Colles de mathématiques en CUPGE-MP

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

Ce recueil rassemble des exercices de mathématiques particulièrement pertinents dans le contexte des interrogations orales en classes préparatoires, communément appelées *colles*. Les filières concernées sont celles à dominante maths-physique, actuellement identifiées par diverses combinaisons des sigles CPGE/CUPGE MPSI/MP.

La correction est volontairement omise car elle ne revêt aucun intérêt : c'est seulement en cherchant activement qu'un étudiant parviendra à s'améliorer, pas autrement. Les énoncés de cet ouvrage ont précisément été sélectionnés sur la base des multiples pistes de recherche qu'ils offrent. En particulier, aucun exercice à astuce n'est inclus à l'exception des absolument incontournables.

Note historique. En 2006 j'avais déjà rédigé un recueil d'exercices de colles. Beaucoup ayant changé depuis (le programme, les étudiants et moi) j'ai préféré repartir de zéro pour celui-ci. L'intersection des deux recueils est néanmoins significative. Voir :

> Gaetan Bisson. *Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP**.
> Lycées Louis-le-Grand et Chaptal ; Paris, 2006.
> `https://gaati.org/bisson/tea/colles-old.pdf`

Table des matières

Premier semestre

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1. *Soient A, B et C trois ensembles de cardinal k. Supposant $|A \cap B| = |B \cap C| = k-1$, que dire de $|A \cap C|$?*

2. *Soit $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une fonction vérifiant $f(n+1) > f(f(n))$ pour tout n. Montrer par récurrence sur n l'implication $f(m) \leqslant n \Rightarrow m \leqslant n$. En déduire $f = \mathrm{id}$.*

3. *Pour toute fonction $f : E \to E$ on note $c(f) = \#\{x \in E : f(x) = x\}$ son nombre de points fixes. Caractériser les ensembles finis E vérifiant $\#E = \#\left\{f \in E^E : c(f) = 1\right\}$.*

4. *Soient B et C deux ensembles. Montrer que l'assertion $|B| \geqslant |C|$ est équivalente à la proposition $\exists f \in C^B, \forall A, \forall h \in C^A, \exists g \in B^A, h = f \circ g$.*

5 (théorème de Cantor–Bernstein). *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications injectives. Construire une application bijective de X vers Y. On pourra poser $X_0 = X \smallsetminus g(Y)$ puis $Y_k = f(X_k)$ et $X_{k+1} = g(Y_k)$; montrer alors que f réalise une bijection de $\bigcup X_k$ vers $\bigcup Y_k$.*

6. *Sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ on défini $f \mathscr{R} g$ lorsque les quantités $f(x)/g(x)$ et $g(x)/f(x)$ sont toutes deux bornées lorsque $x \to \infty$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. Montrer qu'elle admet une infinité de classes infinies.*

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

7. *Dériver l'expression* $\exp(\sin(\log(x)))$.

8. *Dériver l'expression* $\log(\cos(\exp(x)))$.

9. *Simplifier l'expression $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$.*

10. *Simplifier l'expression* $\sum_{k=1}^n \sin(k\theta)$.

11. *Simplifier l'expression* $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \min(k, \ell)$.

Nombres complexes

12. *Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $e^z = \overline{z}$.*

13. *Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $e^{e^z} = 1$.*

14. *Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels $a^n - b^n$ tend vers zéro.*

15 (réseau de Fibonacci). *Soit $\phi > 1$ un réel et $n > 1$ un entier. On considère dans $\mathbb{C}$ la partie finie*

$$F_n = \left\{ \frac{k}{\phi} - \left\lfloor \frac{k}{\phi} \right\rfloor + \frac{k}{n} i : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Déterminer la plus petite distance entre deux points de F_n ? Discuter du choix $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

16. *Encadrer la quantité $\int_0^\pi \sin(\sin(x))dx$.*

17. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(x)^3$ par variation de la constante.*

18. *Soient k et ℓ deux entiers. Que vaut la quantité $\int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx$? Qu'obtient-on en effectuant le changement de variable $t = \sin(x)^2$?*

19 (irrationalité de π). *Supposons $\pi = \frac{a}{b}$ avec a, b entiers. On considère la quantité $\frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(bx-a)^n \sin(x)dx$. Montrer que c'est un entier qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Conclure.*

20. *Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $xy' = x + y$ et $y(0) = y(1)$.*

21. *Soit y une fonction vérifiant $y' = y/x + \sqrt{x}$; que dire de son comportement en zéro ?*

22. *Existe-t-il des fonctions réelles vérifiant $y^{(4)} + y'' = t$ et $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$?*

23. *Caractériser explicitement les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ vérifiant $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.*

24. *Caractériser explicitement les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f \circ f = f$.*

Nombres réels et suites numériques

25 (théorème de Beatty). *On appelle densité d'une partie X de $\mathbb{N}^\star$ la limite, lorsqu'elle existe, de la quantité $\frac{1}{n}|X \cap \{1, \dots, n\}|$. Donner une partie n'admettant pas de densité. Montrer que la densité d'une union disjointe est la somme des densités. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$ donné, calculer la densité de $X_x = \{E(nx) : n \in \mathbb{N}^\star\}$. En déduire que $\mathbb{N}^\star$ est l'union disjointe de X_x et X_y si et seulement si x et y sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.*

26 (moyenne de Cesàro). *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro lorsque la suite de terme général $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ converge. Montrer qu'une suite convergente converge au sens de Cesàro. Que dire de la réciproque ?*

27 (fraction continue). *Montrer que la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k}$ converge et déterminer sa limite ; on la note*

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Établir que tout réel irrationnel s'écrit de manière unique sous la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_k \in \mathbb{N}^\star$ pour $k > 0$. Quid des rationnels ?

