Algèbre linéaire 2

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

La géométrie, c'est-à-dire l'étude des objets et des transformations de l'espace, est un cadre naturel pour formaliser de vastes familles de problèmes concrets ; cela étant, leur résolution y est souvent difficile ou artificielle. À l'inverse, l'algèbre, qui traite des équations et de leur manipulation, est plus abstrait mais dispose de puissants outils de résolution. Souvent, traduire un problème géométrique en termes algébriques permet de le résoudre efficacement ; inversement, il peut être éclairant de traduire un problème algébrique en termes géométriques.

L'interface entre ces deux domaines, appelée géométrie algébrique, est un pan très important des mathématiques modernes. L'algèbre linéaire en est le fondement : il porte sur une classe élémentaire de transformations géométriques appelées applications linéaires (comprenant notamment les symétries et les projections) et vise à les exprimer de manière algébrique puis à développer les outils permettant de les maîtriser.

Les deux premiers chapitres rappellent les notions vues en cours d'algèbre linéaire 1 ; les démonstrations y sont omises au profit des exemples et exercices. Le rythme des chapitres suivants est moins soutenu afin de permettre l'assimilation des concepts présentés par un lectorat le plus vaste possible.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels peuvent être définis sur un corps arbitraire $\mathbb{K}$; dans ce cours, on supposera que ce corps est soit celui des nombre complexes $\mathbb{C}$ soit celui des nombres réels $\mathbb{R}$. Étendre nos théorèmes à des corps quelconques ne serait pas insurmontable mais introduirait davantage de technicité (concernant la caractéristique des corps et leurs clôture algébrique).

1.1 Combinaisons linéaires

Définition. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux applications, $+ : E \times E \to E$ (appellée « addition ») et $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (appelée « multiplication scalaire »), qui vérifient :*

1. $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$ *(associativité)*
2. $\exists \overrightarrow{0} \in E, \forall x \in E, \overrightarrow{0} + x = x$ *(élément neutre)*
3. $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = \overrightarrow{0}$ *(élément inverse)*
4. $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ *(commutativité)*
5. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
6. $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
7. $\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
8. $\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

Exemple. *Sur $\mathbb{R}$ on a notamment les espaces vectoriels suivants :*
- *l'espace usuel $\mathbb{R}^3$;*
- *l'espace à n dimensions $\mathbb{R}^n$;*
- *l'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;*
- *l'espace des fonctions $\mathscr{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.*

Les éléments de E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ les scalaires. Intuitivement, on peut ajouter des vecteurs (par l'application $+$) et les étirer suivant les scalaires (par l'application $\cdot$). Les sommes de vecteurs étirés jouent un rôle central pour comprendre la structure des espaces vectoriels.

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E.*

On appelle combinaison linéaire des x_i tout vecteur de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ pour $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$.

Leur ensemble forme le sous espace vectoriel engendré par les x_i que l'on note $\langle x_i \rangle_{i \in I}$.

On dit que cette famille est :

— *génératrice si* $\langle x_i \rangle_{i\in I} = E$.
— *libre si, pour tout* $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$*, on a* $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \overrightarrow{0}$ *uniquement lorsque* $\forall i \in I, \lambda_i = 0$.
— *une base si elle est à la fois libre et génératrice.*

Théorème. *Si* L *est une famille libre et* G *une famille génératrice d'un espace* E*, il existe une base de* E *contenant* L *et contenue dans* $L \cup G$*. Toutes les bases ont le même cardinal, que l'on appelle dimension de l'espace vectoriel.*

Exemple. *Notamment :*
— *La dimension de* $\mathbb{R}^n$ *comme espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *est* n.
— *La dimension de* $\mathbb{C}^n$ *comme espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *est* $2n$.
— *L'espace* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *n'admet pas de famille finie génératrice.*

On peut aussi chercher à décomposer un espace vectoriel en sous espaces, c'est-à-dire considérer ce qu'engendrent ces sous espaces, indépendamment d'éventuelles bases sous-jacentes.

Définition. *Soit* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille finie de sous espaces vectoriels de* E.

On appelle somme des F_i *le sous espace vectoriel des vecteurs de la forme* $\sum_{i\in I} x_i$ *pour* $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i$.

Cette somme est dite directe si, pour tout $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i$*, on a* $\sum_{i\in I} x_i = \overrightarrow{0}$ *uniquement lorsque* $\forall i \in I, x_i = \overrightarrow{0}$.

Les espaces F_i *sont dits supplémentaires si leur somme est directe et vaut* E.

Proposition. *Si* F *et* G *sont deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel, alors on a :*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

1.2 Applications linéaires

Les combinaisons linéaires étant centrales à la structure d'un espace vectoriel, l'étude des applications qui préservent ces combinaisons promet d'être riche en information sur ces espaces.

Définition. *Une application* $\phi : E \to F$ *entre deux espaces vectoriels est dite linéaire si elle vérifie* $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y)$ *quels que soient* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *et* $(x, y) \in E^2$.

Son noyau $\ker(\phi)$ *est le sous espace vectoriel formé des vecteurs* $x \in E$ *vérifiant* $\phi(x) = 0$.

Son image $\operatorname{im}(\phi)$ *est le sous espace vectoriel formé des vecteurs* $\phi(x) \in F$ *lorsque* x *parcours* E.

Son rang $\operatorname{rg}(\phi)$ *est la dimension de son image.*

On note $\operatorname{Hom}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F ; c'est lui-même un espace vectoriel. Deux cas particuliers sont importants au point d'avoir une terminologie spécifique :
— $\operatorname{Hom}(E, E) = \mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E ;
— $\operatorname{Hom}(E, \mathbb{K}) = E^*$ l'espace des formes linéaires de E.

Revenons au rang; c'est un paramètre très important des applications linéaires; l'une de ses caractéristiques est notamment qu'il évolue « gentiment » avec l'application.

Proposition. *Soient* a *et* b *deux applications linéaires de* $\operatorname{Hom}(E, F)$*; l'application* $a + b : x \in E \mapsto a(x) + b(x) \in F$ *vérifie* $\operatorname{rg}(a + b) \leqslant \operatorname{rg}(a) + \operatorname{rg}(b)$.

La dimension du noyau d'une application linéaire est un autre paramètre très important ; on sait par exemple que lorsque le noyau est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$ alors l'application est injective. En fait, la dimension du noyau et le rang donnent des informations redondantes.

Théorème. *Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire ; on a* $\dim(E) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi))$.

Rappelons certaines classes importantes d'applications linéaires.

Définition. *Une application linéaire π vérifiant $\pi^2 = \pi$ est appelée projecteur.*
Une application linéaire σ vérifiant $\sigma^2 = \mathrm{id}$ est appelée symétrie.

Exemple. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E supplémentaires.*
Les applications $\pi_j : \begin{cases} E \longrightarrow E_j \\ \sum_{i\in I} x_i \longmapsto x_j \end{cases}$ pour $j \in I$ sont des projecteurs dont la somme est l'identité.

1.3 Exercices

Exercice. *Décomposer le vecteur* $(11, 13) \in \mathbb{R}^2$ *dans la famille* $((2,3),(5,7))$. *Est-ce une base de $\mathbb{R}^2$?*

Exercice. *Lesquelles de ces applications sont linéaires ? Le cas échéant, donner leur noyau et image.*
- *la symétrie de centre $\overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^3$;*
- *l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^3$ qui à (x, y) associe (x^2, xy, y^2) ;*
- *l'application qui à la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(2x_{3i} + x_{3i+1})_{i\in\mathbb{N}}$;*
- *l'application qui à un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ associe sa dérivée $P'(X)$;*
- *l'application de $\mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ qui à une fonction associe son intégrale.*

Exercice. *La famille* $((0,1,2),(1,2,4),(2,4,8))$ *de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ? En extraire une base B du sous espace vectoriel qu'elle engendre. Compléter B en une base de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de vecteurs de la base canonique.*

Exercice. *Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ lorsque $p < q$, et qu'il n'existe pas d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ lorsque $p > q$.*

Exercice. *Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle. Montrer que les deux ensembles*

$$\{f \in E : f(1) = 0\}, \qquad \{x \mapsto ax : a \in \mathbb{R}\}$$

sont deux sous espaces vectoriels en somme directe.

Exercice. *Montrer que, pour tout endomorphisme ϕ, la suite $\left(\ker(\phi^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que $\left(\mathrm{im}(\phi^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Exercice. *Soit ϕ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E ; montrer l'équivalence des propositions :*
- $E = \mathrm{im}(\phi) + \ker(\phi)$
- $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\phi^2)$
- $\ker(\phi) = \ker(\phi^2)$

Exercice. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel vérifiant $\sum_{i\in\{1,\dots,k\}} \lambda_i f^i = 0$ où l'un des λ_i est non nul. Montrer que toute puissance de f est égale à un polynôme en f de degré au plus $k-1$.*

Exercice. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E, tous différents de E.*
Montrer que leur union n'est pas égale à E.

