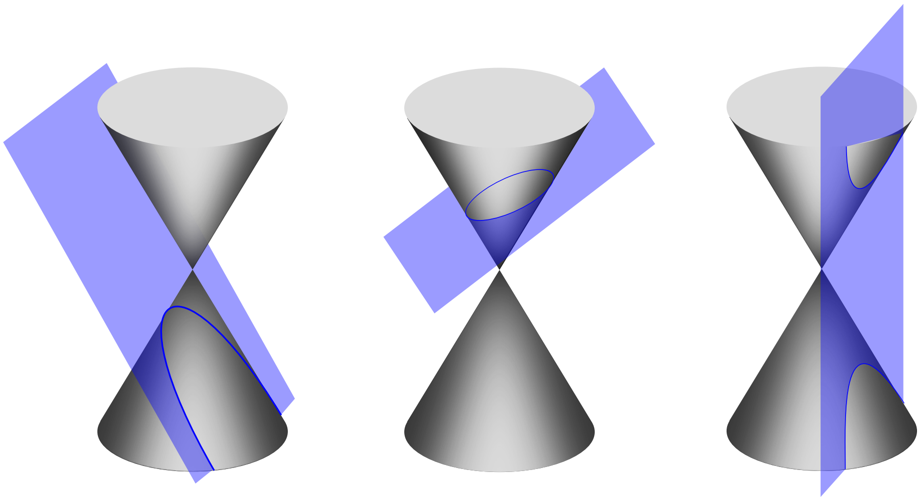

FIGURE 3.2 – Sections coniques : une parabole, une ellipse et une hyperbole.

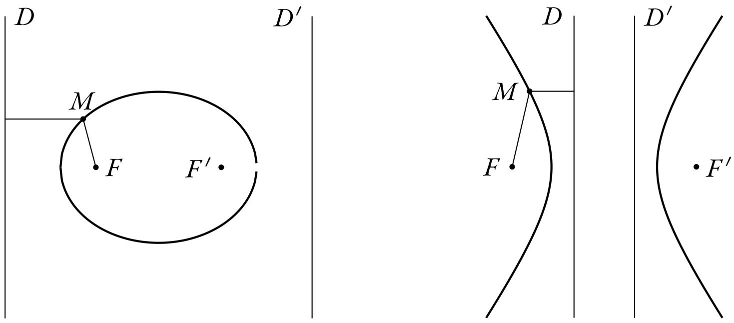

FIGURE 3.3 – Foyers et directrices d'une ellipse et d'une hyperbole.

— *si c'est une parabole,* $\lambda x^2 = y$.
— *si c'est une hyperbole,* $\lambda x^2 - \mu y^2 = 1$.

On peut encore décrire les coniques en termes purement géométriques.

Théorème (définition focale)**.** *Soit* $\mathscr{C}$ *une conique non dégénérée autre qu'un cercle. Il existe un point* F *(foyer), une droite* D *(directrice) et un réel* e *(excentricité) tels que :*

$$M \in \mathscr{C} \iff MF = eMD$$

L'excentricité est unique et vérifie $e < 1$ *pour une ellipse,* $e = 1$ *pour une parabole et* $e > 1$ *pour une hyperbole. Pour une conique donnée, seuls deux couples* (F, D) *conviennent ; ils sont confondus si c'est une parabole.*

Voir la figure 3.3 pour une illustration du résultat ci-dessus. Bien noter toutefois que le cas du cercle en est exclus ; il correspond au cas limite d'une excentricité $e \to 0$.

Théorème (définition bifocale). *Soient F et F' les deux foyers d'une conique $\mathscr{C}$. L'ensemble des points $M \in \mathscr{C}$ est caractérisé par, si c'est une ellipse,*

$$MF + MF' = \frac{1}{e} FF'$$

et, si c'est une hyperbole,

$$\left| MF - MF' \right| = \frac{1}{e} FF'.$$

Les coniques sont étudiées depuis bien longtemps pour leurs nombreuses applications notamment en physique ; voir notamment la figure 3.4 pour l'étendue des prouesses des pionniers.

Exercice. *Déterminer la nature, les foyers, les directrices et l'excentricité de la conique d'équation $x^2 + y^2 = (1 - x)^2$. Même question pour $2x^2 + y^2 = 4$.*

Exercice. *Combien de points d'intersection peuvent avoir une conique non dégénérée et une droite ? Illustrer chaque cas possible par un exemple.*

3.4 Coordonnées polaires

Le système de coordonnées cartésien n'est malheureusement pas commode à utiliser pour de nombreux problèmes, notamment ceux présentant une symétrie radiale plutôt que axiale. Dans ces cas, il pourra être pertinent d'introduire d'autres systèmes de coordonnées, notamment les coordonnées polaires.

