Colles de mathématiques en CUPGE-MP

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

Ce recueil rassemble des exercices de mathématiques particulièrement pertinents dans le contexte des interrogations orales en classes préparatoires, communément appelées « colles ». Les filières concernées sont celles à dominante maths-physique, actuellement identifiées par diverses combinaisons des sigles CPGE/CUPGE MPSI/MP.

La correction est volontairement omise car elle ne revêt aucune importance : c'est uniquement en cherchant qu'un étudiant s'améliore réellement. Les multiples pistes de recherche offertes par ces énoncés sont justement leur principal critère de sélection ; aussi ne trouvera-t-on pas d'exercice « à astuce » hormis les plus classiques.

Note historique. En 2006 j'avais déjà rédigé un recueil d'exercices de colles [1]. Depuis, beaucoup a changé (le programme, les étudiants et moi) et pour celui-ci j'ai préféré repartir de zéro. L'intersection des deux recueils est néanmoins significative.

Table des matières

Chapitre 1

Premier semestre

1.1 Équations différentielles

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :
— Primitives et équations différentielles linéaires

1. *Montrer que la quantité* $\int_0^\pi \underbrace{\sin(\sin(\cdots\sin(}_{n \text{ fois}} x)\cdots))dx$ *tend vers zéro lorsque* $n \to \infty$.
Pour le cosinus, on se contentera de montrer l'existence d'une limite non nulle.

2. *Soient* k *et* ℓ *deux entiers. Que vaut la quantité* $\int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx$ *? Qu'obtient-on en effectuant le changement de variable* $t = \sin(x)^2$ *?*

3 (irrationalité de π). *Supposons* $\pi = \frac{a}{b}$ *avec* a, b *entiers. On considère la quantité* $\frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(bx-a)^n \sin(x)dx$. *Montrer que c'est un entier qui tend vers zéro lorsque* n *tend vers l'infini. Conclure.*

4 (intégrale de Gauss). *On rappelle l'encadrement* $(1-\frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x} \leqslant (1+\frac{x}{n})^{-n}$ *valable pour tout* $x \in [0, n]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Effectuer le changement de variable* $x = u^2$ *puis intégrer sur* $[0, \sqrt{n}]$. *Donner alors un équivalent de* $\int_0^\infty (1+u^2)^{-n} du$ *pour* $n \to \infty$. *On pourra utiliser la formule de Stirling* $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. *En déduire l'égalité* $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. *Déterminer toutes les fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *vérifiant* $xy' = x + y$ *et* $y(0) = y(1)$.

6. *Soit* y *une fonction vérifiant* $y' = y/x + \sqrt{x}$ *; que dire de son comportement en zéro ?*

7. *Existe-t-il des fonctions réelles vérifiant* $y^{(4)} + y'' = t$ *et* $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ *?*

1.2 Logique et fondements

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :
— Raisonnement et vocabulaire ensembliste
— Calculs algébriques
— Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs
— Structures algébriques usuelles
— Groupe symétrique (S2)

8. *On pose* $p \oplus q \iff \neg(p \iff q)$. *Montrer les identités* $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$ *puis* $p \wedge (q \oplus r) = (p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$. *Caractériser l'ensemble* C *défini par* $x \in C \iff x \in A \oplus x \in B$.

9. *Soient A, B et C trois ensembles de cardinal k. Supposant $|A \cap B| = |B \cap C| = k-1$, que dire de $|A \cap C|$?*

10. *Soit $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une fonction vérifiant $f(n+1) > f(f(n))$ pour tout n.*
Montrer par récurrence sur n l'implication $f(m) \leqslant n \Rightarrow m \leqslant n$. En déduire $f = \mathrm{id}$.

11. *Pour toute fonction $f : E \to E$ on note $c(f) = \#\{x \in E : f(x) = x\}$ son nombre de points fixes. Caractériser les ensembles finis E pour lesquels on a $\#E = \#\{f \in E^E : c(f) = 1\}$.*

12. *À quelle condition sur $f : E \to F$ l'application $f : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(F)$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Mêmes questions pour l'application $f^{-1} : \mathfrak{P}(F) \to \mathfrak{P}(E)$.*

13 (formule du crible). *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.*
Écrire une expression donnant $\mathbb{1}_{A \cup B \cup C}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.
Généraliser cette identité à l'union de k parties $A_1, \ldots, A_k$.

14. *Montrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si, pour toute fonction $f : E \to E$, il existe une partie H de E vérifiant $f(H) \subset H$ autre que l'ensemble vide et E lui-même.*

15 (théorème de Cantor–Bernstein). *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications injectives. Construire une application bijective de X vers Y. On pourra poser $X_0 = X \smallsetminus g(Y)$ puis $Y_k = f(X_k)$ et $X_{k+1} = g(Y_k)$; montrer alors que f réalise une bijection de $\bigcup X_k$ vers $\bigcup Y_k$.*

16. *Calculer la somme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(1)$. De même pour $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(\sigma(1))$.*

17. *On note d_n^k le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ admettant exactement k points fixes. Montrer la relation $d_n^k = C_n^k d_{n-k}^0$. En déduire l'identité $k d_n^k = n d_{n-1}^{k-1}$. Calculer alors le nombre moyen de points fixes des permutations de $\mathfrak{S}_n$.*

18. *Montrer qu'une famille $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $ad - bc \neq 0$ si et seulement si, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$ admet un unique couple (x, y) solution.*

19. *Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ quels que soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est un groupe pour la composition dont on caractérisera tous les sous groupes.*