Exercice. *Soit ϕ un endomorphisme de E vérifiant $\phi^{\dim(E)} = 0$. Montrer que s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\phi^{\dim(E)-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$, alors $(x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{\dim(E)-1}(x))$ est une base de E.*

Exercice. *Montrer que pour tout $a \in \mathscr{L}(E)$ il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $aba = a$.*

Exercice. *Combien y a-t-il de sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ à isomorphisme près ?*
Donner un exemple d'espace vectoriel pour lequel cette quantité n'est pas finie.

Exercice. *Soient p et q deux projecteurs d'un même espace vectoriel.*
Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Dans ce cas, montrer que $\mathrm{im}(p+q) = \mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice. *Soit E un espace vectoriel. Montrer la linéarité de l'application*

$$ad : \begin{cases} \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{L}(E)) \\ \quad f \longmapsto (g \mapsto fg - gf) \end{cases} .$$

À quelle condition sur f l'application $\mathrm{ad}(f)$ est-elle injective ou surjective ?
Supposant que $f^n = 0$, montrer que $\mathrm{ad}(f)^{2n-1} = 0$ mais que $f^{n-1} \in \mathrm{im}(\mathrm{ad}(f)^{2n-2})$.

Exercice. *Soient $(f_i : X_i \to X_{i+1})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ une famille d'applications linéaires vérifiant $X_0 = X_{n+1} = 0$ et $\mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ pour tout i. Montrer que $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \dim(X_i) = 0$*

Chapitre 2

Matrices

Les matrices sont la représentation algébrique des transformations géométriques que sont les applications linéaires. Ce chapitre se contente de présenter cette représentation ainsi que ses propriétés élémentaires ; sa puissance ne deviendra apparente que plus tard dans le cours.

2.1 Représentation matricielle

Pour représenter de manière explicite des applications linéaires, on peut fixer des bases des espaces vectoriels concernés et décrire la transformation qu'elles subissent sous l'effet de l'application linéaire.

Définition. *La matrice d'une application linéaire $\phi : E \to F$ dans des bases $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ de E et $(f_j)_{j\in\{1,\dots,m\}}$ de F est un tableau de scalaires $(\lambda_{j,i})_{(j,i)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$ vérifiant $\phi(e_i) = \sum_{j\in\{1,\dots,m\}} \lambda_{j,i} f_j$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$; on la note :*

$$\mathrm{mat}_{(e_i,f_j)}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m,1} & \lambda_{m,2} & \cdots & \lambda_{m,n} \end{pmatrix}$$

Si $E = F$ et $\phi = \mathrm{id}$, on l'appelle matrice de passage de la base (e_i) vers (f_j).

L'ensemble (nous verrons ci-dessous que c'est aussi un espace vectoriel) de toutes les matrices de taille $m \times n$ se note $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ ou simplement $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ lorsque $m = n$ (auquel cas on dit que les matrices sont carrées).

Certains espaces admettent des bases plus naturelles que les autres que l'on qualifie de bases canoniques ; pour l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, par exemple, c'est $((1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),\dots)$. Dans ces cas, on omettra parfois de préciser les bases des espaces vectoriels choisies.

Exercice. *Écrire la matrice d'une rotation et d'une projection dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Définition. *Soient trois espaces vectoriels E, F et G de bases respectives (e_i), (f_j) et (g_k).*

L'addition de deux matrices correspond à l'addition des applications linéaires :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \phi(x) \end{cases} & + & \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \psi(x) \end{cases} & = & \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \phi(x) + \psi(x) \end{cases} \\ (\lambda_{j,i}) & + & (\mu_{j,i}) & = & (\lambda_{j,i} + \mu_{j,i}) \end{array}$$

La multiplication de deux matrices correspond à la composition des applications linéaires :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{cases} F \longrightarrow G \\ x \longmapsto \psi(x) \end{cases} & \circ & \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \phi(x) \end{cases} & = & \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto \psi(\phi(x)) \end{cases} \\ \left(\mu_{k,j}\right) & \cdot & \left(\lambda_{j,i}\right) & = & \left(\sum_j \mu_{k,j}\lambda_{j,i}\right) \end{array}$$

Attention ! Tout comme la composition des applications linéaires, la multiplication de matrices n'est pas commutative : le produit MN n'est défini que si M a autant de colonnes que N a de lignes. Dans $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ cette multiplication admet un élément neutre qui correspond naturellement à l'application linéaire identité ; cette matrice identité s'écrit

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité de taille $n \times n$ est aussi un élément neutre à droite dans $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ et à gauche dans $\mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Exercice. *Calculer le produit et les carrés des matrices de l'exercice précédent.*
La famille $(\sigma, \pi, \sigma\pi, \sigma^2)$ *est-elle une base de* $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *?*

Finissons d'équiper $\mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel en le munissant d'un produit scalaire donné simplement par l'action des dilatations :

$$\begin{array}{ccccc} \mu\,\mathrm{id}_E & \cdot & \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \phi(x) \end{cases} & = & \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \mu\phi(x) \end{cases} \\ \mu & \cdot & \left(\lambda_{j,i}\right) & = & \left(\mu\lambda_{j,i}\right) \end{array}$$

2.2 Trace

Définition. *La trace d'une matrice carrée M est la somme de ses coefficients diagonaux $\sum_i m_{i,i}$.*
C'est une application linéaire de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$.

Proposition. *Pour toutes matrices A et B, lorsque cette expression est définie, on a* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

La trace ne dépend donc pas de la base dans laquelle une matrice est écrite ; on peut ainsi parler de trace de l'endomorphisme sous-jacent. Ce type d'applications s'appelle un invariant : pour que deux matrices A et B soient semblables, c'est-à-dire qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases distinctes ou, en d'autres termes, qu'il existe une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}BP$, il est nécessaire que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Proposition. *Toute application linéaire ϕ de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$ *vérifiant $\phi(MN) = \phi(NM)$ quels que soient M et N est égale à la trace à un scalaire près.*

2.3 Transposée

Définition. *La transposée d'une matrice $M = (m_{i,j})$ est la matrice ${}^tM = (m_{j,i})$.*

Proposition. *C'est un endomorphisme de l'espace vectoriel* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$*; il vérifie ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.*

Exercice. *Quels sont les matrices M vérifiant* $\mathrm{tr}({}^t\overline{M}M) = 0$ *?*

Définition. *On dit qu'une matrice carrée M est :*

— *symétrique lorsque* ${}^tM = M$ *;*
— *antisymétrique lorsque* ${}^tM = -M$ *;*
— *hermitienne lorsque* ${}^t\overline{M} = M$ *;*
— *antihermitienne lorsque* ${}^t\overline{M} = -M$ *;*
— *orthogonale lorsque* ${}^tM = M^{-1}$.

Exercice. *Lesquelles de ces familles sont stables par multiplication ? Et par addition ?*

Exercice. *Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ montrer que les matrices orthogonales décrivent bien les applications orthogonales du plan et de l'espace usuel. Remarquer pour cela que le produit scalaire des vecteurs a et b peut s'écrire* $\mathrm{tr}({}^ta\,b)$.

Proposition. *Le rang de la transposée est la dimension du conoyau.*

2.4 Exercices

Exercice. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} cc2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. *Déterminer lesquelles des matrices $A+B$, AB et BA sont définies et les calculer.*

Calculer le noyau et l'image de A.

Exercice. *Calculer les puissances* 2^e, 3^e *et* 4^e *de la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice. *Donner trois bases distinctes de l'espace* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Exercice. *Écrire la matrice de la dérivation des polynômes de degré inférieur ou égal à k dans la base* $(1, X, X^2, \ldots, X^k)$.

Exercice. *Soit f une forme linéaire sur* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une unique matrice A telle que* $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$ *pour tout* $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Quelles sont les formes linéaires f de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $f(AB) = f(BA)$ *?*

Exercice. *Montrer que toute matrice de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.*

Montrer que toute matrice de diagonale nulle est de la forme $XD - DX$ où D est diagonale. Considérer le cas de $X = (M_{i,j}/(i-j))$ *et* $D = (i\,\delta_{i,j})$.

Montrer que les matrices de trace nulle sont exactement celles de la forme $XY - YX$.

Chapitre 3

Inversibilité

Proposition. *Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors sa réciproque $\phi^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire et les dimensions de E et F sont égales.*

On peut donc parler de matrices inverses mais seulement dans le cas carré ; rappelons que l'élément neutre est la matrice identité.

3.1 Caractérisations élémentaires

Définition. *On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $MN = NM = \mathrm{id}$. Dans ce cas, N est unique et on la note M^{-1}.*

Le fait qu'un matrice soit ou non inversible joue un rôle très important, par exemple pour la résolution de systèmes linéaires. On va donc voir des critères de plus en plus efficaces afin de déterminer si une matrice donnée est inversible ou non.

Proposition. *Une matrice de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son rang est n.*

Démonstration. Si le rang de M est strictement inférieur à n, alors par le théorème du rang M possède un noyau non nul ; le produit NM a au moins le même noyau quel que soit N et ne peut donc être égal à l'identité.