28. *Caractériser les suites u et v vérifiant $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ pour $n \to \infty$.*

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité

29. *Pour tout $\omega > 1$ on note Z_ω l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in]\frac{1}{\omega}, \omega[$. Montrer que Z_ω n'est pas un groupe pour la composition. Montrer que c'est néanmoins le cas de $\bigcup_{\omega \in \mathbb{N}} Z_\omega$.*

30. *Pour quels entiers n existe-t-il une fonction réelle continue prenant exactement n fois chaque valeur ?*

31. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet une solution. Que dire pour $f(x) = x - \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(n\pi)}$ lorsque $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$?*

32. *Soit f une fonction vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que $f + g$ est croissante. Montrer que f admet un zéro sur $]0, 1[$.*

33. *Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est prolongeable par continuité en zéro ; on note f son prolongement. Calculer f' puis f''. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

34 (inégalités de Kronecker). *Pour $f \in \mathscr{C}^n([0, 1], \mathbb{R})$ fixée on pose $M_k = \sup |f^{(k)}|$. Établir pour tous entiers $0 \leqslant k \leqslant n$ l'inégalité*

$$M_k \leqslant 2^{\frac{1}{2}k(n-k)} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

35 (fonctions convexes). *On note $m(f)$ l'ensemble sur lequel une fonction f réelle atteint son minimum. Montrer que si f est convexe il s'agit d'un intervalle. On considère dorénavant $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x - \alpha_k|^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}$ fixés. Montrer que pour $\beta \geqslant 1$ il s'agit d'une fonction convexe. Expliciter alors $m(f)$.*

36 (inégalité de Jensen). *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$ et ϕ une fonction réelle convexe sur* $\mathrm{im}(f)$. *Établir l'inégalité $\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi \circ f$.*

37. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Démontrer que $\sqrt{f}$ est dérivable si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$.*

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

38 (formule de Legendre). *Soit p un nombre premier et n un entier naturel. Montrer l'identité*

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbb{N}^\star} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

En déduire par combien de zéros l'écriture décimale de $(10^n)!$ se termine.

39. *Montrer que pour tout k donné il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $\{n + 1, n + 2, \ldots, n + k\}$ ne contienne aucun nombre premier.*

40. *On note σ la fonction associant à chaque entier la somme de ses diviseurs positifs ; on a par exemple $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$. Montrer que si n et m sont premiers entre eux alors $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$. En déduire que les entiers pairs n vérifiant $\sigma(n) = 2n$ sont exactement ceux de la forme $2^{k-1}(2^k - 1)$ où $2^k - 1$ est premier.*

41. *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Si p est premier, en déduire que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ contient au plus $\varphi(d)$ éléments d'ordre d. Conclure que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

42. *Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ l'existence d'un entier u premier à p tel que $(1+p)^{p^k} = 1 + up^{k+1}$. En déduire que $1+p$ est d'ordre p^{k-1} dans $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$. Avec l'exercice précédent, conclure que $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*

Structures algébriques usuelles

43 (transformations linéaires du plan). *On considère le groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans lui-même. Montrer que chaque ensemble ci-dessous en est un sous-groupe commutatif :*

- $\mathscr{D} = \{z \mapsto \rho z : \rho \in \mathbb{R}^\star\}$
- $\mathscr{R} = \{z \mapsto e^{i\theta} z : \theta \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{I} = \{\mathrm{id}, z \mapsto \overline{z}\}$

Déterminer leurs sous-groupes finis. Montrer que $\mathscr{D} \cup \mathscr{R}$ et $\mathscr{D} \cup \mathscr{I}$ engendrent chacun un sous-groupe commutatif, mais que ce n'est pas le cas de $\mathscr{R} \cup \mathscr{I}$.

44. *Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ quels que soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est un groupe pour la composition dont on caractérisera tous les sous groupes.*

45 (groupe quotient). *Soit G un groupe et H un sous-groupe notés multiplicativement. Montrer qu'on définit une relation d'équivalence en posant $x \mathscr{R} y \iff xy^{-1} \in H$. Montrer que chaque classe a exactement $|H|$ éléments. Supposant que, pour tout x, on a $xHx^{-1} = H$, montrer qu'on définit une loi de groupe sur $G/\mathscr{R}$ en posant $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{xy}$.*

46 (groupe de Prüfer). *Soit p un nombre premier. Montrer que $\{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$. Montrer que tous ses sous-groupes stricts sont monogènes. En déduire qu'il n'est pas isomorphe au produit de deux groupes non triviaux.*

47 (théorème chinois). *Soit G un groupe d'ordre pq avec* $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. *Montrer que G est isomorphe au produit de* $\ker(x \mapsto x^p)$ *et* $\ker(x \mapsto x^q)$.

48. *Que vaut la somme $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$?*

49 (inversion de Möbius). *On muni l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{C}$ de l'addition point par point et du produit défini par $f \star g : n \in \mathbb{N}^\star \mapsto \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$. Montrer que cela en fait un anneau commutatif. En caractériser les éléments inversibles.*

Considérons maintenant la fonction $\mu(n)$ qui vaut $(-1)^r$ lorsque n est le produit de r nombres premiers distincts et s'annule lorsque n admet un facteur carré. Calculer $\mu \star (n \mapsto 1)$. En déduire l'équivalence

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

50. *Notons A l'anneau des suites à valeurs entières stationnaires à partir d'un certain rang. Déterminer tous les morphismes de A dans $\mathbb{Z}$.*

Calcul matriciel et systèmes linéaires

51. *Montrer qu'une famille $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $ad - bc \neq 0$ si et seulement si, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, le système*

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

admet un unique couple (x, y) solution.