20 (groupe quotient). *Soit G un groupe et H un sous-groupe notés multiplicativement. Montrer qu'on définit une relation d'équivalence en posant $x \mathcal{R} y \iff xy^{-1} \in H$. Montrer que chaque classe a exactement $|H|$ éléments. Supposant que, pour tout x, on a $xHx^{-1} = H$, montrer qu'on définit une loi de groupe sur $G/\mathcal{R}$ en posant $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{xy}$.*

21. *Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les cycles d'ordre trois.*

22 (inversion de Möbius). *On muni l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{C}$ de l'addition point par point et du produit défini par $f \star g : n \in \mathbb{N}^\star \mapsto \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$. Montrer que cela en fait un anneau commutatif. En caractériser les éléments inversibles.*

Considérons maintenant la fonction $\mu(n)$ qui vaut $(-1)^r$ lorsque n est le produit de r nombres premiers distincts et s'annule lorsque n admet un facteur carré. Calculer $\mu \star (n \mapsto 1)$. En déduire l'équivalence

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \iff \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

23. *On note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs d'un entier n. Montrer que la suite de terme général $\frac{d(n)}{n}$ converge.*

24 (formule de Legendre). *Soit p un nombre premier et n un entier naturel. Montrer l'identité $v_p(n!) = \sum_{k\in\mathbb{N}^\star} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. En déduire par combien de zéros l'écriture décimale de $(10^n)!$ se termine.*

25. *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Si p est premier, en déduire que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ contient au plus $\varphi(d)$ éléments d'ordre d. Conclure que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

26. *Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ l'existence d'un entier u premier à p tel que $(1+p)^{p^k} = 1 + u\,p^{k+1}$. En déduire que $1+p$ est d'ordre p^{k-1} dans $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$. Avec l'exercice précédent, conclure que $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

1.3 Introduction à l'analyse

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :
- Nombres complexes et trigonométrie
- Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes
- Polynômes et fractions rationnelles
- Analyse asymptotique

27. *Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels $a^n - b^n$ tend vers zéro.*

28 (transformations linéaires du plan). *On considère le groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans lui-même. Montrer que chaque ensemble ci-dessous en est un sous-groupe commutatif :*
- $\mathscr{D} = \{z \mapsto \rho z : \rho \in \mathbb{R}^\star\}$
- $\mathscr{R} = \{z \mapsto e^{i\theta} z : \theta \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{I} = \{\mathrm{id}, z \mapsto \overline{z}\}$

Déterminer leurs sous-groupes finis. Montrer que $\mathscr{D} \cup \mathscr{R}$ et $\mathscr{D} \cup \mathscr{I}$ engendrent chacun un sous-groupe commutatif, mais que ce n'est pas le cas de $\mathscr{R} \cup \mathscr{I}$.

29 (théorème d'Alembert–Gauss). *Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine. On pourra montrer que $z \in \mathbb{C} \mapsto |P(z)| \in \mathbb{R}_+$ admet un minimum absolu puis, notant α une préimage de ce minimum, développer $P(\alpha + z)$.*

30 (polynômes de Hilbert). *On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. Déterminer son noyau et son image. On pose maintenant $H_k(X) = \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+1)$; montrer l'identité $P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\Delta^{\circ(k)}P)(0)H_k(X)$. En déduire un méthode pour calculer $\sum_{k=0}^n P(k)$.*

31 (identités de Newton). *Considérons un polynôme complexe unitaire scindé à racines simples ; on note $(x_i)_{i=1}^n$ ses racines et $(c_k)_{k=0}^n$ ses coefficients. Montrer que c_k s'exprime comme un polynôme de degré $k+1$ en les x_i.*

32 (séries formelles). *On appelle série formelle toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mais que, dans ce contexte, on notera $\sum_{k=0}^\infty a_k X^k$. On définit alors deux lois :*

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=1}^\infty b_k X^k\right) = \left(\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k) X^k\right)$$
$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=1}^\infty b_k X^k\right) = \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{\ell=0}^k a_\ell b_{k-\ell}\right) X^k\right)$$

Montrer que cela forme un anneau commutatif. En caractériser les éléments inversibles. Construire enfin un corps contenant cet anneau.

33. *Montrer qu'un polynôme P est premier avec sa dérivée P' si et seulement s'il n'admet pas de facteur carré.*

34 (polynômes de Bernoulli et relation de distribution). *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $B_n \in \mathbb{Q}[x]$ vérifiant $\int_y^{y+1} B_n(x)dx = y^n$. Établir alors, pour tout entier m, l'identité $B_n(t) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{t+k}{m}\right)$.*

35. *Déterminer les couples de fractions rationnelles $(Q, R) \in \mathbb{C}(X)^2$ tels que $Q(R(X)) = X$.*

36. *Soit k et n deux entiers. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{x^k}{x^{2n}+1}$.*

37 (polynômes de Bernoulli). *Montrer l'existence et l'unicité de la famille de polynômes $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant l'identité $\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^n B_k(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ en $t \to 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité $B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_{n-k} x^k$ où $b_k = B_k(0)$. Calculer $B_k(x+1) - B_k(x)$ puis en déduire une relation de récurrence sur les b_k.*

1.4 Analyse réelle

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :
— Inégalités dans R
— Nombres réels et suites numériques
— Limites et continuité
— Dérivabilité

38. *Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Que dire du comportement asymptotique de $\frac{f(n)}{n}$?*