Si le rang de M est n, alors l'application linéaire correspondante ϕ est bijective. Sa réciproque ϕ^{-1} est donc bien définie et l'on vérifie qu'elle est elle aussi linéaire. La matrice de ϕ^{-1} est donc l'inverse de M. □

Exercice. *Lesquelles des matrices suivantes sont-elles inversibles ?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

3.2 Groupe linéaire

Définition. *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ forme un groupe multiplicatif noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, la multiplication laisse cet ensemble stable et, restreinte à lui, elle est associative, possède un unique élément neutre, et chaque élément admet un inverse.*

Les matrices quelconques sont souvent notées M et N, mais les matrices inversibles se notent en général P ou Q, car ce sont les matrices de passage (d'une base à une autre).

Exercice. *Calculer le produit de la troisième et de l'avant-dernière matrice ci-dessus. Calculer le produit de l'avant-dernière et de la troisième matrice ci-dessus. Qu'observe t-on ?*

3.3 Calcul directe d'inverse

La méthode la plus directe pour calculer l'inverse d'une matrice consiste à résoudre un système linéaire dont les inconnus sont les coefficients de la matrice inverse recherchée. En effet, étant donné $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, considérons la relation $MX = Y$ où X et Y sont deux variables de $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$ (vecteurs colonnes) ; elle entraîne $X = M^{-1}Y$, ce qui signifie que calculer M^{-1} revient à exprimer X en fonction de Y.

Exemple. *Prenons* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *La relation* $MX = Y$ *est équivalente au système d'équations*

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_3 + x_1 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$$

La somme de ces trois équations est $2(x_1 + x_2 + x_3) = y_1 + y_2 + y_3$. *En en soustrayant la moitié à chacune des équations ci-dessus, on obtient :*

$$\begin{cases} -x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2} - y_2\frac{1}{2}y_3 \\ -x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2} - y_3\frac{1}{2}y_1 \\ -x_3 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2} - y_1\frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

L'inverse de M *est donc* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus tard, lorsque l'on disposera de techniques plus efficaces pour inverser une matrice donnée, on pourra en retour s'en servir pour résoudre des systèmes linéaires.

3.4 Exercices

Exercice. *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* M^4.

En déduire que M *est inversible et calculer* M^{51}.

Trouver des coefficients $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ *vérifiant* $aM^2 + bM + c\,\mathrm{id} = 0$.

Exercice. *Montrer que toutes les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2\lambda & -1 \end{pmatrix}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ *sont inversibles et calculer leur inverse.*

Exercice. *Soit* $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *une matrice vérifiant* $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que X *ou* $\mathrm{id} + X$ *n'est pas inversible.*

Si X *n'est pas inversible, montrer qu'elle est proportionnelle au membre de droite (montrer pour cela qu'elle a même noyau et même image).*

Trouver toutes les matrices X *vérifiant l'équation ci-dessus.*

Exercice. *Montrer que toutes les matrices* $\mathrm{id} + E_{i,j}$ *avec* $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ *sont inversibles dans* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. *En déduire que seules les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices inversibles.*

Exercice. *Montrer que toute matrice dont les coefficients vérifient* $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ *est inversible.*

Exercice. *Montrer que les multiplications par des matrices inversibles n'affectent donc pas le rang. En d'autres termes, montrer que si* M *est une matrice de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *et* P *une matrice de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *alors* $\mathrm{rg}(MP) = \mathrm{rg}(PM) = \mathrm{rg}(M)$.

Exercice. *Soit* f *une application non constante de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie* $f(AB) = f(A)f(B)$ *pour tout couple de matrices* $(A,B) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^2$.

Montrer qu'une matrice $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *est inversible si et seulement si* $f(M) \neq 0$.

Chapitre 4

Équivalence et similitude

FIXME
On cherche à classifier les matrices.

4.1 Similitude

Définition. *On dit que deux matrices carrées $M, N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$M = P^{-1} \cdot N \cdot P.$$

Proposition. *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphismes dans deux bases. La matrice P est alors la matrice de passage de la base de M à celle de N.*

Plus précisément, soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$; on note M_E sa matrice dans la base $E = (e_i)$ et M_F sa matrice dans la base $F = (f_j)$. Alors on a

$$M_E = P_{EF}^{-1} M_F P_{EF}$$

où les vecteurs colonnes de la matrice P_{EF} sont les vecteurs de E écrits dans la base F, c'est-à-dire que l'on a $e_i = \sum P_{EF\,i,j} f_j$.

Les fonctions d'une matrice qui ne dépendent que de l'endomorphisme sous-jacent et pas de la base dans laquelle il est écrit sont constantes sur chaque classe d'équivalence. C'est notamment le cas de la trace, du déterminant, du rang, du polynôme caractéristique et du polynôme minimal.

Exercice. *Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont semblables.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.2 Équivalence

Définition. *On dit que deux matrices carrées $M, N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$M = P \cdot N \cdot Q.$$

Évidemment, deux matrices semblables ont le même rang. Inversement, le rang suffit à caractériser uniquement les classes d'équivalences ; on a en effet :

Proposition. *Toute matrice $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ est équivalente à la matrice diagonale par bloc*

$$J_{\mathrm{rg}(M)} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathrm{rg}(M)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $(M b_1, \dots, M b_{\mathrm{rg}(M)})$ une base de l'image de M. On complète la famille $(b_1, \dots, b_{\mathrm{rg}(M)})$ en une base de $\mathbb{K}^n$ et note Q la matrice de passage vers cette base depuis la base canonique. Alors, pour P la matrice de passage de la base canonique vers un complété de $(M b_1, \dots, M b_{\mathrm{rg}(M)})$, on obtient $M = P J_{\mathrm{rg}(M)} Q$. □

Exercice. *Trouver des matrices P et Q qui conviennent pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.*

Corollaire. *Deux matrices de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

En multipliant par des matrices inversibles arbitraires, tout ce qui est préservé d'une matrice est donc son rang. Pour des problèmes plus fins, il est souvent pertinent de travailler à similitude près.

Autre approche :

Définition. *L'ensemble $\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ est partitionné en les classes d'équivalences $\{PMQ : (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2\}$.*

Exercice. *Considérons ici des matrices à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ muni des opérations d'addition et de multiplication modulo 3.*

Quels sont les rangs des matrices ci-dessous ? Inverser celles de rang plein.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Combien chaque classe d'équivalence de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ a-t-elle d'éléments ?

Exercice. *Soit $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ fixée. Décrire l'ensemble des matrices de la forme GM pour $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Faire de même dans le cas MG.*

Chapitre 5

Déterminants

Le rang n'est pas un outil facile à manipuler. Pour déterminer si une matrice est inversible, on peut aussi considérer son déterminant, c'est-à-dire le volume n-dimensionnel que délimitent les vecteurs colonnes de la matrice. Cette quantité possède de nombreuses propriétés qui rendent son calcul aisé. Nous verrons plus tard qu'elle est aussi très importante en termes d'applications.

5.1 Volume

Considérons les matrices de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$: leurs deux vecteurs colonnes engendrent un sous espace du plan $\mathbb{R}^2$. Une telle matrice est inversible si et seulement si ses deux vecteurs colonnes sont linéairement indépendants. Quelle quantité peut on utiliser pour mesurer cela ? L'aire du losange défini par ces deux vecteurs : elle est nulle si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires. On appelle cette aire le déterminant de la matrice :

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

L'image d'une matrice de $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ est quant à elle engendrée par ses trois vecteurs colonnes. Savoir si le rang est plein revient donc encore à déterminer si ces trois vecteurs sont linéairement indépendant. Pour cela, on peut calculer calculer le volume du parallélépipède qu'ils définissent : s'il est non nul, alors les vecteurs sont indépendants et la matrice est inversible.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec$$

Définition. *Le déterminant d'une matrice est le volume du parallélépipède que ses vecteurs colonnes définissent.*

Théorème. *Pour toutes matrices* $(A, B) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})^2$ *il vérifie* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Ainsi, une matrice n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul.

Exemple. *Laquelle des deux matrices* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ *est inversible ?*

5.2 Cas élémentaires

En dimension supérieure à trois, le cas où le calcul du volume d'un parallélépipède est le plus évident est celui des matrices diagonales, car leurs vecteurs colonnes suivent chacun un axe et sont donc orthogonaux.

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

Le cas des matrices triangulaires est aussi aisé : on se rappelle que l'aire d'un losange dans le plan est le produit de sa base et de sa hauteur, autrement dit que la composante du second vecteur sur le premier n'a aucun effet sur le volume. Ceci est vrai plus généralement :

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

5.3 Opérations élémentaires

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée arbitraire, il suffit désormais de savoir se ramener au cas d'une matrice triangulaire. Pour ce faire, nous allons maintenant décrire des transformations élémentaires qui préservent (ou changent de manière contrôlée) le déterminant.