52. *Pour quels nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ le système ci-dessous admet-il une unique solution ?*

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)y + z = 1 \\ x + x + (1+\lambda)z = 1 \end{cases}$$

53. *Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = \mathrm{id}$. De même pour $A^4 = \mathrm{id}$.*

54. *L'ensemble des matrices nilpotentes est-il stable par la somme ? Et par le produit ?*

55. *Caractériser toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{T}_n^{sup}(\mathbb{C})$.*

56. *Calculer l'inverse des matrices ci-dessous.*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polynômes et fractions rationnelles

57 (critère d'Eisenstein). *Soit $p \in \mathcal{P}$ un nombre premier et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme vérifiant $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $p \mid a_k$ ainsi que $p \nmid a_n$ et $p^2 \nmid a_0$. Montrer qu'il n'existe aucun couple $(Q(X), R(X)) \in \mathbb{Q}[X]$ de polynômes non constants vérifiant $P(X) = Q(X)R(X)$.*

58 (identités de Newton). *Considérons un polynôme complexe unitaire scindé à racines simples ; on note $(x_i)_{i=1}^{n}$ ses racines et $(c_k)_{k=0}^{n}$ ses coefficients. Montrer que c_k s'exprime comme un polynôme de degré $k+1$ en les x_i.*

59. *Montrer qu'un polynôme P est premier avec sa dérivée P' si et seulement s'il n'admet pas de facteur carré.*

60. *Montrer pour tout couple (P, Q) de polynômes de degré d vérifiant $Q(0) \neq 0$ l'existence d'une unique suite (α_k) pour laquelle $P(X) = Q(X) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k + o(X^n)$. Montrer que toute suite récurrente linéaire homogène d'ordre d s'obtient ainsi.*

61. *On considère la fonction $e : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ associant à toute fraction rationnelle $Q \in \mathbb{C}(X)$ sa fonction rationnelle $x \in \mathbb{C} \mapsto Q(x) \in \mathbb{C}$. Montrer qu'elle est injective mais pas surjective.*

62. *Déterminer les couples de fractions rationnelles $(Q, R) \in \mathbb{C}(X)^2$ tels que $Q(R(X)) = X$.*

63. *Soit k et n deux entiers. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{x^k}{x^{2n}+1}$.*

Second semestre

Analyse asymptotique

64 (théorème d'Alembert–Gauss). *Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine. On pourra montrer que $z \in \mathbb{C} \mapsto |P(z)| \in \mathbb{R}_+$ admet un minimum absolu puis, notant α une préimage de ce minimum, développer $P(\alpha + z)$.*

65. *Calculer en zéro et à l'ordre cinq le développement limité de* $\exp(\sin(x) + \cos(x))$.

66. *Calculer en zéro et à l'ordre cinq le développement limité de* $\ln(\cos(x) + \exp(x))$.

67. *Calculer en zéro et à l'ordre cinq le développement limité de* $\sin(\exp(\cos(x)))$.

68. *Calculer en zéro et à l'ordre cinq le développement limité de* $\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\exp(x)}$.

69. *Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe une fonction g telle qu'en l'infini on ait $f_k = o(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

70. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une fonction f admettant en $x = 0$ un développement de la forme $f(x) = x - ax^b + o(x^b)$ avec $a > 0$ et $b > 1$. On suppose aussi u_0 positif et suffisamment petit. Déterminer un réel α pour lequel la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admet une limite non nulle. En déduire un équivalent de u_n. Que trouve-t-on pour $f = \sin$?*

71 (polynômes de Bernoulli). *Montrer l'existence et l'unicité de la famille de polynômes $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant l'identité $\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^n B_k(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ en $t \to 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité $B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_{n-k} x^k$ où $b_k = B_k(0)$. Calculer $B_k(x+1) - B_k(x)$ puis en déduire une relation de récurrence sur les b_k.*

72. *Soit f une fonction continue pour laquelle la quantité $f(x+1) - f(x)$ converge en $x \to \infty$. Montrer que $f(x)/x$ admet cette même limite.*

Espaces vectoriels et applications linéaires

73. *Montrer qu'aucun espace vectoriel sur un corps infini n'est union finie de sous-espaces propres.*

74. *Montrer que l'ensemble des fonctions f continues vérifiant $\int_0^1 f = 0$ est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. *En donner un supplémentaire.*

75. *Montrer que toute famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant* $\deg(P_k) = k$ *est une base de* $\mathbb{C}[X]$.

76 (formules de Grassmann). *Combien y a-t-il de familles libres à k éléments dans un espace vectoriel de dimension n sur un corps à q éléments ? Et de sous-espaces vectoriels de dimension k ?*

77. *Soient E et F deux sous-espaces d'un espace vectoriel donné. Démontrer l'identité* $\dim(E+F)=\dim(E)+\dim(F)-\dim(E\cap F)$.

78. *Soient E et F deux sous-espaces d'un espace vectoriel donné. Montrer que s'ils admettent un supplémentaire commun alors ils sont de même dimension.*

79. *Montrer que des sous-espaces vectoriels $E_1,\dots,E_k$ sont en somme directe si et seulement si* $\dim(E_1)+\cdots+\dim(E_k)=\dim(E_1+\cdots+E_k)$.