39 (théorème de Beatty). *On appelle densité d'une partie X de $\mathbb{N}^\star$ la limite, lorsqu'elle existe, de la quantité $\frac{1}{n}|X \cap \{1, \ldots, n\}|$. Donner une partie n'admettant pas de densité. Montrer que la densité d'une union disjointe est la somme des densités. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$ donné, calculer la densité de $X_x = \{E(nx) : n \in \mathbb{N}^\star\}$. En déduire que $\mathbb{N}^\star$ est l'union disjointe de X_x et X_y si et seulement si x et y sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.*

40 (sous-groupes de $\mathbb{R}$). *Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense soit de la forme $x\mathbb{Z}$. En déduire que si p est un entier non carré alors la partie fractionnaire de $n\sqrt{p}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est dense dans $[0,1]$.*

41. *Déterminer tous les morphismes de l'anneau des suites convergentes d'entiers relatifs.*

42 (moyenne de Cesàro). *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro lorsque la suite de terme général $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ converge. Montrer qu'une suite convergente converge au sens de Cesàro. Que dire de la réciproque ?*

43 (constante d'Euler). *Montrer que la quantité $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$ converge pour $n \to \infty$.*

44. *Caractériser les suites u et v vérifiant $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ pour $n \to \infty$.*

45. *Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe une fonction g telle qu'en l'infini on ait $f_k = o(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

46. *Soit $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une fonction f admettant en $x = 0$ un développement de la forme $f(x) = x - ax^b + o(x^b)$ avec $a > 0$ et $b > 1$. On suppose aussi u_0 positif et suffisamment petit. Déterminer un réel α pour lequel la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admet une limite non nulle. En déduire un équivalent de u_n. Que trouve-t-on pour $f = \sin$?*

47. *On considère la suite $u_n = \sin(\log(n))$. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers zéro. En déduire que l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. De même pour $v_n = n^{1/3}\cos(\sqrt{n})$.*

48. *Pour quels entiers n existe-t-il une fonction réelle continue prenant exactement n fois chaque valeur ?*

49. *Pour tout $\omega > 1$ on note Z_ω l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in]\frac{1}{\omega}, \omega[$. Montrer que Z_ω n'est pas un groupe pour la composition. Montrer que c'est néanmoins le cas de $\bigcup_{\omega\in\mathbb{N}} Z_\omega$.*

50. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet une solution. Que dire pour $f(x) = x - \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(n\pi)}$ lorsque $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$?*

51. *Soit f une fonction vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que $f + g$ est croissante. Montrer que f admet un zéro sur $]0, 1[$.*

52. *Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est prolongeable par continuité en zéro ; on note f son prolongement. Calculer f' puis f''. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

53. *Soit f une fonction continue pour laquelle la quantité $f(x + 1) - f(x)$ converge en $x \to \infty$. Montrer que $f(x)/x$ admet cette même limite.*

54 (inégalités de Kronecker)**.** *Pour $f \in \mathscr{C}^n([0, 1], \mathbb{R})$ fixée on pose $M_k = \sup |f^{(k)}|$. Établir l'égalité $M_k \leqslant 2^{\frac{1}{2}k(n-k)} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$ quels que soient les entiers $0 \leqslant k \leqslant n$.*

55 (fonctions convexes)**.** *Une fonction réelle f est dite convexe si elle vérifie $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ pour tous réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in [0, 1]$. Montrer qu'une telle fonction est continue puis que l'ensemble sur lequel elle atteint son minimum est un intervalle. Expliciter cet intervalle pour $f : x \mapsto \sum |x - y_i|^p$ avec $(y_i) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty[$ fixés. Revenant au cas général, montrer qu'une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.*

56. *Caractériser explicitement les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ vérifiant $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.*

57. *Caractériser explicitement les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f \circ f = f$.*

Chapitre 2

Second semestre

2.1 Algèbre linéaire

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :

— Espaces vectoriels
— Espaces de dimension finie
— Applications linéaires
— Sous-espaces affines d'un espace vectoriel
— Matrices et applications linéaires
— Calcul matriciel
— Changements de bases, équivalence et similitude
— Opérations élémentaires et systèmes linéaires
— Déterminants

58. *Montrer qu'aucun espace vectoriel sur un corps infini n'est union finie de sous-espaces propres.*

59. *Montrer que l'ensemble des fonctions f continues vérifiant $\int_0^1 f = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. En donner un supplémentaire.*

60. *Montrer que toute famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant* $\deg(P_k) = k$ *est une base de* $\mathbb{C}[X]$.

61 (formules de Grassmann). *Combien y a-t-il de familles libres à k éléments dans un espace vectoriel de dimension n sur un corps à q éléments ? Et de sous-espaces vectoriels de dimension k ?*

62. *Soient E et F deux sous-espaces d'un espace vectoriel donné. Démontrer l'identité* $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E\cap F)$.

63. *Soient E et F deux sous-espaces d'un espace vectoriel donné. Montrer que s'ils admettent un supplémentaire commun alors ils sont de même dimension.*

64. *Montrer que des sous-espaces vectoriels $E_1,\dots,E_k$ sont en somme directe si et seulement si* $\dim(E_1)+\cdots+\dim(E_k) = \dim(E_1+\cdots+E_k)$.