Définition. *On appelle opérations élémentaires sur les colonnes C_i de $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ les transformations suivantes :*

— *l'interversion de deux colonnes C_i et C_j, avec $i \neq j$; on note $(C_i, C_j) \leftarrow (C_j, C_i)$.*
— *la multiplication d'une colonne C_i par un scalaire $\alpha \neq 0$; on note $C_i \leftarrow \alpha C_i$.*
— *l'ajout à une colonne C_j d'un multiple αC_i d'une autre ; on note $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$.*

On peut, de la même façon, définir les opérations sur les lignes.

Ces applications préservent le fait que le déterminant soit nul ou non ; plus généralement, elles préservent le rang des matrices auxquelles elles sont appliquées.

Proposition. *L'interversion de deux colonnes distinctes inverse le signe du déterminant.*
La multiplication d'une colonne par α multiplie le déterminant par α.
L'ajout à une colonne d'un multiple d'une autre ne change pas le déterminant.
Les opérations sur les lignes ont les mêmes propriétés.

Démonstration. Interpréter ces transformations en termes géométriques et en déduire leur incidence sur l'aire définie par les vecteurs colonnes de la matrice. □

En réalité, ces opérations reviennent à des multiplications par des matrices inversibles.

Proposition. *Intervertir ses colonnes C_i et C_j revient à la multiplier A à droite par* $\mathrm{id} + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$.
Multiplier sa colonne C_i par α revient à la multiplier A à droite par $\mathrm{id} + (\alpha - 1)E_{ii}$.
Ajouter à sa colonne C_j le multiple αC_i revient à multiplier A à droite par $\mathrm{id} + \alpha E_{i,j}$.

Remarquez que ces matrices ont les déterminants annoncés dans la proposition précédente. En particulier, pour $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$ elles sont toutes inversibles.

Exercice. *Transformer la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ *en la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ *en effectuant des opérations sur les lignes, et déterminer le rapport des déterminants de ces deux matrices.*

5.4 Pivot de Gauss

Soit A une matrice. On veut ramener A sous une forme triangulaire en effectuant une série d'opérations élémentaires. Pour cela, on utilise la technique connue sous le nom du pivot de Gauss.

Définition. *Le pivot de Gauss consiste à appliquer les transformations suivantes à une matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. *Si A est nulle, alors elle est déjà sous forme triangulaire.*
2. *Si la première ligne de A est nulle, l'intervertir avec une autre ligne non nulle.*
3. *Si $a_{11} = 0$, trouver i tel que $a_{1i} \neq 0$ et intervertir les colonnes 1 et i.*
4. *Pour j de 2 à n :*
5. *Ajouter à la colonne j le produit de la première colonne par $-a_{1j}/a_{11}$.*
6. *Retourner en (i) et se restreindre à la sous matrice d'indices $\{2, \ldots, m\} \times \{2, \ldots, n\}$.*

À la fin du pivot de Gauss, on a une matrice triangulaire. Le nombre de coefficients non nuls sur sa diagonale donnent son rang et, lorsqu'elle est carrée, leur produit donne son déterminant.

Exercice. *Calculer les déterminants des matrices suivantes par la méthode du pivot de Gauss :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Soit ϕ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Le déterminant de la matrice de ϕ ne dépend pas de la base dans laquelle elle est écrite. On parle de déterminant de ϕ.*

Démonstration. Rappelons que, pour tout couples de matrices $(A, B) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})^2$, le déterminant vérifie $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ainsi, si A est inversible, en posant $B = A^{-1}$, on trouve $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Donc, si P est la matrice de passage d'une base à une autre, on a $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$. □

Remarque. *Attention : le déterminant n'est pas linéaire !*

On a $\det(\alpha A) = \alpha^n A$, *et* $\det(A + B)$ *n'a pas forcément de rapport avec* $\det(A)$ *et* $\det(B)$.

5.5 Développement de déterminants

On peut ramener le calcul des déterminants d'ordre n à des calculs de déterminants d'ordre $n - 1$ en les développant suivant une colonne ou une ligne. Nous allons ici expliquer cela sur les colonnes, mais tout vaut aussi pour les lignes en transposant la matrice de départ — vu que la transposée ne change pas le déterminant.

Définition. *Soit A une matrice de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$*. Son mineur d'indice* (i, j) *est la matrice de taille* $(n-1)\times(n-1)$ *obtenue en supprimant de A sa i^e ligne et sa j^e colonne.*

Exemple. *Le mineur d'indice* $(2,3)$ *de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$ *est la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 17 \end{pmatrix}$.

Proposition. *Pour toute matrice* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *et tout indice* $j \in \{1, \dots, n\}$ *on a*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\left(\mathrm{mineur}_{i,j}(A)\right)$$

On appelle cette formule le développement du déterminant de M suivant sa j^e colonne.

Exemple. *En développant suivant la second colonne, on obtient :*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{32}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Exercice. *Calculer le déterminant de* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & e \\ 0 & 0 & \pi \\ 5 & 7 & i \end{pmatrix}$ *en développant suivant une ligne bien choisie.*

5.6 Déterminants particuliers

Outre les matrices diagonales et triangulaires, il existe d'autres formes classiques pour lesquelles il existe des formules simples pour le déterminant.

Proposition. *La matrice de Vandermonde de la famille* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *est*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

Démonstration. Soustrayons la première ligne à toutes les suivantes : on obtient une matrice de même déterminant dont la première colonne est nulle à l'exception du premier coefficient ; on développe donc le déterminant suivant cette colonne, ce qui nous ramène au calcul du déterminant du mineur de taille $(n-1)\times(n-1)$.

Son coefficient d'indice (i, j) vaut $x_{i+1}^{j-1} - x_1^{j-1}$. Pour tout i, on peut alors diviser la i^e ligne par $(x_{i+1} - x_1)$ en se rappelant de l'identité

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$

Puis on simplifie la matrice obtenue par des opérations sur les colonnes : en effectuant $C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$, la seconde colonne devient (x_i) ; en effectuant ensuite $C_3 \leftarrow C_3 - x_1^2 C_1 - x_1 C_2$, la troisième colonne devient (x_i^2) ; etc. On obtient alors une matrice de Vandermonde de taille inférieure, celle de la famille $(x_2, \dots, x_n)$. Le déterminant s'obtient ainsi par récurrence. $\square$

Définition. *Étant données quatre matrices*

$$\begin{array}{ll} A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) & B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) & D \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{K}) \end{array}$$

on appelle « matrice par blocs A, B, C, D » la matrice de $\mathrm{Mat}_{n+m,n+m}(\mathbb{K})$ *donnée par*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Vis-à-vis de la multiplication, les matrices par blocs se comportent comme on s'y attendrait (lorsque les blocs sont de tailles compatibles, bien entendu) : le résultat suivant se vérifie simplement par le calcul.

Lemme. *Les matrices par blocs vérifient*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Exercice. *Généraliser par récurrence le lemme ci-dessus à des matrices formées de* 3×3 *blocs.*

Proposition. *Dans le cas particulier $C = 0$, on a*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

Démonstration. Montrons cette propriété par récurrence sur n. Si $n = 0$, le résultat est clair. Si $n > 0$, développons suivant la première colonne. Cela permet d'exprimer le déterminant comme une somme de $n - 1$ déterminants de matrices par blocs de taille inférieure ; on leur applique la formule de récurrence et l'on reconnait l'expression du développement en colonne de $\det(A)\det(B)$. □

Remarque. *Attention ! En général, on n'a pas*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C).$$

Les matrices par blocs peuvent notamment s'utiliser pour mettre en relation des déterminants de tailles différentes, comme le fait la proposition ci-dessous.

Proposition. *Soient deux matrices $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a* $\det(\mathrm{id}_n + AB) = \det(\mathrm{id}_m + BA)$.

Démonstration. Faisons apparaître $\mathrm{id}_n + AB$ et $\mathrm{id}_m + BA$ dans des matrices par blocs reliées :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & 0 \\ B & \mathrm{id}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & -A \\ 0 & \mathrm{id}_m + BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & -A \\ B & \mathrm{id}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n + AB & -A \\ 0 & \mathrm{id}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & 0 \\ B & \mathrm{id}_m \end{pmatrix}.$$

Le résultat découle en prenant les déterminants du membre de gauche et de celui de droite. □

5.7 Inversion des matrices

Les déterminants sont principalement un outil permettant de savoir si une matrice est inversible, mais ils donnent aussi une formule exprimant l'inverse explicitement, même si elle est parfois pénible à mettre en œuvre.

Théorème. *Soit A une matrice carrée. Elle admet un inverse si et seulement si* $\det(A)$ *est non nul. Dans ce cas, l'unique inverse vaut*

$$\frac{1}{\det(A)}{}^t\underbrace{\Big((-1)^{j+k}\det(A_{(j,k)})\Big)_{j,k}}_{\text{matrice des cofacteurs}}$$

Démonstration. Multiplions A par la matrice ci-dessus. On obtient la matrice dont le coefficient d'indice (i,k) vaut

$$\frac{1}{\det(A)}\sum_j a_{i,j}(-1)^{k+j}\det(A_{(k,j)})$$

On reconnait en le facteur somme de ce coefficient le développement suivant la k^{e} ligne d'une matrice.