80 (suite des images). *Soit φ une application linéaire. Montrer que la suite* $\operatorname{rg}(\varphi^n)$ *est décroissante et convexe.*

81 (polynômes de Hilbert). *On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X)\mapsto P(X+1)-P(X)$. Déterminer son noyau et son image. On pose maintenant $H_k(X)=\frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+1)$; montrer l'identité $P(X)=\sum_{k\in\mathbb{N}}(\Delta^{\circ(k)}P)(0)H_k(X)$. En déduire un méthode pour calculer $\sum_{k=0}^{n}P(k)$.*

82 (polynômes de Bernoulli et relation de distribution). *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $B_n\in\mathbb{Q}[x]$ vérifiant $\int_y^{y+1}B_n(x)dx=y^n$. Établir alors, pour tout entier m, l'identité $B_n(t)=m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}B_n\left(\frac{t+k}{m}\right)$.*

83. *Soient $\phi:E\to F$ et $\psi:F\to E$ deux applications linéaires vérifiant $\phi\circ\psi\circ\phi=\phi$ et $\psi\circ\phi\circ\psi=\psi$. En supposant les dimensions finies, montrer que $E=\ker\phi\oplus\operatorname{im}\psi$.*

84. *Soit p et q deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$. Exprimer alors son image et son noyau en fonction de ceux de p et q.*

85. *Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose $\sum_{i=1}^{k}\varphi_i=\mathrm{id}$ et $\sum_{i=1}^{k}\operatorname{rg}(\varphi_i)\leqslant n$. Montrer que ces endomorphismes sont des projecteurs.*

86. *Soit E un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les éléments d'un sous groupe fini G de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Si π est une projection sur E, montrer que $\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}g\circ\pi\circ g^{-1}$ est un projecteur sur E dont le noyau est stable par tout $g\in G$.*

Matrices

87. *Montrer l'inversibilité de toute matrice M vérifiant $|m_{ii}|>\sum_{j\neq i}|m_{ij}|$ pour tout i.*

88. *Soit $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ une application non constante vérifiant $f(AB)=f(A)f(B)$ quels que soient A et B. Montrer qu'une matrice M est inversible si et seulement si $f(M)\neq 0$.*

89. *Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $M\mapsto\operatorname{tr}(AM)$ avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Caractériser celles vérifiant $f(MN)=f(NM)$.*

90 (idéaux d'endomorphismes). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que* $(\mathrm{End}(E),+,\circ)$ *est un anneau. Caractériser tous les sous-groupes $(\mathfrak{I},+)$ de $(\mathrm{End}(E),+)$ vérifiant $\forall\varphi\in\mathrm{End}(E),\forall\iota\in\mathfrak{I},\varphi\circ\iota\in\mathfrak{I}$.*

Groupe symétrique et déterminants

91. *Calculer la somme $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(1)$. De même pour $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\sigma(1))$.*

92. *On note d_n^k le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ admettant exactement k points fixes. Montrer la relation $d_n^k = C_n^k d_{n-k}^0$. En déduire l'identité $k d_n^k = n d_{n-1}^{k-1}$. Calculer alors le nombre moyen de points fixes des permutations de $\mathfrak{S}_n$.*

93 (résultant). *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. On pose $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$. Écrire la matrice du morphisme $(U, V) \in \mathbb{Q}_{q-1}[X] \times \mathbb{Q}_{p-1}[X] \mapsto UP + VQ$ dans la base canonique. À quelle condition est-il inversible ? En déduire tous les polynômes de la forme $X^3 + aX + b$ admettant une racine multiple.*

Intégration

94. *Montrer que toute fonction réelle continue d'intégrale unité sur $[0, \sqrt{2}]$ admet un point fixe.*

95. *Soit f une fonction réelle, continue et de période β. Montrer que la quantité $\int_\alpha^{\alpha+\beta} f(t)dt$ ne dépend pas de α.*

96 (lemme de Lebesgue). *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Montrer que la quantité $\int_a^b f(t)g(nt)dt$ tend, lorsque $n \to \infty$, vers $\left(\frac{1}{T}\int_0^T g\right)\int_a^b f$.*

97. *Étant donnée $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^\star)$ on pose $m_s(f) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^s dx\right)^{1/s}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^\star$. Déterminer la limite de cette quantité lorsque $s \to 0$, $+\infty$ puis $-\infty$.*

98 (intégrale de Gauss). *On rappelle l'encadrement $(1 - \frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x} \leqslant (1 + \frac{x}{n})^{-n}$ valable pour tout $x \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$. Effectuer le changement de variable $x = u^2$ puis intégrer sur $[0, \sqrt{n}]$. Donner alors un équivalent de $\int_0^\infty (1 + u^2)^{-n} du$ pour $n \to \infty$. On pourra utiliser la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. En déduire l'égalité $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

99. *Pour quelles fonctions $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ a-t-on $\left|\int_0^1 f(t)dt\right| = \int_0^1 |f(t)| dt$?*

100. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{U})$ avec $I = [0, 1]$. Montrer que $g : x \in I \mapsto \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt$ est dans $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$. Calculer $f(x)\exp(-g(x))$. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $f = e^{i\theta}$.*

101. *Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, calculer la dérivée de $x \mapsto \int_x^{x^2} x f(xt)dt$.*

Dénombrement

102. *Combien de familles de $\{-1, 0, 1\}^n$ sont-elles de somme nulle ?*

103. *Combien y a-t-il de fonctions croissantes de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$?*

104. *Établir que le nombre r_n de relations d'équivalences sur un ensemble à n éléments vérifie la relation de récurrence $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k r_k$.*

105. *Que dire du nombre de fonctions de la forme $f \circ f$ avec $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$?*

