Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP*

exercices et problèmes non corrigés
pour la préparation des concours

Gaëtan Bisson
ancien élève de l'École normale supérieure
agrégé de mathématiques
docteur ès sciences

Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP*

Gaëtan Bisson

Site Web de l'auteur : `http://gaati.org/bisson/`

Préface

Ce document est l'aboutissement du travail de préparation des colles que j'ai assurées pendant l'année 2005–2006 en classes préparatoires MPSI et MP*. Il s'agit d'énoncés de problèmes mathématiques posés, pour la plupart, pendant ces colles ; tous n'ont toutefois pas été « testés » et il se peut que, malgré mon attention, quelques coquilles demeurent.

Seuls sont proposés ici les exercices qui me semblent fructueux en colle ; en particulier, aucun exercice de calcul n'est donné. Le calcul est certes indispensable à un élève de classe préparatoire, mais il est plus approprié en travaux dirigés ou à la maison : en colles, on y préfèrera les problèmes visant à développer la compréhension et l'intuition des élèves, mettant au mieux à profit la présence du colleur.

Prérequis

La connaissance du cours est indispensable ; elle est, de toute façon, la moindre des choses qu'on puisse attendre d'un candidat aux concours.

Malgré mes efforts pour ordonnancer le contenu de ce recueil, c'est-à-dire de faire en sorte qu'un exercice ne fasse appel qu'aux connaissances des chapitres qui le précèdent, cela n'a pas toujours été possible et cette règle admet ainsi quelques exceptions.

Parfois, pour résoudre un problème, on pourra faire appel à des résultats obtenus par le biais d'autres exercices, en particulier ceux qui se trouvent dans la liste des résultats : y sont répertoriés les problèmes classiques ou importants qui font partie de la culture mathématique qu'il est souhaitable de posséder à l'issue des classes préparatoires. Il va sans dire que j'invite tout élève à la consulter et à s'assurer, avant les concours, de sa bonne compréhension des résultats qui y sont répertoriés.

Remerciements

Ma première pensée va tout naturellement à mes maîtres de classes préparatoires, Jérôme Isaïa et Henri Koen, qui m'ont enseigné de façons si différentes les mathématiques ; je leur en suis très reconnaissant. On pourra par ailleurs remarquer l'influence qu'ils ont eu sur certaines parties de ce travail.

L'inspiration m'est par ailleurs venue de Sébastien Gouëzel, alors qu'il était caïman de géométrie différentielle à l'ÉNS, dont les travaux dirigés et les colles foisonnent de problèmes plaisants et enrichissants. Je me dois aussi de saluer Marc Sage et, à travers lui, toutes les personnes que je fréquentais en première année d'école, lors de la rédaction de cet ouvrage, avec lesquelles j'ai eu de si nombreux échanges et discussions, mathématiques ou non.

Alexis Museux, que j'ai eu le plaisir d'avoir comme colleur pendant mes deux années en classes préparatoires, m'a quant à lui transmit cette façon si agréable d'envisager les colles qui lui est propre, même si cela transparait difficilement dans le présent document.

Enfin, je ne pourrais trop remercier Michel Cognet et Jérôme Dégot qui m'ont permis de coller dans leurs classes, en MPSI au lycée Louis-le-Grand et en MP* au lycée Chaptal.

À tous, un grand merci.