65 (suite des images). *Soit φ une application linéaire. Montrer que la suite* $\mathrm{rg}(\varphi^n)$ *est décroissante et convexe.*

66. *Soit p et q deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$. Exprimer alors son image et son noyau en fonction de ceux de p et q.*

67. *Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose $\sum_{i=1}^k \varphi_i = \mathrm{id}$ et $\sum_{i=1}^k \mathrm{rg}(\varphi_i) \leqslant n$. Montrer que ces endomorphismes sont des projecteurs.*

68 (idéaux d'endomorphismes). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que $(\mathrm{End}(E), +, \circ)$ est un anneau. Caractériser tous les sous-groupes $(\mathfrak{I}, +)$ de $(\mathrm{End}(E), +)$ vérifiant $\forall \varphi \in \mathrm{End}(E), \forall \iota \in \mathfrak{I}, \varphi \circ \iota \in \mathfrak{I}$.*

69. *Montrer l'inversibilité de toute matrice M vérifiant $|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$ pour tout i.*

70. *Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application non constante vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ quels que soient A et B. Montrer qu'une matrice M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.*

71. *Montrer que toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Caractériser celles vérifiant $f(MN) = f(NM)$.*

72 (résultant). *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. On pose $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$. Écrire la matrice du morphisme $(U, V) \in \mathbb{Q}_{q-1}[X] \times \mathbb{Q}_{p-1}[X] \mapsto UP + VQ$ dans la base canonique. À quelle condition est-il inversible ? En déduire tous les polynômes de la forme $X^3 + aX + b$ admettant une racine multiple.*

2.2 Séries et intégration

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :
— Séries numériques
— Intégration
— Espaces préhilbertiens réels

73. *Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Quelle est sa somme ? On réordonne à présent ses termes pour alternant p termes positifs avec q termes négatifs. Que devient la somme ?*

74. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^\star)$ une fonction vérifiant $\lim_\infty \frac{f'}{f} = -\infty$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge et donner un équivalent de son reste.*

75. *Pour tout $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ montrer que la quantité $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge lorsque $n \to \infty$. Et si l'on suppose seulement $f \in \mathscr{C}^0(]0,1], \mathbb{R})$?*

76 (lemme de Lebesgue). *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Montrer que la quantité $\int_a^b f(t)g(nt)dt$ tend, lorsque $n \to \infty$, vers $\left(\frac{1}{T}\int_0^T g\right)\int_a^b f$.*

77. *Étant donnée $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^\star)$ on pose $m_s(f) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^s dx\right)^{1/s}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^\star$. Déterminer la limite de cette quantité lorsque $s \to 0, +\infty$ puis $-\infty$.*

78. *Montrer que toute fonction réelle continue d'intégrale unité sur $[0, \sqrt{2}]$ admet un point fixe.*

79. *Calculer la limite de la suite $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ en utilisant une formule de Taylor pour $x \mapsto \ln(1+x)$.*

80. *Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Démontrer que $\sqrt{f}$ est dérivable si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$.*

81. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(\alpha) = \alpha$. Discuter en fonction de $f'(\alpha)$ du comportement asymptotique des suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

82. *Montrer que l'espace* $\mathbb{R}^n$ *contient* k *vecteurs* v_i *pour lesquels* $i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle < 0$ *si et seulement si* $k \leqslant n+1$.

83 (polynômes orthogonaux). *Soit la fonction* $p : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ *définie sur* $I =]-1,1[$. *On muni l'espace* $\mathbb{R}[X]$ *du produit scalaire* $\langle P, Q \rangle = \int_I PQ\,p$ *et on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base canonique* (X^k) *afin d'obtenir des polynômes* (P_k).

Montrer que P_k *est scindé à racines simples sur* I. *Prouver l'existence de deux suites réelles* λ *et* μ *vérifiant* $P_k = (x+\lambda_k)P_{k-1} - \mu_k P_{k-2}$ *; établir* $\mu_k > 0$. *Montrer que les racines de* P_k *sont entrelacées avec celles de* P_{k-1}. *Généraliser ces résultats à une classe plus générale de fonctions* p.

2.3 Probabilités et statistiques

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [2] :
— Dénombrement
— Probabilités sur un univers fini
— Variables aléatoires sur un espace probabilisé fin

84. *Combien y a-t-il de fonctions croissantes de* $\{1,\ldots,n\}$ *dans* $\{1,\ldots,m\}$ *?*

85. *Établir que le nombre* r_n *de relations d'équivalences sur un ensemble à* n *éléments vérifie la relation de récurrence* $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k r_k$.

86. *Que dire du nombre de fonctions de la forme* $f \circ f$ *avec* $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ *?*

87. *Montrer que si un ensemble* E *est indénombrable alors l'ensemble des fonctions* $f : E \to E$ *vérifiant* $f \circ f = \mathrm{id}$ *l'est aussi. Montrer que la réciproque est fausse.*

88. *On muni* $\mathbb{R}$ *de la tribu engendrée par les intervalles ouverts. Montrer que pour toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *d'intégrale unité on définit une loi de probabilité en posant* $P(]\alpha,\beta[) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. *Cette construction permet-elle d'obtenir toutes les lois possibles ?*

89. *Soit* (E_k) *une suite croissante d'évènements. Montrer que* $P(E_{k+1} \setminus E_k)$ *converge.*

90 (lemme de Borel–Cantelli). *Étant donnée une suite d'évènements* (E_k) *on pose* $F = \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} E_k$ *(intuitivement « une infinité des* E_k *se réalise »). Montrer que si* $\sum P(E_k)$ *converge alors* $P(F) = 0$. *Supposant les* E_k *indépendants, montrer* $P(F) = 1$ *dans le cas inverse.*

91. *On considère la loi de probabilité uniforme sur un espace* Ω *dont le cardinal est un nombre premier. Montrer que deux évènements non triviaux ne peuvent être indépendants.*