Probabilités

106. *Soit P la probabilité uniforme sur un univers fini Ω. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ toute famille $(E_1, \ldots, E_n)$ d'évènements deux-à-deux distincts vérifie-t-elle $P(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1$?*

107. *Montrer qu'on définit une relation d'équivalence sur les probabilités d'un univers fini* Ω *en posant* $P \sim P' \iff (\forall E \subset \Omega, P(E) = 0 \Leftrightarrow P'(E) = 0)$. *Déterminer le cardinal du quotient.*

108. *Soit* P *une probabilité sur un univers fini* Ω. *Montrer que pour toute fonction* $f : \Omega \to \Omega$ *on définit une probabilité par* $f^\star P : E \subset \Omega \mapsto P\left(f^{-1}(E)\right)$. *Caractériser les couples* (P, P') *vérifiant* $\exists f, P' = f^\star P$.

109. *On considère la loi de probabilité uniforme sur un espace* Ω *dont le cardinal est un nombre premier. Montrer que deux évènements non triviaux ne peuvent être indépendants.*

110. *Supposant les anniversaires des étudiants indépendants et uniformément distribués sur les* 365 *jours de l'année, quel est l'effectif minimum pour qu'une classe compte, avec probabilité* $\geqslant 1/2$ *deux étudiants ayant le même anniversaire.*

111. *Un virus infecte* 5% *de la population ; son taux de mortalité est de* 1% *et il est dépisté par un test fiable à* 95%. *Quelle est la probabilité qu'une personne testée positive décède ?*

112. *Soit* (E_k) *une suite croissante d'évènements. Montrer que* $P(E_{k+1} \setminus E_k)$ *converge.*

113 (estimateur de Laplace). *On fixe un réel* $p \in [0, 1]$ *uniformément distribué et on considère une pièce pipée avec probabilité* p *d'obtenir pile. Effectuant* n *lancers, on comptabilise* k *piles. Montrer que l'espérance de* p *est alors* $\frac{k+1}{n+2}$.

114. *Soit* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur* $\{-1, +1\}$ *; on pose* $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Montrer que presque sûrement la suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *prend une infinité de valeurs nulles.*

115. *Soit une matrice uniformément distribuée dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{F}_2)$ *où* $\mathbb{F}_2$ *dénote le corps à deux éléments. Montrer que sa probabilité d'être inversible est* $\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. *Établir que cette quantité admet une limite lorsque* $n \to \infty$. *Toujours lorsque* $n \to \infty$, *démontrer que la probabilité qu'une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *à coefficients dans* $\{0, 1\}$ *soit inversible tend vers un.*

116. *On modélise le temps de réponse aux emails pas une loi de Pareto : pour tout* $t \in [1, +\infty[$, *la probabilité qu'un email reçoive une réponse après* t *heures est* $(k-1)t^{-k}$ *pour une certaine constante* $k > 1$. *Montrer que l'espérance du temps de réponse sachant qu'il est supérieur à* s *est de* $\frac{k}{k-1}s$. *Si l'on a déjà attendu une réponse* s *heures, combien d'heures supplémentaires doit on encore attendre en moyenne ?*

117. *On modélise l'arrivée de clients dans une boulangerie par un processus de Poisson : sur tout intervalle de* ℓ *minutes, la probabilité qu'exactement* k *clients débarquent est* $\frac{(\lambda\ell)^k}{k!}e^{-\lambda\ell}$ *où la constante* λ *dénote le nombre moyen de client débarquant par minute. Si l'unique serveuse traite* μ *clients par minute, montrer que le temps d'attente moyen est* $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$. *Qu'en advient-il si la boulangerie embauche une seconde serveuse ?*

118 (jeu de Penney). *On modélise une suite de tirages pile ou face indépendants comme un mot binaire infini et on va déterminer la probabilité que le facteur* 001 *y apparaisse avant le facteur* 011. *Soit* $A(x)$, $B(x)$ *et* $C(x)$ *les séries formelles dont le* k^e *coefficient dénote le nombre de mots binaires de longueur* k *respectivement dans lesquels* 001 *apparaît en premier, dans lesquels* 011 *apparaît en premier et dans lesquels aucun de ces deux facteurs n'apparaît. Montrer les relations* $1 + 2xC = A + B + C$ *et* $x^3C = A$ *et* $x^3C = xA + B$ *puis en déduire* $A(1/2)$ *et conclure.*

Espaces préhilbertiens réels

119. *Montrer que l'espace* $\mathbb{R}^n$ *contient* k *vecteurs* v_i *pour lesquels* $i \neq j \Longrightarrow \left\langle v_i, v_j \right\rangle < 0$ *si et seulement si* $k \leqslant n+1$.

120 (matrices de Gram et inégalité d'Hadamard). *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Pour toute famille de vecteurs* $v \in E^n$ *on note* $G(v)$ *la matrice* $(\langle v_k, v_\ell \rangle)_{(k,\ell)\in\{1,\ldots,n\}^2}$. *Montrer que le rang de la matrice* $G(v)$ *est celui de la famille* v *et que son déterminant est positif. Montrer l'identité* $\det G(x :: v) = \|x - \pi^{\perp}_{\langle v \rangle} x\|^2 \det G(v)$ *où l'on a posé* $x :: v = (x, v_1, \ldots, v_n)$. *En déduire que* $\det G(v) \leqslant \prod \|v_k\|$ *et caractériser le cas d'égalité.*

121 (polynômes orthogonaux). *Soit la fonction* $p : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ *définie sur* $I =]-1,1[$. *On muni l'espace* $\mathbb{R}[X]$ *du produit scalaire* $\langle P, Q \rangle = \int_I PQ\,p$ *et on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base canonique* (X^k) *afin d'obtenir des polynômes* (P_k).