Définition. *Le point de coordonnées polaires (ρ, θ) est celui ayant pour coordonnées cartésiennes $(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.*

Proposition. *Le point de coordonnées cartésiennes (x, y) est celui de coordonnées polaires (ρ, θ) avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$, $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$ et $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$.*

Définition. *Le point de coordonnées cartésiennes (x, y) ou encore de coordonnées polaires (ρ, θ) est celui de cordonnée complexe $x + iy = \rho e^{i\theta}$.*

Proposition. *Les transformations linéaires du plan s'écrivent ainsi en coordonnée complexe :*

- *La dilatation de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ a pour expression $z \mapsto \lambda z$.*
- *La rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ a pour expression $z \mapsto z e^{i\theta}$.*
- *La symétrie d'axe Ox a pour expression $z \mapsto \overline{z}$.*

Lemme. *Une transformation affine du plan est une similitude directe (resp. indirecte) si son écriture complexe est de la forme $z \mapsto az + b$ (resp. $a\overline{z} + b$) avec $a \in \mathbb{C}^*$.*

Exercice. *Déterminer une forme cartésienne de l'équation polaire $\rho = \cos(\theta)\cos(2\theta)$. Quelles symétries admet la courbe ainsi décrite ? La tracer.*

3.5 Isométries du plan

Dans le cas de la dimension deux on peut facilement classifier toutes les isométries.

Définition. *On appelle rotation d'angle θ et de centre O l'application $M \mapsto O + \sigma(\overrightarrow{OM})$ où l'écriture matricielle de σ dans la base canonique est :*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

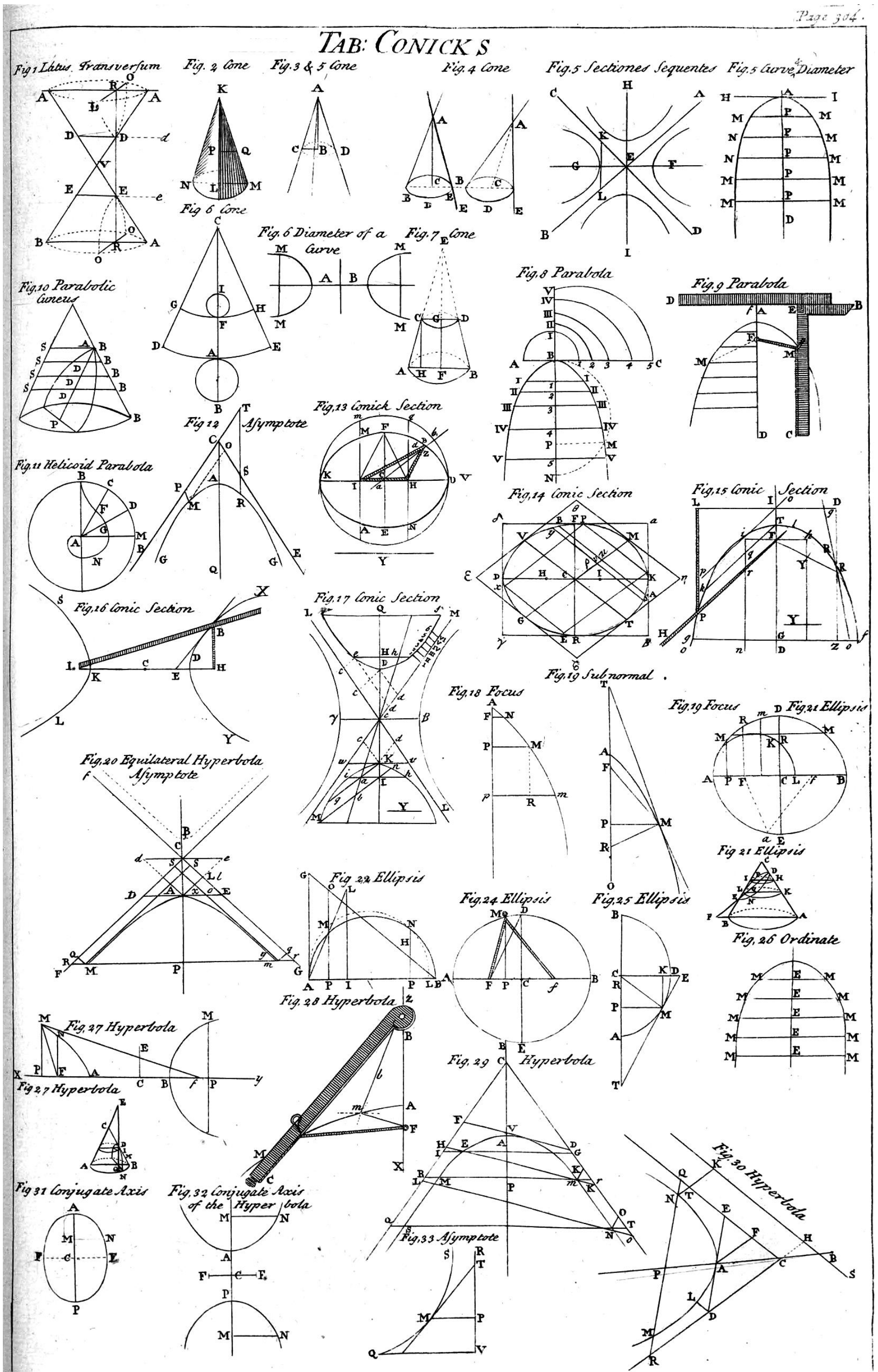

FIGURE 3.4 – Formulaire sur les coniques datant de 1728, extrait de la page 304 de [2].