Lorsque $i=k$, cette matrice est A; le coefficient d'indice (k,k) du produit vaut donc $\frac{1}{\det(A)}\det(A)=1$. Lorsque $i\neq k$, cette matrice est A avec la k^{e} ligne remplacée par la i^{e}; c'est une matrice qui comporte deux fois la même ligne, donc son déterminant est nul et le coefficient correspondant aussi.

On trouve donc

$$\frac{1}{\det(A)}\sum_j a_{i,j}(-1)^{k+j}\det(A_{(k,j)})=\delta_{i,k}.$$

□

En pratique, il est souvent plus rapide d'inverser le système linéaire à la main comme nous l'avons vu au chapitre précédent que de calculer les déterminants des n^2 mineurs que cette formule fait intervenir.

Exercice. *Inverser les matrices* $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&7\\8&9&0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

Exercice. *Montrer que toutes les matrices de la forme* $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$ *avec* $ab\neq c$ *admettent un inverse qui est de cette même forme.*

Généraliser aux matrices carrées triangulaires supérieures de taille 3 *?*

5.8 Résolution des systèmes linéaires

Nous avons vu qu'un système linéaire pouvait être écrit sous la forme d'une multiplication matricielle

$$MX=Y$$

où les n inconnues sont les coefficients du vecteur $X\in\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$, où les termes constants des m équations sont ceux du vecteur $Y\in\mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{K})$, et les n coefficients des m équations forment la matrice $M\in\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Théorème. *Si le vecteur Y n'est pas dans l'image de M, alors le système n'admet pas de solution.*

Si le vecteur Y admet une préimage Z par M, alors l'ensemble des solutions du système est $Z+\ker(M)$.

En général, lorsque la matrice est de rang différent de n (strictement plus ou moins d'équations que d'inconnues), le système n'admet pas de solution. Lorsqu'il est de rang n, on peut le résoudre en inversant la matrice car alors $Y = M^{-1}X$.

Proposition. *Soit M une matrice carrée inversible. Le système $MX = Y$ admet un unique vecteur solution X dont le i^e coefficient vaut $\frac{\det(M_i)}{\det(M)}$ où M_i est la matrice obtenue en remplaçant la i^e colonne de M par le vecteur Y.*

Démonstration. Développons le déterminant de M suivant la j^{e} colonne ; on obtient $\det(M) = c_1 m_{1,j} + \cdots + c_n m_{n,j}$ pour certains coefficients c_i (les cofacteurs).

Multiplions maintenant l'équation $MX = Y$ à gauche par le vecteur $(c_1, \ldots, c_n)$. Le j^{e} coefficient du membre de gauche de l'équation résultante est $\det(M)x_j$. On trouve donc $x_j = \frac{(c_1,\ldots,c_n)Y}{\det(M)}$. Mais comme les c_i sont les coefficients du développement en colonne, la quantité du numérateur est égale au déterminant de M avec la j^{e} colonne remplacée par Y. □

5.9 Exercices

Exercice. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

grâce à la formule pour les matrices carrée de taille 3, puis en le développant suivant une ligne bien choisie.

Vérifier que les résultats coïncident.

Exercice. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice. *Considérons*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\exp(\mathrm{tr}(M))$.

Montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ *converge coefficient par coefficient vers une matrice dont on calculera le déterminant.*

Exercice. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice. *Si x et y sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, quels sont les déterminants des matrices carrées de taille $n+1$*

$$\begin{pmatrix} 0 & & & x_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & x_n \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice. *Montrer que pour les matrices de taille n, on a*

$$\det \begin{pmatrix} a+b & a & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & b & a+b \end{pmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Exercice. *Soit λ un réel. Écrire la matrice dans la base canonique de l'application linéaire*

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x_1 + \lambda x_2, x_2 + \lambda x_3, x_3 + \lambda x_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour quelles valeurs de λ est-elle bijective ?
Lorsque c'est le cas, donner son inverse.
Calculer l'inverse du vecteur $(1, 2, 3)$ lorsque $\lambda = 2$.

Exercice. *On veut trouver tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tels que (x, Mx) soit lié, avec*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette condition est équivalente à $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x \in \ker(M - \lambda\, \mathrm{id})$.
Trouver toutes les valeurs de λ pour lesquelles un tel x existe.
Pour chacune, donner un tel vecteur x.

Exercice. *Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, il existe des coefficients $(c_0, \ldots, c_{n^2}) \in \mathbb{K}^{1+n^2} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tels que*

$$c_{n^2} M^{n^2} + c_{n^2-1} M^{n^2-1} + \cdots + c_2 M^2 + c_1 M + c_0\, \mathrm{id} = 0.$$

En supposant que $c_0 \neq 0$, montrer que M est inversible.

Montrer qu'il existe un unique vecteur $d = (d_0, \ldots, d_{k-1}, 1) \in \mathbb{K}^{1+k} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ vérifiant $\sum_{i=0}^{k} d_i M^i = 0$ tel que, pour tout autre vecteur $(d'_0, \ldots, d'_{k'-1}, 1) \in \mathbb{K}^{1+k'} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ vérifiant aussi cette propriété, on ait $k' > k$.

En supposant que M est inversible, montrer alors que $d_0 \neq 0$.

Exercice. *Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, de degrés respectifs p et q.*
Écrire la matrice du morphisme $(U, V) \in \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] \mapsto UP + QV$.
À quelle condition ce morphisme est-il inversible ?
En déduire tous les polynômes de la forme $X^3 + aX + b$ admettant une racine multiple.

Exercice. *Montrer qu'une famille finie $(f_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^{[0;1]}$ est libre si et seulement si il existe une famille $(x_j)_{j \in \{1,\ldots,n\}} \in [0;1]^n$ telle que le déterminant de la matrice de terme général $\big(f_i(x_j)\big)$ soit non nul.*

Exercice. *Quels sont les vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ qui apparaissent comme colonnes des matrices à coefficients entiers dont l'inverse existe et est aussi à coefficients entiers ?*

Chapitre 6

Théorie spectrale

Les endomorphismes (donc, les matrices carrées) possèdent une structure bien plus riche que les applications linéaires générales en ce qu'on peut comparer des vecteurs avec leurs images, les images de leurs images, etc. Un endomorphisme admet notamment relativement souvent des vecteurs sur lesquels il agit par simple dilatation. Nous allons ici étudier ces vecteurs ; plus tard, nous nous en servirons pour décomposer un endomorphisme en une somme directe d'endomorphismes plus simples.

6.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition. *Soit ϕ un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.*

Lorsqu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et un vecteur non nul $x \in E$ tels que $\phi(x) = \lambda x$, on dit que λ est une valeur propre de ϕ et que x est un vecteur propre (pour la valeur propre λ).

On appelle spectre de ϕ et l'on note $\mathrm{sp}(\phi)$ l'ensemble de toutes ses valeurs propres.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous espace vectoriel $\ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$ est formé du vecteur nul et des vecteurs propres associés à λ, s'il en existe. Ainsi, λ est une valeur propre si et seulement si $\phi - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas inversible. L'ensemble des valeurs propres de ϕ sont donc les racines du polynôme $\det(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$.

Exemple. *Trouver toutes les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et donner un vecteur associé à chacune.*

Lemme. *Toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est libre.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale $0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Quitte à ré-indicer les x_i et λ_i, on peut supposer que $\alpha_n \neq 0$.

Comme ϕ est linéaire, on a aussi $0 = \phi(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_n$. Soustrayons y λ_1 fois la première équation pour éliminer le terme en x_1 :

$$0 = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_1)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)x_n$$

En évaluant en ϕ à nouveau, on trouve $0 = \alpha_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n(\lambda_n - \lambda_1)x_n$ de quoi on peut soustraire λ_2 fois l'équation précédente pour éliminer le terme en x_2 :

$$0 = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)x_1 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)x_3 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_2)(\lambda_n - \lambda_1)x_n$$

Après $n-1$ itérations, on trouve

$$0 = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdots (\lambda_n - \lambda_2)(\lambda_n - \lambda_1)x_n;$$

comme les λ_i sont distincts et que $x_n \neq 0$, cela contredit l'hypothèse $\alpha_n \neq 0$. □

Cela montre que les valeurs et vecteurs propres sont des objets très contraints : lorsqu'un endomorphisme admet le maximum de n valeurs propres distinctes, alors tout n-uplet de vecteurs propres associés est une base.

Corollaire. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a pour déterminant $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$ et pour trace $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.*

Démonstration. Rappelons que ni le déterminant ni la trace d'une application linéaire ne dépendent de la base dans laquelle on écrit sa matrice. Prenons donc comme base une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i. La matrice est alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d'où le résultat. □

Ce résultat a un fort intérêt théorique ; lorsqu'un endomorphisme n'admet pas n valeurs propres distinctes, la situation est moins évidente et fera l'objet d'un chapitre à venir.