Montrer que P_k *est scindé à racines simples sur* I. *Prouver l'existence de deux suites réelles* λ *et* μ *vérifiant* $P_k = (x+\lambda_k)P_{k-1} - \mu_k P_{k-2}$ *; établir* $\mu_k > 0$. *Montrer que les racines de* P_k *sont entrelacées avec celles de* P_{k-1}. *Généraliser ces résultats à une classe plus générale de fonctions* p.

Procédés sommatoires discrets

122. *Pour quels couples* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *la série* $\sum_{k=1}^{\infty} k^x y^k$ *converge-t-elle ?*

123. *Soient* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *et* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *converge aussi. De même pour* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$.

124. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^\star)$ *une fonction vérifiant* $\lim_\infty \frac{f'}{f} = -\infty$. *Montrer que la série de terme général* $f(n)$ *converge et donner un équivalent de son reste.*

125. *Soit la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. *Quelle est sa somme ? On réordonne à présent ses termes pour alternant* p *termes positifs avec* q *termes négatifs. Que devient la somme ?*

126. *Pour tout* $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *montrer que la quantité* $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ *converge lorsque* $n \to \infty$. *Et si l'on suppose seulement* $f \in \mathscr{C}^0(]0,1], \mathbb{R})$ *?*

127. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $f(\alpha) = \alpha$. *Discuter en fonction de* $f'(\alpha)$ *du comportement asymptotique des suites* (u_n) *vérifiant la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Fonctions de deux variables

Troisième semestre

Suites et séries de fonctions

128 (série harmonique). *On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Établir que $H_n - \ln(n)$ converge vers un réel noté γ. Montrer l'équivalence $H_n - \ln(n) - \gamma \sim \frac{1}{2n}$. Poursuivre cette démarche afin d'obtenir le développement $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + o(n^4)$.*

129. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^\star)$ une fonction vérifiant $\lim_\infty \frac{f'}{f} = -\infty$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge et donner un équivalent de son reste.*

130. *Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Que devient elle si l'on réordonne ses termes pour alterner p termes positifs avec q termes négatifs ? Montrer que, pour tout réel ℓ et toute série réelle (x_n) convergente mais non absolument convergente, il existe une permutation φ de $\mathbb{N}$ pour laquelle $(x_{\varphi(n)})$ admet ℓ comme limite.*

131 (produit de Cauchy). *Soient deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$. Leur produit de Cauchy est la série $\sum z_n$ de terme général $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Montrer que si les deux séries convergent absolument, leur produit de Cauchy aussi. Montrer que si les deux séries convergent simplement, leur produit de Cauchy converge au sens de Cesàro.*

132. *Démontrer que $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ est une suite de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont la limite n'est pas $\mathscr{C}^1$.*

133. *Étudier la convergence de la suite $f_0 = 1$ et $f_n : x \in [0,1] \mapsto 1 + \int_0^x f_{n-1}(t - t^2) dt$.*

134. *En développant le membre de gauche, établir l'égalité $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$.*

135. *Montrer pour $x \in]-1,1[$ l'égalité $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.*

136. *Montrer pour $x \in [-1,1]$ l'égalité $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} x^k = \arctan\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)$.*

137. *Montrer, pour $x \in]-1,+\infty[$, que la quantité $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ est bien définie et continue. Étudier sa monotonie. En déterminer un équivalent en -1 et en $+\infty$.*

138. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $x \in [0,1]$ on pose $u_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$. Montrer que la série de fonctions associées converge simplement. Calculer sa limite lorsque $\alpha = 0$. Montrer que la convergence n'est pas uniforme pour $\alpha > 0$.*

139. *Pour $x \notin \mathbb{Z}$ on pose $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$ et $g(x) = \frac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2}$. Montrer que $f - g$ admet un prolongement h continue sur $\mathbb{R}$. Soit H l'opérateur sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ associant à i la fonction $x \mapsto i\left(\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Montrer l'inclusion $\mathrm{sp}(H) \subset [-2,2]$, calculer $H(h)$ puis en déduire $f = g$.*

140. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne s'annulant sur aucun intervalle de longueur non nulle. Montrer que l'ensemble des zéros de f est dénombrable.*

141. *L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ sur lui-même est-il dénombrable ?*

142. *Lesquelles des familles $\frac{1}{a^2+b^2}$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{(a+b)^2}$ et $\frac{1}{2^a+b^2}$ sont sommables pour $(a,b)\in(\mathbb{N}^\star)^2$?*

Réduction des endomorphismes

143. *Quels sont les idéaux à droite de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$? Et à gauche ? Et les bilatères ?*

144. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition sur $P \in \mathbb{C}[x]$ la matrice $P(M)$ est-elle inversible ?*

145. *Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice inversible en fonction de celui de son inverse.*

146. *À quelle condition sur $P \in \mathbb{C}[x]$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P(M)=0$ est-il compact ? Même question dans le cas réel.*

147. *Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{tr}(A^n)=0$.*

148. *Caractériser la partie de $\mathbb{R}[X]$ formée des polynômes minimaux des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

149 (calcul fonctionnel). *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et $x \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit P un polynôme interpolant f sur $\operatorname{sp}(x)$; autrement dit, si $\prod(X-\lambda)^{k_\lambda}$ est le polynôme minimal de x alors $P^{(k)}(\lambda)=f^{(k)}(\lambda)$ pour $0 \leqslant k < k_\lambda$. On pose $\psi_x(f)=P(x)$; montrer que cette quantité ne dépend pas du polynôme P choisi. Montrer que ψ_x est un morphisme d'algèbre. En déduire que pour x nilpotent l'équation $(\mathrm{id}+y)^k=\mathrm{id}+x$ admet une solution y.*