92. *Supposant les anniversaires des étudiants indépendants et uniforméments distribués sur les 365 jours de l'année, quel est l'effectif minimum pour qu'une classe compte, avec probabilité* $\geqslant 1/2$ *deux étudiants ayant le même anniversaire.*

93. *Soit* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur* $\{-1,+1\}$ *; on pose* $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Montrer que presque sûrement la suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *prend une infinité de valeurs nulles.*

94. *Chaque seconde, la terre est traversée par environ* $8 \cdot 10^{28}$ *neutrinos. La probabilité que l'un d'entre eux interagisse avec un mètre linéaire d'eau est de* 10^{-23}. *On note* X *le nombre de neutrinos détectés annuellement par* 10^4 *tonnes d'eau. Quelle est la loi de* X *? Donner un minorant de* X *fiable à 99%. Est-il plus avantageux d'utiliser un détecteur de dix mille tonnes ou dix détecteurs de mille tonnes chacun ?*

95. *On modélise l'arrivée de clients dans une boulangerie par un processus de Poisson : sur tout intervalle de ℓ minutes, la probabilité qu'exactement k clients débarquent est $\frac{(\lambda\ell)^k}{k!}e^{-\lambda\ell}$ où la constante λ dénote le nombre moyen de client débarquant par minute. Si l'unique serveuse traite μ clients par minute, montrer que le temps d'attente moyen est $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$. Qu'en advient-il si la boulangerie embauche une seconde serveuse ?*

Chapitre 3

Troisième semestre

3.1 Suites et séries de fonctions

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [3] :
— Séries numériques et vectorielles
— Familles sommables de nombres complexes
— Suites et séries de fonctions
— Séries entières

96 (série harmonique). *On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$. Montrer l'équivalence $H_n \sim \ln(n)$. Établir que $H_n - \ln(n)$ admet une limite γ. Montrer l'équivalence $H_n - \ln(n) - \gamma \sim \frac{1}{2n}$. Poursuivre cette démarche afin d'obtenir le développement $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \cdots$.*

97. *Déterminer la nature de la série des inverses des nombres premiers.*

98. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^\star)$ une fonction vérifiant $\lim_\infty \frac{f'}{f} = -\infty$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge et donner un équivalent de son reste.*

99. *Soit une série convergente non absolument convergente. Montrer que, pour tout réel ℓ, il existe une permutation de ses termes pour laquelle elle admet ℓ comme limite.*

100. *Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Quelle est sa somme ? On réordonne à présent ses termes pour alternant p termes positifs avec q termes négatifs. Que devient la somme ?*

101 (produit de Cauchy). *Soient deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$. Leur produit de Cauchy est la série $\sum z_n$ de terme général $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Montrer que si les deux séries convergent absolument, leur produit de Cauchy aussi. Montrer que si les deux séries convergent simplement, leur produit de Cauchy converge au sens de Cesàro.*

102. *Étudier la convergence de la suite $f_0 = 1$ et $f_n : x \in [0,1] \mapsto 1 + \int_0^x f_{n-1}(t - t^2)\,dt$.*

103. *Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} x^k$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $\arctan\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$.*

104. *Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ converge sur $]-1,1[$ vers $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.*

105. *Pour $x \notin \mathbb{Z}$ on pose $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$ et $g(x) = \frac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2}$. Montrer que $f - g$ admet un prolongement h continue sur $\mathbb{R}$. Soit H l'opérateur sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ associant à i la fonction $x \mapsto i\left(\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Montrer l'inclusion $\mathrm{sp}(H) \subset [-2,2]$, calculer $H(h)$ puis en déduire $f = g$.*

106. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne s'annullant sur aucun intervalle de longueur non nulle. Montrer que l'ensemble des zéros de f est dénombrable.*

107. *L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ sur lui-même est-il dénombrable ?*

3.2 Réduction des endomorphismes

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [3] :

— Structures algébriques usuelles

— Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

108 (groupe de Prüfer). *Soit p un nombre premier. Montrer que $\{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$. Montrer que tous ses sous-groupes stricts sont monogènes. En déduire qu'il n'est pas isomorphe au produit de deux groupes non triviaux.*

109 (indépendance linéaire des caractères). *Montrer que toute famille de morphismes distincts d'un groupe G vers le groupe multiplicatif d'un corps $\mathbb{K}$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{K}$.*

110 (inversion de Möbius). *On muni l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{C}$ de l'addition point par point et du produit défini par $f \star g : n \in \mathbb{N}^\star \mapsto \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$. Montrer que cela en fait un anneau commutatif. En caractériser les éléments inversibles.*

Considérons maintenant la fonction $\mu(n)$ qui vaut $(-1)^r$ lorsque n est le produit de r nombres premiers distincts et s'annule lorsque n admet un facteur carré. Calculer $\mu \star (n \mapsto 1)$. En déduire l'équivalence

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Longleftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

111. *Quels sont les idéaux à droite de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$? Et à gauche ? Et les bilatères ?*

112 (théorème chinois). *Soit G un groupe d'ordre pq avec* $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. *Montrer que G est isomorphe au produit de* $\ker(x \mapsto x^p)$ *et* $\ker(x \mapsto x^q)$.

113. *Que vaut la somme $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$?*

114 (groupe multiplicatif d'un corps). *Établir l'égalité $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$ où φ dénote la fonction indicatrice d'Euler. En utilisant le fait que le polynôme $X^n - 1$ admet au plus n racines, en déduire que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique.*

115. *À quelle condition sur $P \in \mathbb{C}[x]$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P(M) = 0$ est-il compact ? Même question dans le cas réel.*

116. *Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a* $\mathrm{tr}(A^n) = 0$.