Exemple. *Pour calculer la trace et le déterminant de la symétrie d'axe $2x + y = 0$ dans le plan, plutôt que d'en écrire la matrice, on peut chercher deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.*

Nous terminons cette section par un exemple classique.

Proposition. *La matrice circulante de la famille $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\theta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, cette matrice admet comme vecteur propre

$$\begin{pmatrix} \theta^j \\ \theta^{2j} \\ \vdots \\ \theta^{(n-1)j} \\ \theta^{nj} \end{pmatrix}$$

avec la valeur propre $\sum_{i=1}^n x_i \theta^{ij}$. Son déterminant vaut donc $\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i \theta^{ij}$.

6.2 Sous espaces propres

Plus haut, nous avons pu écrire la matrice d'un endomorphisme diagonalement dans une base donnée par des vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes. Lorsque l'on relâche cette dernière condition, cela peut parfois se faire en décomposant l'espace vectoriel de manière plus rigoureuse.

Définition. *Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme ϕ. Le sous espace vectoriel* $\ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$ *s'appelle l'espace propre de ϕ pour λ. Il contient tous les vecteurs propres de ϕ associés à λ ainsi que le vecteur nul.*

On peut montrer, comme on l'a fait pour établir la liberté des familles de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, que ces espaces vectoriels sont en somme directe. On obtient ainsi.

Théorème. *Lorsqu'on a* $E = \bigoplus_\lambda \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$ *alors, dans une base composée de bases des sous espaces* $\ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$*, la matrice de ϕ s'écrit*

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \quad \ddots \quad \lambda_1}^{\dim(\ker(\phi-\lambda_1))} & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \quad \ddots \quad \lambda_2}^{\dim(\ker(\phi-\lambda_2))} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

et on dit alors que ϕ est diagonalisable. Inversement, s'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme ϕ est diagonale, il vérifie le critère ci-dessus.

À l'instar des matrices diagonales, les matrices diagonalisables sont relativement rares mais présentent de riches propriétés.

Exercice. *Diagonaliser les matrices ci-dessous lorsque cela est possible.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On voit ainsi l'importance du corps de base $\mathbb{K}$: notant M la seconde matrice, on peut trouver une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais pas dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Cela traduit le fait que le polynôme $\det(M - \lambda\,\mathrm{id})$ admet des racines complexes mais pas réelles.

6.3 Exercices

Exercice. *On considère la matrice M que voici :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? Décrire ses espaces propres. Donner une base dans laquelle M s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

puis en déduire une formule explicite pour $M^k \cdot {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice. *Montrer qu'une matrice M à diagonale prépondérante, c'est-à-dire dont les coefficients vérifient $\left|M_{i,i}\right| > \sum_{j \neq i} \left|M_{i,j}\right|$ pour tout i, est inversible.*

En déduire une borne sur les valeurs propres de M en fonction de ses coefficients.

Exercice. *Montrer que deux matrices A et B de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ont r valeurs propres communes si et seulement si l'équation $AX = XB$ admet une solution $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ de rang r.*

Chapitre 7

Polynômes d'endomorphismes

Évaluer des polynômes en des endomorphismes est une manière extrêmement efficace d'obtenir des informations sur ces endomorphismes — nous avons d'ailleurs déjà considéré plusieurs polynômes d'endomorphismes dans les chapitres précédents.

7.1 Rappels

Comme dans tout le reste de ce document, nous nous restreignons ici au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. *Un polynôme en une variable à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille finie $(p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $p_n \neq 0$; on le note $\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ et on appelle l'entier n son degré. L'ensemble de ces polynômes se note $\mathbb{K}[X]$.*

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on note $P(\alpha)$ la quantité $\sum_{k=0}^{n} p_k \alpha^k$.

Théorème (Division euclidienne)**.** *Soit P et D deux polynômes. Il existe deux uniques polynômes Q et R avec $\deg(R) < \deg(D)$ tels que $P = QD + R$.*

Proposition. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est tel que $P(\alpha) = 0$ on dit que α est une racine (ou zéro) de P ; alors, P est divisible par $(X - \alpha)$, c'est-à-dire que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice. *Vérifier que $x^3 - 1$ admet l'unité comme racine et calculer le polynôme Q associé.*

Définition. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé s'il peut se factoriser entièrement comme produit de facteurs linéaires, c'est-à-dire que $P(X) = c \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ avec $(\alpha_k) \in \mathbb{K}^n$.*

Exercice. *Lesquels des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants sont scindés ?*
- $X^2 - 2X + 1$
- $X^2 - 1$
- $X^2 + 1$

Théorème. *Tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.*

Définition. *Si $P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ on dit que α est une racine de multiplicité k. Lorsque $k = 1$ on dit que c'est une racine simple ; sinon on dit qu'elle est multiple.*

Théorème. *Soit $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{K}$ un sous-ensemble de K de cardinal n. Pour toute famille $(\beta_k) \in \mathbb{K}^n$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n qui vérifie $P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout k. On peut l'écrire explicitement :*

$$P(X) = \sum_i \beta_i \prod_{i \neq j} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

Exercice. *Trouver un tel polynôme pour* $(\alpha_1, \beta_1) = (1, -1)$ *et* $(\alpha_2, \beta_2) = (2, 2)$.

7.2 Propriétés élémentaires

Définition. *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *un polynôme et* $\phi \in \mathrm{End}(E)$ *un endomorphisme. Notant* $(p_0, \ldots, p_k)$ *les coefficients de* P*, on pose* $P(\phi) = p_k\phi^k + \cdots + p_1\phi + p_0 \,\mathrm{id}$.

Lemme. *Pour tous polynômes* P *et* Q*, tout endomorphisme* ϕ *et tout scalaire* λ*, on a :*

— $(\lambda P)(\phi)=\lambda P(\phi)$

— $(P+Q)(\phi)=P(\phi)+Q(\phi)$

— $(P\cdot Q)(\phi)=P(\phi)\circ Q(\phi)$

Pour un endomorphisme ϕ *donné, l'application*

$$\begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathrm{End}(E) \\ \quad P \longmapsto P(\phi) \end{cases}$$

est donc un morphisme d'algèbres commutatives.

Rappelons qu'en général deux deux endomorphismes d'un même espace vectoriel ne commutent pas. Cependant, deux polynômes en le même endomorphisme commutent. On dit que la sous algèbre de $\mathrm{End}(E)$ formée des polynômes en un endomorphisme donné est commutative.

Exercice. *Soit* A *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Soit* P *le polynôme* $X^2 - 3X + 1$. *Calculer* $P(A)$.

Exercice. *Pour quels polynômes* $P \in \{X, X+1, X-1, X-2, X^2+1, X^2-1, X^2-2, X^2-2X, X^3-2X^2, X^3-3X^2+2X\}$ *la matrice* $P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *n'est-elle pas inversible ? Même question pour la matrice* $P\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice. *Caractériser les polynômes* $P \in \mathbb{C}[X]$ *tels que* $P(\mathrm{id}) = 0$ *en la dimension de votre choix.*

Exercice. *Calculer l'espace vectoriel des polynômes en* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.3 Polynômes annulateurs

Les polynômes suivants sont tout particulièrement important en ce qu'ils révèlent beaucoup d'information sur un endomorphisme donné.

Définition. *Soit* ϕ *un endomorphisme. On appelle polynôme annulateur de* ϕ *tous les polynômes* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P(\phi) = 0$.

Théorème. *L'ensemble de ces polynômes forme un idéal de* $\mathbb{K}[X]$*, c'est à dire que :*

— *Si* $P(\phi) = 0$*, alors pour tout* Q *on a* $(PQ)(\phi) = 0$.

— *Si* $P(\phi) = 0$ *et* $Q(\phi) = 0$*, alors* $(P+Q)(\phi) = (P-Q)(\phi) = 0$.

Cet ensemble admet un plus petit polynôme unitaire μ_ϕ*, appelé le polynôme minimal de* ϕ.

Démonstration. Montrons d'abord que cet ensemble n'est pas réduit au polynôme nul. Si n est la dimension de E, alors la dimension de $\mathrm{End}(E)$ est n^2 ; les n^1+1 premières puissances de ϕ sont donc nécessairement une famille liée et admettent donc une relation linéaire non triviale.

L'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de ϕ non nuls n'est donc pas vide. Considérons son plus petit élément d et prenons un polynôme m annulateur de degré d ; quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut le rendre unitaire. Alors, soit un autre polynôme annulateur m' unitaire de degré d ; le polynôme $m-m'$ est non nul, annulateur et de degré au plus $d-1$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Exercice. *Trouver les polynômes minimaux de* $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

On dit qu'un endomorphisme ϕ est nilpotent s'il existe une puissance de ϕ nulle. C'est équivalent au fait que son espace caractéristique associé à 0 soit l'espace E entier.