150. *Montrer que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ont k valeurs propres communes si et seulement si l'équation $AX=XB$ admet une solution $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang k.*

151. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que le sous espace $F_\lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^\star} \ker\big((M-\lambda\,\mathrm{id})^k\big)$ est stable par M. Établir que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}} F_\mu$. Montrer que la projection sur F_λ suivant $\bigoplus_{\mu\neq\lambda} F_\mu$ est un polynôme en M.*

152. *À quelle condition sur $(a,b)\in(\mathbb{R}^n)^2$ la matrice ci-dessous est-elle diagonalisable ?*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

153. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \operatorname{End}(E)$ diagonalisable. On pose $\widehat{u} : v \in \operatorname{End}(E) \mapsto u\circ v - v\circ u$. Montrer que $\widehat{u} \in \operatorname{End}(\operatorname{End}(E))$ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.*

154. *Montrer qu'une matrice carrée de rang unité est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.*

155. *Pour quelles matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice par bloc $\begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?*

156. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Pour toute application linéaire $\varphi : E \to F$ on pose $|||\varphi||| = \sup_{x\in E\smallsetminus\{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$. Montrer qu'une suite $((\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in \mathscr{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$ converge pour cette norme si et seulement si les matrices des φ_k convergent coefficient par coefficient. On désigne par λ le plus grand module des valeurs propres complexes de φ. Dans quel cas a-t-on $\lambda = |||\varphi|||$?*

157. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant $\|uv\| \leqslant \|u\|\cdot\|v\|$. Montrer que $1-u$ est inversible dès que $\|u\| < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge.*

Géométrie

158. *Soit E un espace vectoriel réel normé. Pour tout $X \subset E$ on pose $d_X : y \in E \mapsto \inf_{x\in X} \|x - y\|$. Démontrer que l'assertion $d_X(y) = 0$ équivaut à $y \in \overline{X}$. Prouver que si X est convexe alors il en va de même pour $\overline{X}$. Même question lorsque X est un sous espace vectoriel.*

159. *Sur l'espace $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ on considère les normes $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrer que tout ouvert pour N_1 est un ouvert pour N_∞ mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.*

160. *Montrer que l'ensemble E des suites réelles convergeant vers zéro est un espace vectoriel. Montrer qu'on définit une norme sur E en posant $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Démontrer que l'application $x \in E \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x_k}{2^k}$ est bien définie. Montrer qu'elle est continue pour la norme ci-dessus.*

161. *Pour toute partie X d'un espace vectoriel normé E on note X' l'ensemble des points $a \in E$ adhérents à $X \smallsetminus \{a\}$. Caractériser le cas $X' = \varnothing$. Montrer $X'' \subset X'$. Posant $X^{(\omega)} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X^{(k)}$, peut-on avoir $X^{(\omega+1)} \subsetneq X^{(\omega)}$?*

162 (sous-groupes de $\mathbb{R}$). *Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense soit de la forme $x\mathbb{Z}$. En déduire que si p est un entier non carré alors la partie fractionnaire de $n\sqrt{p}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est dense dans $[0,1]$.*

163. *On considère la suite $u_n = \sin(\log(n))$. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers zéro. En déduire que l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même pour $v_n = n^{1/3}\cos(\sqrt{n})$.*

164 (théorème de Banach–Steinhaus). *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que E est un espace de Baire, c'est-à-dire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

165. *Montrer que tout sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admettant l'identité comme point intérieur est ouvert et fermé. Qu'en déduire ?*

166. *Dans l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la partie $X_R = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{rg}(M) \in R\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur R pour que X_R soit ouvert ? Et fermé ? Et compacte ? Et connexe par arc ? Quelle est son adhérence ? Et son intérieur ?*

167. *Soit C une partie compacte d'un espace normé. Montrer que de tout recouvrement de C par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Soit maintenant $f_n : C \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f continue ; en considérant les ensembles $\{x \in C : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que la convergence est uniforme.*

168. *Caractériser les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continues vérifiant $\int \|f\| = \|\int f\|$.*

169. *Soit E un espace normé et $f : E \to E$ continue laissant stable un compact et vérifiant $\|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$ pour tout $x \neq y$. Montrer que f admet un point fixe.*

170. *Soit X une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E. Prouver que si $f : X \to X$ continue vérifie $\forall (x,y) \in X^2, \|f(x)-f(y)\| \geqslant \|x-y\|$ alors cette inégalité est en réalité une égalité, puis que $f(X)$ est dense, puis que f est bijective. Établir réciproquement que si $f : X \to X$ est continue et bijective alors c'est une isométrie.*

171. *On se place dans un espace vectoriel réel E de dimension infinie. Soit C un convexe. Montrer que toute partie contenant C et contenue dans $\overline{C}$ est connexe par arc. Soit H un hyperplan. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arc si et seulement si H n'est pas fermé.*

172. *Pour $x = (x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$ et $\alpha \neq 0$ on pose $M_\alpha(x) = \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto M_\alpha(x)$ est croissante. Déterminer ses limites en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.*

173. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. On veut montrer que, pour toute norme $\|\cdot\|$, il existe une norme euclidienne $|\cdot|$ vérifiant $\forall x \in E, \|x\| \leqslant |x| \leqslant \sqrt{n}\|x\|$. Montrer que cela revient à prouver que, pour tout compact convexe symétrique K, il existe un ellipsoïde B tel que $B \subset K \subset \sqrt{n}B$. Étant donné un tel K, établir l'existence d'un ellipsoïde de volume maximal inclus dans K. Conclure.*

Quatrième semestre

Intégration

174. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ *puis montrer qu'elle satisfait une équation différentielle du premier ordre. En déduire l'identité* $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots=\int_0^1 e^{\frac{1-t^2}{2}}\,dt$.