Définition. *On appelle symétrie glissée la composée d'une translation et d'une réflexion d'axes colinéaires.*

Théorème. *Toute isométrie du plan est soit une translation, soit une rotation, soit une réflexion, soit une symétrie glissée.*

Démonstration. Soit $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie. Fixons un point O arbitraire et étudions l'application linéaire $\overrightarrow{\sigma} : \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{\sigma(O)\sigma(O+\overrightarrow{v})}$. Comme σ est une isométrie, $\overrightarrow{\sigma}$ est orthogonale. Ainsi :

— Si $\overrightarrow{\sigma}$ laisse stable l'espace entier, alors c'est l'identité.

— Si $\overrightarrow{\sigma}$ ne laisse stable qu'un sous espace de dimension un, alors c'est une réflexion.

— Si $\overrightarrow{\sigma}$ ne laisse stable que $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, alors c'est une rotation.

Ainsi, σ est respectivement une translation, une réflexion ou une symétrie glissée, ou une rotation. □

Corollaire. *Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois réflexions.*

Exercice. *Dans $\mathbb{R}^2$, soient s un symétrie orthogonale et r une rotation. Identifier l'isométrie $s \circ r \circ s$.*

Chapitre 4

Géométrie spatiale

4.1 Plans de l'espace

Définition. *On appelle plan affine de* $\mathbb{R}^3$ *tout ensemble de points* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *vérifiant une équation du type*

$$ax + by + cz = d$$

avec $(a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$.

On démontre facilement les propriétés élémentaires ci-dessous.

Proposition. *Le plan d'équation* $ax + by + cz = d$ *admet* (a, b, c) *comme vecteur orthogonal.*

Deux plans $ax + by + cz = d$ *et* $a'x + b'y + c'z = d$ *sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs orthogonaux* (a, b, c) *et* (a', b', c') *sont colinéaires. Si ce n'est pas le cas, leur intersection est une droite ; elle admet notamment* $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$ *comme vecteur directeur.*

On peut démontrer, de façon parfaitement analogue au cas de la dimension deux :

Proposition. *La distance du point* (x_0, y_0, z_0) *à la droite d'équation* $ax + by + cz = d$ *est* $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Proposition. *Si A, B et C sont trois points de l'espace, alors la distance de A à* (BC) *est* $\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$.

Proposition. *Soient P un point,* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur et* $k \in \mathbb{R}$. *Le lieu du point X tel que* $\left\langle \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{u} \right\rangle = k$ *est le plan perpendiculaire à* $\overrightarrow{u}$ *passant par le point* X_0 *vérifiant* $\overrightarrow{PX_0} = \frac{k}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$.

4.2 Isométries de l'espace

Rappelons que les réflexions sont définies par rapport à un sous espace affine (qu'elles laissent stable) ; dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il peut donc s'agir d'un point, d'une droite, d'un plan, ou encore de l'espace entier.

Définition. *On appelle rotation d'angle* θ *et d'axe* $(O, \overrightarrow{u})$ *l'application dont l'écriture matricielle dans un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Enfin, on appelle :

— vissage la composée d'une translation et d'une rotation d'axes colinéaires ;
— anti-rotation la composée d'une réflexion suivant un plan et d'une rotation d'axe orthogonal.

Théorème. *Toute isométrie de l'espace est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage, soit une réflexion, soit une anti-rotation, soit une symétrie glissée.*

Démonstration. Soit $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une isométrie. Fixons un point O arbitraire et étudions l'application linéaire $\overrightarrow{\sigma} : \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{\sigma(O)\sigma(O+\overrightarrow{v})}$. Comme σ est une isométrie, $\overrightarrow{\sigma}$ est orthogonale. Ainsi :

— Si $\overrightarrow{\sigma}$ laisse stable l'espace entier, alors c'est l'identité.
— Si $\overrightarrow{\sigma}$ ne laisse stable qu'un sous espace de dimension deux, alors c'est une réflexion plane.
— Si $\overrightarrow{\sigma}$ ne laisse stable qu'un sous espace de dimension un, alors c'est une rotation.
— Si $\overrightarrow{\sigma}$ ne laisse stable que $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, alors c'est la composée de trois réflexions dont les plans sont d'intersection vide.

Ainsi, σ est respectivement une translation, une réflexion ou une symétrie glissée, une rotation ou un vissage, ou une anti-rotation. $\square$

Corollaire. *Toute isométrie de l'espace est la composée d'au plus quatre réflexions.*

Bibliographie

[1] Marcel BERGER. *Géométrie*. CEDIC/Fernand Nathan, 1977. ISBN : 2712407008.

[2] Ephraim CHAMBERS. *Cyclopædia*. An Universal Dictionary of Arts and Sciences. Tome 1. London, 1728.