Théorème. *Soit ϕ un endomorphisme de E vérifiant $E=\bigoplus_\lambda \ker(\phi-\lambda)^{k_\lambda}$ avec les exposants $k_\lambda\in\mathbb{N}$ les plus petits possibles. Alors $\mu_\phi(X)=\prod_\lambda(X-\lambda)^{k_\lambda}$.*

Nous verrons plus tard que la réciproque est aussi vraie. Comme les polynômes complexes sont tous produits de facteurs linéaires, cela montrera que les espaces caractéristiques de toute matrice complexe sont en somme directe supplémentaires.

7.4 Polynôme caractéristique

Définition. *On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme ϕ (d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$) le polynôme $\chi_\phi(X)=\det(\lambda\,\mathrm{id}-\phi)\in\mathbb{K}[\lambda]$.*

Commençons par un lemme gratuit mais bien utile pour vérifier ne pas dire de bêtises dans vos calculs.

Lemme. *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n est de degré n.*

Démonstration. Par récurrence sur n en développant $\det(\lambda\,\mathrm{id}-\phi)$ suivant la première colonne. □

L'utilité du polynôme caractéristique provient du théorème suivant.

Théorème (Cayley–Hamilton). *Tout polynôme caractéristique annule son endomorphisme : pour tout ϕ on a $\chi_\phi(\phi)=0$.*

Remarquer la véracité de ce théorème dans le cas des endomorphismes diagonalisables.

Démonstration. Fixons une base arbitraire et notons y M la matrice de ϕ. Considérons alors la matrice $N=\lambda\,\mathrm{id}-M$ à coefficients dans $\mathbb{K}[\lambda]$ et tout particulièrement la transposée de sa matrice des cofacteurs $\mathrm{ad}(N)$. On note $\chi_M(\lambda)=\det(N)=\sum_{k=0}^n c_k\lambda^k$ et $\mathrm{ad}(N)=\sum_{k=0}^{n-1}N_k\lambda^k$.

L'identité $N\,\mathrm{ad}(N)=\det(N)\,\mathrm{id}$ donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} c_k\lambda^k\,\mathrm{id} &= (\lambda\,\mathrm{id}-M)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k N_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\lambda^{k+1}N_k-\lambda^k MN_k\right)\\ &= \lambda^n N_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\,(N_{k-1}-MN_k)-MN_0\end{aligned}$$

d'ou l'on déduit
$$\begin{cases} c_n \,\mathrm{id} = N_{n-1} \\ c_k \,\mathrm{id} = (N_{k-1} - MN_k) \quad \text{lorsque } 1 < k < n \\ c_0 \,\mathrm{id} = -MN_0 \end{cases}$$

On trouve donc
$$\chi_M(M) = \sum_{k=0}^{n} c_i M^i = M^n N_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (M^k N_{k-1} - M^{k+1} N_k) - MN_0$$

qui est une somme télescopique triviale. □

Par un argument de dimension, on avait vu que la famille $(\mathrm{id}, M, M^2, M^3, \dots, M^{n^2-1})$ était nécessairement liée. Le résultat ci-dessus montre que les puissances d'une matrice ne forment pas des familles génériques vu que les n premiers termes sont déjà liés. Cela montre la forte structure que revêt l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel, et plus particulièrement leurs polynômes.

Ce résultat nous donne un moyen extrêmement efficace de trouver un polynôme annulateur. On peut alors déterminer le polynôme minimal en regardant lesquels des diviseurs du polynôme caractéristique annulent toujours la matrice.

Pour finir, raffinons le théorème ci-dessus en remarquant que chacun des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique apparaissent dans le polynôme minimal ; la seule différence réside donc en la multiplicité avec laquelle apparaissent ces facteurs.

Théorème (Cayley–Hamilton). *Chaque facteur irréductible du polynôme caractéristique d'un endomorphisme apparait dans son polynôme minimal.*

Démonstration. Sur $\mathbb{C}$, les facteurs irréductibles sont linéaires. Si $(X - \lambda)$ divise χ, alors l'endomorphisme admet un vecteur propre pour λ ; il ne peut être tué par aucun polynôme non divisible par $(X - \lambda)$. Cet argument est stable par conjugaison et redescends donc sur $\mathbb{R}$. □

Ainsi, si $\chi = \prod (X - \alpha_i)^{\beta_i}$, alors le polynôme minimal est de la forme $\prod (X - \alpha_i)^{\gamma_i}$ avec $\gamma_i \in \{1, \dots, \beta_i\}$.

7.5 Lemme des noyaux

Afin de pouvoir exploiter finement l'action des polynôme sur les endomorphismes, il faut tout d'abord établir le résultat clef suivant. Il montre qu'au produit de polynômes premiers entre eux correspond la somme directe de leurs noyaux.

Lemme (dit « des noyaux »). *Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et soient $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux. On a*
$$\bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(\phi)) = \ker\left(\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(\phi)\right).$$

Démonstration. Dans le cas $k = 2$ écrivons une relation de Bézout $uP + vQ = 1$.

L'inclusion $\subset$ est évidente. L'inclusion $\supset$ s'obtient en décomposant tout $z \in \mathbb{K}^n$ en $z = uP(\phi)(z) + vQ(\phi)(z)$. Si $PQ(\phi)$ annule z on a alors que $Q(\phi)$ annulle $uP(\phi)(z)$ et que $P(\phi)$ annulle $vQ(\phi)(z)$. La somme est directe car en évaluant la relation de Bézout en ϕ puis en tout élément $z \in \ker(P(\phi)) \cap \ker(Q(\phi))$ on trouve $z = 0$.

Le lemme s'en déduit par récurrence en posant $P = P_1 \cdots P_k$ et $Q = P_{k+1}$. □

Corollaire. *Si $P_1 \cdots P_k$ annule ϕ alors on a $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(\phi))$. Par ailleurs, la projection sur $\ker(P_i(\phi))$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker\left(P_j(\phi)\right)$ est un polynôme en ϕ.*

Démonstration. Considérons le cas $i = 1$. Il existe des polynômes u et v tels qu'on ait une relation de Bézout $uP_1 + vP_2 \cdots P_k = 1$. L'évaluation en ϕ du polynôme $vP_2 \cdots P_k$ donne alors la projection voulue. $\square$

7.6 Exercices

Exercice. *Calculer le polynôme caractéristique puis en déduire le polynôme minimal de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice. *Montrer que tous les polynômes unitaires de degré n qui sont produit de facteurs linéaires sont des polynômes caractéristiques de matrices $n \times n$.*

Généraliser ce résultat à tous les polynômes unitaires.

Les polynômes minimaux recouvrent-ils eux aussi l'ensemble des polynômes unitaires ?

Exercice. *La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ lorsque $n > 0$.*

Trouver une matrice $M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ telle que $M \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Diagonaliser M et en déduire une formule explicite pour le terme général F_n.

Exercice. *Soit M la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Rappeler ce que vaut $\det(M)$ et $\operatorname{tr}(M)$. Calculer $\operatorname{tr}(M^2)$. Exprimer $\det(M)$ en fonction de $\operatorname{tr}(M)$ et de $\operatorname{tr}(M^2)$.*

Écrire de même les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice 3×3 en fonction des traces de ses puissances.

Exercice. *Soit M une matrice carrée triangulaire de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Montrer la formule*

$$\chi_M(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sigma_{n-k} X^k$$

Posons donc $\sigma_k = \sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,n\} \\ \# S = k}} \prod_{i \in S} \lambda_i$ et rappelons que $\operatorname{tr}(M^k) = \sum_i \lambda_i^k$. Montrer que, pour tout k,

$$k\,\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} \operatorname{tr}(M^i).$$

En déduire que le coefficient en X^k du polynôme caractéristique de M s'exprime, de manière indépendante de M, en fonction de $\left(\operatorname{tr}(M), \operatorname{tr}(M^2), \ldots, \operatorname{tr}(M^{n-k})\right)$.

Généraliser ce résultat à toutes les matrices (non nécessairement triangulaires).

Exercice. *Montrer qu'une matrice réelle est nilpotente si et seulement si elle vérifie $\operatorname{tr}(A^n) = 0$ pour tout entier n.*

Exercice. *Soit une matrice* $x \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *de polynôme minimal* $\prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{r_i}$.

Soit une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *et un polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$ *qui interpole* f *sur le spectre de* x*, c'est-à-dire qui vérifie* $P^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$ *pour tout* $j \in \{0, \ldots, r_i - 1\}$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, m\}$. *Montrer que la matrice* $P(x)$ *ne dépend pas du polynôme* P *choisi ; on la note* $f(x)$.

Montrer que $\exp(x)$ *correspond à l'exponentielle matricielle classique.*

Montrer que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *et que* $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

Si x *est nilpotente montrer que, pour tout entier* i*, il existe une matrice* y *telle que* $(\mathrm{id} + y)^i = \mathrm{id} + x$.