175. *Montrer que la fonction* $f(x)=\int_x^\infty e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$ *satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre un. En déduire que* $f^{(n+1)}$ *est une combinaison linéaire de* $f^{(n)}$ *et* $f^{(n-1)}$. *Prouver alors que* $q_n=\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}$ *vérifie la relation* $q_n=\frac{n}{-x+q_{n+1}}$. *Conclure enfin que* $f(x)=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{2}{x+\cfrac{3}{x+\cfrac{4}{\ddots}}}}}$.

176 (théroème de Liouville). *Soit* $f(z)=\sum a_k z^k$ *une série entière convergeant pour tout* $z\in\mathbb{C}$. *Montrer l'identité* $a_k=\frac{1}{2\pi\rho^k}\int_0^{2\pi} f\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{-ik\theta}\,d\theta$ *puis en déduire que si* $|f(z)|$ *est bornée par un polynôme en* $|z|$ *alors* f *est elle-même un polynôme.*

177. *Montrer que si* ϕ *est une fonction continue, décroissante et intégrable de* $\mathbb{R}_+^\star$ *dans* $\mathbb{R}$, *alors la quantité* $\varepsilon\sum_{k=1}^\infty \phi(k\varepsilon)$ *admet une limite en* $\varepsilon\to 0^+$.

Analyse hilbertienne

178. *Montrer que l'espace* $\mathbb{R}^n$ *contient* k *vecteurs* v_i *pour lesquels* $i\neq j \implies \langle v_i, v_j\rangle<0$ *si et seulement si* $k\leqslant n+1$.

179 (matrices de Gram et inégalité d'Hadamard). *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Pour toute famille de vecteurs* $v\in E^n$ *on note* $G(v)$ *la matrice* $(\langle v_k, v_\ell\rangle)_{(k,\ell)\in\{1,\ldots,n\}^2}$. *Montrer que le rang de la matrice* $G(v)$ *est celui de la famille* v *et que son déterminant est positif. Montrer l'identité* $\det G(x::v)=\|x-\pi^{\perp}_{\langle v\rangle}x\|^2\det G(v)$ *où l'on a posé* $x::v=(x,v_1,\ldots,v_n)$. *En déduire que* $\det G(v)\leqslant\prod\|v_k\|$ *et caractériser le cas d'égalité.*

180 (polynômes orthogonaux). *Soit la fonction* $p: x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ *définie sur* $I=]-1,1[$. *On muni l'espace* $\mathbb{R}[X]$ *du produit scalaire* $\langle P,Q\rangle=\int_I PQ\,p$ *et on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base canonique* (X^k) *afin d'obtenir des polynômes* (P_k).

Montrer que P_k *est scindé à racines simples sur* I. *Prouver l'existence de deux suites réelles* λ *et* μ *vérifiant* $P_k=(x+\lambda_k)P_{k-1}-\mu_k P_{k-2}$; *établir* $\mu_k>0$. *Montrer que les racines de* P_k *sont entrelacées avec celles de* P_{k-1}. *Généraliser ces résultats à une classe plus générale de fonctions* p.

181. *On muni $\mathbb{R}$ de la tribu engendrée par les intervalles ouverts. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ d'intégrale unité on définit une loi de probabilité en posant $P(]\alpha,\beta[) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. Cette construction permet-elle d'obtenir toutes les lois possibles ?*

182 (lemme de Borel–Cantelli). *Étant donnée une suite d'évènements (E_k) on pose $F = \bigcap_n \bigcup_{k\geqslant n} E_k$ (intuitivement « une infinité des E_k se réalise »). Montrer que si $\sum P(E_k)$ converge alors $P(F) = 0$. Supposant les E_k indépendants, montrer $P(F) = 1$ dans le cas inverse.*

183. *Montrer que si un ensemble E est indénombrable alors l'ensemble des fonctions $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}$ l'est aussi. Montrer que la réciproque est fausse.*

Calcul différentiel

184. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ monotone et admettant une limite finie en $+\infty$; montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont bornées.*

185 (théorie de Sturm). *Soient y et z deux fonctions tells que $y'' + py = 0$ et $z'' + qz = 0$ pour p et q deux fonctions de classe $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ vérifiant $p \leqslant q$ sur un intervalle I. Si α et β sont deux zéros consécutifs de y, montrer que z s'annule sur $]\alpha, \beta]$. Qu'en déduire si $p = q$? Étant donné un encadrement $0 < m < p < M$, encadrer la distance entre deux zéros consécutifs de y. On trouve $\pi/\sqrt{M} < \beta - \alpha < \pi/\sqrt{m}$.*

186. *Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on considère l'endomorphisme D de dérivation. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- *Les racines de P sont toutes de partie réelle strictement négative.*
- *Pour tout f, si $P(D)(f) \to_\infty 0$, alors $f \to_\infty 0$.*

187. *On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ usuel. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable pour laquelle il existe un réel $\gamma \in]0,1[$ tel que $\|dg\| \leqslant \gamma$. On pose $f = \mathrm{id} + g$. Montrer que f est injective. Montrer que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.*