G. Bisson
Paris, juin 2006
Nancy, mai 2009

Notations usuelles

$f : X \hookrightarrow Y$	la fonction f est injective
$f : X \twoheadrightarrow Y$	la fonction f est surjective
$\mathfrak{P}(E)$	l'ensemble des parties de l'ensemble E
$\lfloor x \rfloor$	la partie entière du réel x
$v_p(n)$	la valuation p-adique de n
C_n^k	le coefficient binomial « k parmis n »
δ_i^j	le symbole de Kronecker
$\mathfrak{S}_n$	le n^e groupe symétrique
$\mathfrak{A}_n$	le n^e groupe alterné
$\mathbb{K}_n[X]$	les polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	l'ensemble des morphismes de X dans Y
$\mathrm{End}(X)$	l'ensemble des endomorphismes de X
${}^t M$	la transposée de la matrice M
$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$	l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$	le groupe des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathscr{O}_n(\mathbb{K})$	le sous-groupe des matrices M orthogonales, c'est-à-dire vérifiant ${}^t MM = \mathrm{id}$
$\mathbb{I}$	le segment $[0; 1]$ (à homéomorphisme près)
$\mathbb{B}^k$	la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$
$\mathbb{S}^k$	la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{k+1}$, c'est-à-dire $\partial\mathbb{B}^{k+1}$

Liste des résultats

Table des matières

Chapitre I

Concepts algébriques fondamentaux

1.1 Logique élémentaire

Injectivité des fonctions des parties

Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y.
On définit $f_* : x \in \mathfrak{P}(X) \mapsto \{f(y) : y \in x\}$ et $f^* : y \in \mathfrak{P}(Y) \mapsto \{x : f(x) \in y\}$.
À quelle condition sur f l'application f_* (resp. f^*) est-elle injective ? Et surjective ?

Caractérisation ordinale de l'identité

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction vérifiant $f(n+1) > f(f(n))$ pour tout n.
Montrer que $f = \mathrm{id}$.

INDICATION. Montrer par récurrence sur n que $f(m) \leq n \Rightarrow m \leq n$.

Prolongements d'un ordre partiel

Montrer que tout ordre partiel peut se prolonger en un ordre total.

INDICATION. Traîter d'abord le cas des ensembles finis.

Théorème de Cantor–Bernstein

Soient $f : X \hookrightarrow Y$ et $g : Y \hookrightarrow X$ deux applications injectives.
Construire une bijection entre X et Y à partir de ces deux fonctions.

INDICATION. Introduire deux suites X et Y définies par $X_{k+1} = g(Y_k)$ et $Y_k = f(X_k)$ avec $X_0 = X \setminus g(Y)$ et montrer que f est une bijection de $\bigcup X_k$ dans $\bigcup Y_k$.

Formule du crible

Soit X une famille de parties d'un ensemble fini E indicée par un ensemble fini I. Montrer l'identité $\#\bigcup_{i\in I} X_i = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{\#J+1}\#\bigcap_{j\in J} X_j$.

INDICATION. On pourra raisonner à l'aide de fonctions indicatrices.

Caractérisation fonctionelle des ensembles infinis

Montrer qu'un ensemble est infini si et seulement si, pour toute application de lui-même dans lui-même, il admet une partie stable autre que l'ensemble vide et lui-même.

Quelques exemples en dénombrabilité

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques, c'est-à-dire des racines complexes de polynômes à coefficients rationnels, est dénombrable.
L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ sur lui-même est-il dénombrable ?

1.2 Structures algébriques fondamentales

Théorème chinois pour les groupes abéliens finis

Soit G un groupe abélien fini. On décompose son ordre n en produit de facteurs premiers $\prod p^{\alpha_p}$ et on définit $G_p = \mathrm{im}\left(x \mapsto x^{n/p^{\alpha_p}}\right)$. Montrer que G est isomorphe au produit cartésien des G_p et que $\#G_p = p^{\alpha_p}$.

INDICATION. Montrer qu'il existe des entiers u_p satisfaisant $1 = \sum u_p n/p^{\alpha_p}$ et qu'alors le morphisme $x \in G \mapsto \left(x^{u_p n/p^{\alpha_p}}\right) \in \prod G_p$ est inversible.

Groupe de Prüfer

Soit p un nombre premier. Montrer que $\{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ qui n'est pas isomorphe au produit de deux groupes non triviaux.

INDICATION. Montrer que tous ses sous-groupes stricts sont monogènes.

Groupe diédral

Montrer que le groupe des isométries du plan laissant stable un polygone régulier à n côtés ne dépend pas, à isomorphisme près, du polygone choisi.
Quel est son cardinal ? Quels en sont les sous-groupes ?