Chapitre 8

Réduction des endomorphismes

Nous avons vu que, lorsqu'un endomorphisme admet une base de vecteurs propres (en particulier, lorsqu'il admet n valeurs propres distinctes), sa matrice est diagonale dans cette base. Cela facilite grandement l'étude de cet endomorphisme.

Certains endomorphismes ne sont toutefois pas diagonalisables. Nous allons maintenant voir que, sur un corps algébriquement clos, on peut cependant toujours trouver une base où ils s'écrivent sous forme triangulaire.

8.1 Sous espaces caractéristiques

La notion de sous espace propre n'est pas assez forte car, même dans le cas où le polynôme $\det(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$ est un produit de facteurs linéaires, on peut avoir $E \supsetneq \bigoplus_\lambda \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$ comme nous l'avons vu plus haut.

Plutôt que de se restreindre à $\ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$, on peut considérer le noyau des itérés de $\phi - \lambda\,\mathrm{id}$. Rappelons que la suite des noyaux des itérés d'un endomorphisme est croissante et qu'elle admet donc un limite puisqu'elle est bornée par E.

Définition. *Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme ϕ d'un espace vectoriel E. La limite de la suite* $\ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})^i$ *pour $i \in \mathbb{N}$ s'appelle le sous espace caractéristique de ϕ pour λ.*

Exemple. *Calculer le sous espace caractéristique pour* 1 *de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition. *Les sous espaces caractéristiques d'un endomorphisme ϕ sont en somme directe.*

Proposition. *La dimension de l'espace caractéristique associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.*

On peut donc ramener tout problème de réduction au cas où l'endomorphisme admet une ou zéro valeur propre.

8.2 Diagonalisation

Rappelons qu'un endomorphisme ϕ est diagonalisable si et seulement s'il admet une base de vecteurs propres, c'est-à-dire, si

$$E = \bigoplus_\lambda \ker(\phi - \lambda).$$

Théorème. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

Démonstration. Supposons que ϕ soit diagonalisable ; on donc $E = \bigoplus_\lambda \ker(\phi - \lambda)$. Le noyau du produit $\prod_\lambda(\phi - \lambda)$ contient évidemment les noyaux de tous ses facteurs, donc l'espace qu'ils engendrent, c'est-à-dire E. Ainsi, le polynôme $\prod_\lambda(\phi - \lambda)$ est annulateur. Le polynôme minimal en est un facteur et est donc lui aussi scindé à racines simples.

Soit maintenant un endomorphisme ϕ de polynôme minimal $\prod_\lambda(X - \lambda)$. étant annulateur, il vérifie $\prod_\lambda(\phi - \lambda) = 0$, c'est-à-dire $\sum \ker(\phi - \lambda) = E$. Comme les espaces $\ker(\phi - \lambda)$ sont supplémentaires pour des λ distincts, la somme est directe et ϕ est bien diagonalisable. □

Exercice. *Déterminer pour quelles valeurs de a et b les matrices ci-dessous sont diagonalisables.*

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.3 Triangularisation

Le problème de la triangularisation (parfois raccourci en « trigonalisation ») consiste, pour un endomorphisme donné, à trouver une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est bien évidemment scindé. C'est donc aussi le cas de toute matrice triangularisable. Nous allons maintenant montrer la réciproque.

Théorème. *Un endomorphisme est triangularisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé.*

Démonstration. Supposons donc que $\prod_\lambda(\phi - \lambda)^{k_\lambda} = 0$. Alors,

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_\lambda \ker(\phi - \lambda)^{k_\lambda}$$

Fixons donc un λ dont l'espace caractéristique associé $\ker(\phi - \lambda)^{k_\lambda}$ est non trivial. Si l'espace propre associé $\ker(\phi - \lambda)$ était trivial, l'endomorphisme $\phi - \lambda$ serait inversible et $(\phi - \lambda)^{k_\lambda}$ le serait aussi. On peut donc prendre un vecteur $x \in \ker(\phi - \lambda) \setminus \{0\}$.

Complétons ce vecteur propre en une base $(x, b_2, \ldots, b_n)$ de E. Dans cette base, la matrice de ϕ est

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

triangulariser ϕ revient alors à triangulariser la restriction $\phi' = \phi|_{\langle b_2,\ldots,b_n\rangle}^{\langle b_2,\ldots,b_n\rangle}$. Naturellement, ϕ' est annulé par tous les polynômes annulant ϕ ; on peut donc y appliquer le résultat par récurrence sur la dimension n de l'espace ambiant. □

Corollaire. *Sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, tous les endomorphismes sont triangularisables.*

Exercice. *Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont diagonalisables et triangulariser les autres.*

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 4 & 4 & -6 \\ 2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

8.4 Forme de Jordan

La triangularisation est une réduction peu satisfaisante, notamment car un même endomorphisme peut être triangularisé en une myriade de matrices différentes. Nous allons maintenant exploiter les résultats d'algèbre linéaire fins que nous avons amassés afin d'obtenir une réduction bien plus puissante, celle de Jordan.

Théorème. *Un endomorphisme admet un polynôme annulateur scindé si et seulement s'il existe une base où sa matrice est diagonale par blocs avec chaque bloc du type*

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ces blocs sont uniques à permutation près.

Démonstration. Supposons donc que $\prod_\lambda (\phi - \lambda)^{k_\lambda} = 0$. Alors,

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_\lambda \ker(\phi - \lambda)^{k_\lambda}$$

Choisissons par ailleurs, sans perte de généralité, les entiers k_λ minimaux. Chacun des espaces $\ker(\phi - \lambda)^{k_\lambda}$ est stable par ϕ ; en posant $\psi = (\phi - \lambda)|_{\ker(\phi-\lambda)^{k_\lambda}}^{\ker(\phi-\lambda)^{k_\lambda}}$, on se ramène donc au cas d'un endomorphisme ψ de polynôme minimal X^k.

Soit donc $x \notin \ker(\psi^{k-1})$. Dans une base commençant par $(x, \psi(x), \dots, \psi^{(k-1)}(x))$, la matrice de ψ commence par un bloc J_0 de taille k. Toute la difficulté consiste à montrer qu'il existe un supplémentaire de $\langle x, \psi(x), \dots, \psi^{(k-1)}(x)\rangle$ stable par ψ.

Pour cela, montrons le théorème ci-dessus par récurrence : si ψ est de polynôme minimal X^k, alors $\psi|_{\mathrm{im}(\psi)}^{\mathrm{im}(\psi)}$ est de polynôme minimal X^{k-1} et il existe une base de $\mathrm{im}(\psi)$ de la forme $\left(\psi^i(\psi(x_j))\right)_{i<\ell_j}$. La famille

$$\left(\psi^i(x_j)\right)_{i<\ell_j+1} = \left(\psi^i(x_j)\right)_{i<\ell_j} + \left(\psi^{\ell_j}(x_j)\right)$$

est donc libre et l'image par ψ du premier terme est une base de $\mathrm{im}(\psi)$. Le second terme est constitué d'éléments du noyau et on le complète en une base du noyau en rajoutant des x_j avec $\ell_j = 0$. □

Exercice. *Calculer la forme de Jordan des matrices ci-dessous.*

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 4 & 4 & -6 \\ 2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

8.5 Exercices

Exercice. *À quelle condition sur le couple de vecteurs $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ la matrice réelle ci-dessous est-elle diagonalisable ?*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice. *Soit la transformation suivante du plan :*

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x - 2y \\ \frac{-1}{3}x + y \end{pmatrix}$$

Étudier le comportement de la suite définie par $X_0 = (0, 1)$ *et* $X_{n+1} = f(X_n)$*.*

Comment pourrait-on étudier les itérés de la fonction $f : (x, y) \mapsto (y^2, \frac{x^3}{y^2})$ *?*

Exercice. *Posons* $R = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé.*

On appelle idéal à droite de R *tout sous ensemble* $\mathfrak{I}$ *de matrices vérifiant :*

$$\forall x \in \mathfrak{I}, -x \in \mathfrak{I} \qquad \forall (x, y) \in \mathfrak{I}^2, x + y \in \mathfrak{I} \qquad \forall (x, y) \in \mathfrak{I} \times R, x \cdot y \in \mathfrak{I}$$

Montrer que les idéaux à droite sont exactement les $\{M \in R : \mathrm{im}(M) \subset H\}$ *lorsque* H *décrit les sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$*. Traiter pareillement le cas des idéaux à droite ; leur définition est identique avec la condition* $x \cdot y \in \mathfrak{I}$ *est remplacée par* $y \cdot y \in \mathfrak{I}$*.*

Qu'en est-il des idéaux bilatères, c'est-à-dire des idéaux à la fois à gauche et à droite.

Exercice. *Soit* u *un endomorphisme diagonalisable de* $\mathbb{R}^n$*. Prouver que l'endomorphisme* $(v \mapsto u \circ v - v \circ u) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et les dimensions de ses espaces propres.*

Exercice. *Quels sont les endomorphismes* $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *pour lesquels l'endomorphisme* $(v \mapsto u \circ v) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *est-il diagonalisable ?*