117 (calcul fonctionnel). *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et $x \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit P un polynôme interpolant f sur $\mathrm{sp}(x)$; autrement dit, si $\prod (X-\lambda)^{k_\lambda}$ est le polynôme minimal de x alors $P^{(k)}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda)$ pour $0 \leqslant k < k_\lambda$. On pose $\psi_x(f) = P(x)$; montrer que cette quantité ne dépend pas du polynôme P choisi. Montrer que ψ_x est un morphisme d'algèbre. En déduire que pour x nilpotent l'équation $(\mathrm{id} + y)^k = \mathrm{id} + x$ admet une solution y.*

118. *Montrer que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ont k valeurs propres communes si et seulement si l'équation $AX = XB$ admet une solution $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang k.*

119. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que le sous espace $F_\lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^\star} \ker\left((M - \lambda\,\mathrm{id})^k\right)$ est stable par M. Établir que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}} F_\mu$. Montrer que la projection sur F_λ suivant $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} F_\mu$ est un polynôme en M.*

120. *À quelle condition sur* $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ *la matrice ci-dessous est-elle diagonalisable ?*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

121. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathrm{End}(E)$ *diagonalisable. On pose* $\widehat{u} : v \in \mathrm{End}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$. *Montrer que* $\widehat{u} \in \mathrm{End}(\mathrm{End}(E))$ *est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.*

122. *Montrer qu'une matrice carrée de rang unité est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.*

123. *Pour quelles matrices* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *la matrice par bloc* $\begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

124. *Pour quelles parties* $R \subset \{0, \ldots, n\}$ *l'ensemble des matrices* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $\mathrm{rg}(M) \in R$ *est-il connexe par arc ?*

3.3 Géométrie

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [3] :
— Topologie des espaces vectoriels normés
— Fonctions vectorielles, arcs paramétrés
— Fonctions convexes

125. *Pour toute partie* X *d'un espace vectoriel normé* E *on note* X' *l'ensemble des points* $a \in E$ *adhérents à* $X \smallsetminus \{a\}$. *Caractériser le cas* $X' = \varnothing$. *Montrer* $X'' \subset X'$. *Posant* $X^{(\omega)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X^{(k)}$, *peut-on avoir* $X^{(\omega+1)} \subsetneq X^{(\omega)}$ *?*

126. *Donner deux normes distinctes sur* $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+)$ *dont le quotient n'est pas borné.*

127 (théorème de Bolzano–Weirestrass)**.** *Montrer que de toute suite bornée de* $\mathbb{R}^n$ *on peut extraire une sous-suite convergente. Donner un contre-exemple en dimension infinie.*

128. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. Montrer qu'on définit une norme de* $\mathrm{End}(E)$ *en posant* $|||\varphi||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}$. *Obtient-on ainsi toutes ses normes ?*

129 (théorème de Banach–Steinhaus)**.** *Soit* E *un espace vectoriel normé de dimension finie sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* E *est un espace de Baire, c'est-à-dire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

130. *Montrer que tout sous groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *admettant l'identité comme point intérieur est ouvert et fermé. Qu'en déduire ?*

131. *Soit* E *un espace normé et* $f : E \to E$ *continue laissant stable un compact et vérifiant* $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ *pour tout* $x \neq y$. *Montrer que* f *admet un point fixe.*

132. *Soit* C *une partie compacte d'un espace normé. Montrer que de tout recouvrement de* C *par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Soit maintenant* $f_n : C \to \mathbb{R}$ *une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction* f *continue ; en considérant les ensembles* $\{x \in C : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ *pour* $\varepsilon > 0$ *fixé, montrer que la convergence est uniforme.*

133. *On note $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels. La partie $(\mathbb{Q} \times \overline{\mathbb{Q}}) \cup (\overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q})$ du plan $\mathbb{R}^2$ est-elle connexe ? Et la partie $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup (\overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}})$?*

134. *On appelle épigraphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant f(x)\}$. Montrer que c'est une partie convexe du plan si et seulement si f vérifit $f\left(\frac{\lambda a+\mu b}{\lambda+\mu}\right) \leqslant \frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{\lambda+\mu}$ quels que soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$. Montrer que si f est dérivable cela équivaut à la croissance de f'.*

135. *Pour $x = (x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$ et $\alpha \neq 0$ on pose $M_\alpha(x) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto M_\alpha(x)$ est croissante. Déterminer ses limites en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.*

136. *Notons $m(f)$ l'ensemble sur lequel une fonction réelle f atteint son minimum. Montrer que si f est convexe alors $m(f)$ est un intervalle. Soit maintenant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n |x-\alpha_k|^\beta$ où $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont fixés. Montrer qu'elle est convexe dès lors que $\beta \geqslant 1$. Montrer que $m(f)$ est réduit à un singleton dès lors que $\beta > 1$. Caractériser $m(f)$ lorsque $\beta = 1$.*

137 (inégalité de Jensen)**.** *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$ et ϕ une fonction réelle convexe sur* $\mathrm{im}(f)$*. Établir l'inégalité $\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi \circ f$.*

138. *Caractériser les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ continues vérifiant $\int \|f\| = \|\int f\|$.*

139. *Montrer qu'aucune fonction de classe $\mathscr{C}^1\left([0, 1], [0, 1]^2\right)$ n'est surjective.*

Chapitre 4

Quatrième semestre

4.1 Intégration

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [3] :
— Intégration sur un intervalle quelconque

4.2 Analyse hilbertienne

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [3] :
— Espaces préhilbertiens réels, endomorphismes des espaces euclidiens
— Variables aléatoires discrètes

4.3 Calcul différentiel

Cette unité d'enseignement regroupe les chapitres suivants du programme officiel [3] :
— Équations différentielles linéaires
— Calcul différentiel

140. *Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on considère l'endomorphisme D de dérivation. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

— *Les racines de P sont toutes de partie réelle strictement négative.*
— *Pour tout f, si $P(D)(f) \to_\infty 0$, alors $f \to_\infty 0$.*

Le programme officiel exclut désormais le théorème de Cauchy–Lipschitz et avec lui toute la théorie générale des équations différentielles. Les ingénieurs de demain s'imagineront donc que toute équation est linéaire. Profondément inquiets du monde que cela forgera, nous donnons ci-dessous quelques exercices faisant appel à ces notions qui selon nous contribuaient grandement à l'ouverture d'esprit des étudiants.

141. *On considère l'équation $y' = \cos(y) + \cos(x)$. En déterminer toutes les symétries. Montrer que toute solution y est croissante (resp. décroissante) au voisinage de α lorsque $y(\alpha) = 0$ (resp. $y(\alpha) = \pi$); on pourra s'aider d'un développement limité. En déduire que toutes les solutions sont bornées et définies sur $\mathbb{R}$. Montrer enfin que cette équation admet des solutions périodiques ; on pourra pour cela voir qu'il suffit que $y(0) = y(2\pi)$. Consulter la figure 4.1.*

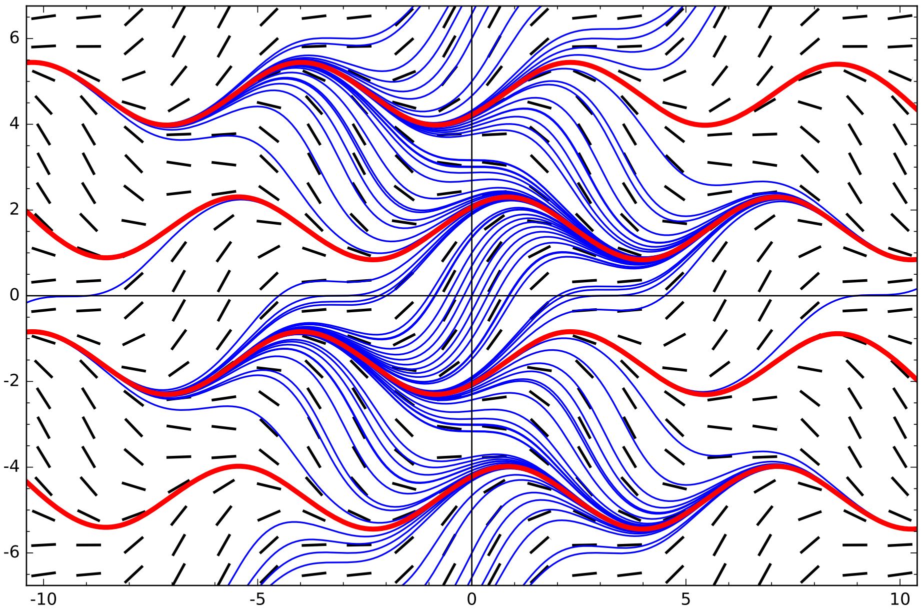

FIGURE 4.1 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = \cos(y) + \cos(x)$. En rouge, les solutions périodiques.

142. *Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $W \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ vérifiant $x = W(x)e^{W(x)}$. Vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{x(1+y)}$. Esquisser ses courbes intégrales. Consulter la figure 4.2.*

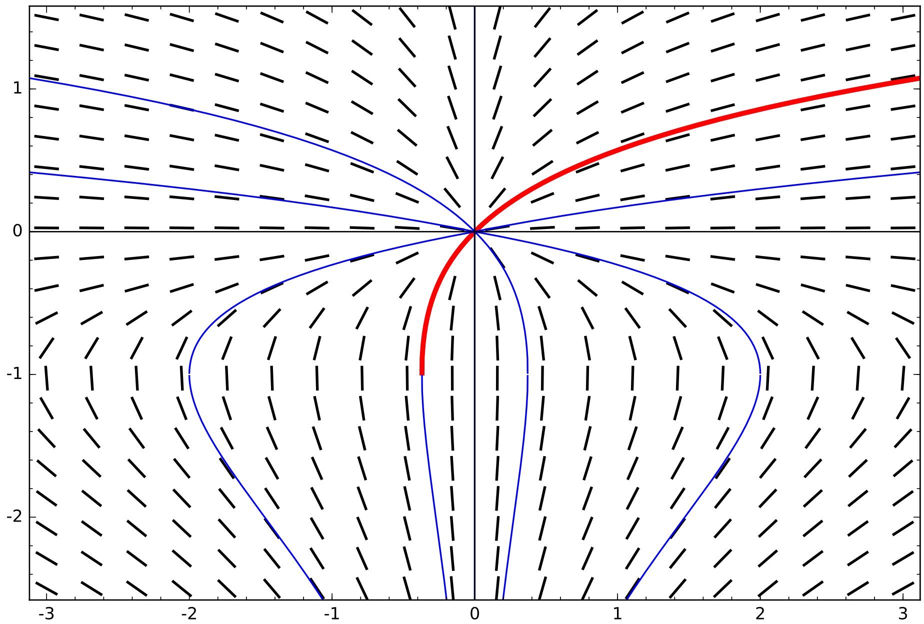

FIGURE 4.2 – Champ de vecteurs et solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{x(1+y)}$. En rouge, la fonction W de Lambert.

Chapitre 5

Sujets d'annales

Actuellement restreint au programme suivant :
— Topologie des espaces vectoriels normés
— Fonctions vectorielles, arcs paramétrés
— Fonctions convexes
— Équations différentielles linéaires
— Calcul différentiel

143. *Soit E un espace vectoriel réel normé arbitraire. Pour toute partie $X \subset E$, on définit une application $d_X : y \in E \mapsto \inf_{x\in X} \|x-y\|$.*

a) Montrer que l'assertion $d_X(y)=0$ équivaut à $y \in \overline{X}$.

b) Montrer que si X est convexe alors il en va de même pour $\overline{X}$.

c) Montrer que si X est un sous espace vectoriel alors il en va de même pour $\overline{X}$.

144.

a) Montrer, pour toute application linéaire $f : E \to F$, allant d'un espace vectoriel réel normé vers un autre, l'équivalence des assertions suivantes.
— *L'application f est continue.*
— *L'application f est continue en 0.*
— *Il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \gamma \|x\|$.*

b) Montrer qu'on définit deux normes sur l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ en posant $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.

c) Montrer la continuité de l'application $\|\cdot\|_1$ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $\mathbb{R}$.

d) Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

145.

a) Montrer que l'ensemble E des suites réelles convergeant vers zéro est un espace vectoriel.

b) Montrer qu'on définit une norme sur E en posant $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

c) Démontrer que l'application $x \in E \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x_k}{2^k}$ est bien définie.

d) Montrer qu'elle est continue pour la norme ci-dessus.

146. *Résoudre l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis $\mathbb{R}_-^\star$ puis $\mathbb{R}$.*

147. *On se place dans un espace vectoriel réel E de dimension infinie.*

a) Soit C un convexe. Montrer que toute partie contenant C et contenue dans $\overline{C}$ est connexe par arc.

b) Soit H un hyperplan. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arc si et seulement si H n'est pas fermé.

148. *Deux entiers positifs $k \leqslant n$ étant fixés, on se place dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on considère la partie $X_k = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{rg}(M) = k\}$.*

a) Cette partie est-elle ouverte ? Et fermée ?

b) Est-elle compacte ? Et connexe par arc ?

c) Quelle est son adhérence ? Et son intérieur ?

149. *On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ usuel. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable pour laquelle il existe un réel $\gamma \in]0,1[$ tel que $\|d\,g\| \leqslant \gamma$. On pose $f = \mathrm{id} + g$.*

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.

c) Soit $h = \|f + x\|^2$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque ; que vaut $d\,h$?

150.

a) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}_+^\star)$ vérifiant $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ quels que soient x et y.

b) Généraliser ce résultat aux fonctions de classe $\mathscr{C}^0$.

151. *Résoudre l'équation différentielle $x^3 y'' + x y' - y = e^{1/x}$.*

152. *On considère la courbe $(\mathscr{C}) : \begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = 3t(t-2) \end{cases}$.*

a) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

b) Tracer $(\mathscr{C})$ à l'aide de Python.

c) Déterminer tous les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la vitesse s'annulle. Déterminer tous les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est verticale.

d) Caractériser tous les triplets $(P, M, M_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ pour lesquels (PM) et (PM_0) sont perpendiculaires.

153. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Pour toute application linéaire $\varphi : E \to F$ on pose $|||\varphi||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}$.*

a) Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$.

b) Montrer qu'une suite $((\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in \mathscr{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$ converge pour cette norme si et seulement si les matrices des φ_k convergent coefficient-par-coefficient.

c) On désigne par λ le plus grand module des valeurs propres complexes de φ. Dans quel cas a-t-on $\lambda = |||\varphi|||$?

154. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ monotone et admettant une limite finie en $+\infty$; montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont bornées.*

155. *Soit X une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E.*

a) Montrer que $X \times X$ est compact.

b) Prouver que si $f : X \to X$ vérifie $\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ alors elle admet un unique point fixe.

c) Dans le cas où f vérifie $\forall (x, y) \in X^2, \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$, montrer que cette inégalité est en réalité une égalité, puis que $f(X)$ est dense, puis que f est bijective.

d) Établir réciproquement que si f est bijective c'est une isométrie.

156. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. On veut montrer que, pour toute norme $\|\cdot\|$, il existe une norme euclidienne $|\cdot|$ vérifiant $\forall x \in E, \|x\| \leqslant |x| \leqslant \sqrt{n}\|x\|$.*

a) Montrer que cela revient à prouver que, pour tout compact convexe symétrique K, il existe un ellipsoïde B tel que $B \subset K \subset \sqrt{n}B$.

b) Étant donné un tel K, établir l'existence d'un ellipsoïde de volume maximal inclus dans K.

c) Conclure.

Bibliographie

[1] Gaetan Bisson. *Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP**.
Semester 1–4, undergraduate mathematics. Lycées Louis-le-Grand et Chaptal, jan. 2008.
URL : `https://gaati.org/bisson/tea/colles-old.pdf`.

[2] *Classes préparatoires scientifiques. Programme de mathématiques en classe de MPSI*.
Arrêté du 4 avril 2013. NOR : ESRS1306090A.
Ministère de l'enseignement supérieur, 4 avr. 2013. URL : `http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=71622`.

[3] *Classes préparatoires scientifiques. Programme de mathématiques en classe de MP*.
Arrêté du 27 novembre 2013. NOR : ESRS1326925A.
Ministère de l'enseignement supérieur, 27 nov. 2013. URL : `http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=75625`.