Sous-groupes finis de certains quotients

Considérons le groupe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$; il s'identifie au groupe des racines de l'unité.
Quels en sont les sous-groupes finis ?
Montrer qu'il est isomorphe à son quotient par tout sous-groupe fini.
Faire de même pour le quotient du groupe des racines de l'unité par son sous-groupe formé des élements dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier donné.

Inversion de Möbius

Munissons l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ de l'addition usuelle ainsi que du produit définit par $f \star g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$; montrer que cela en fait un anneau commutatif.
En caractériser les éléments inversibles.
Soit μ la fonction associant 0 aux multiples de carrés et $(-1)^r$ à tout entier qui s'écrit comme produit $p_1 \cdots p_r$ où les p_k sont premiers et distincts. Calculer $\mu \star (n \mapsto 1)$.
En déduire que, si $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, alors $g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)$.

Somme des puissances dans les corps premiers

Soit p un nombre premier et k un entier naturel. Que vaut la somme $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$?

Somme d'un nilpotent et d'un inversible

Montrer que, dans un anneau quelconque, la somme d'un élément nilpotent et d'un élément inversible (par exemple, l'unité) qui commutent est inversible.

Anneaux connexes

Montrer qu'un anneau dont tous les éléments sont indempotents est commutatif.
Montrer qu'un anneau commutatif non nul possède au moins deux indempotents et qu'il en possède exactement deux si et seulement s'il n'est pas isomorphe au produit de deux anneaux non nuls.

Critère d'isomorphisme des corps quadratiques

Soient α et β deux entiers non nuls. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{\beta})$ sont isomorphes si et seulement si $\sqrt{\alpha\beta}$ est un nombre entier.

1.3 Le groupe symétrique

Caractères complexes des permutations

Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^\times$.

INDICATION. Montrer que toutes les transpositions ont la même image.

Centre du groupe alterné

Déterminer le centre $\{x : \forall y, xy = yx\}$ du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ pour $n \leq 3$.
Faire ensuite de même pour $n \geq 4$.

INDICATION. Montrer que tout élément du centre stabilise toute partie à trois éléments.

Critère de conjugaison des permutations

Montrer que deux permutations d'un ensemble fini sont conjuguées si et seulement si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, elles admettent le même nombre d'orbites d'ordre k.

Nombre moyen de points fixes des permutations

Quel est le nombre moyen de points fixes des permutations de $\mathfrak{S}_n$?

INDICATION. Notant d_n^k le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ admettant k points fixes, on a $kd_n^k = kC_n^k d_{n-k}^0 = nC_{n-1}^{k-1} d_{(n-1)-(k-1)}^0 = nd_{n-1}^{k-1}$; sommer alors cette quantitié.

Nombre de dérangements

Quel est le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans points fixes, d'un ensemble à n éléments ?

INDICATION. Notant d_n ce nombre, montrer que $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ puis trouver $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$. On peut aussi appliquer la formule du crible aux ensembles $\{\sigma : \sigma(k) = k\}$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

1.4 Arithmétique, combinatoire et dénombrement

Formule de Legendre

Soient n un entier naturel et p un nombre premier.
Montrer que la valuation de $n!$ en p vaut $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \lfloor n/p^k \rfloor$.
En déduire par combien de zéros l'écriture décimale du nombre $10^n!$ se termine.

Diviseurs communs dans la suite de Fibonacci

Notons ϕ la suite de Fibonacci définie par $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$ avec $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = 1$.
Montrer que $\mathrm{pgcd}(\phi_m, \phi_n) = \phi_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$.

INDICATION. Montrer par récurrence sur m que $\phi_{n+m} = \phi_m \phi_{n+1} + \phi_{m-1}\phi_n$; alors, remarquant que $\mathrm{pgcd}(\phi_{n+1}, \phi_n) = 1$, déduire $\mathrm{pgcd}(\phi_{kn+r}, \phi_n) = \mathrm{pgcd}(\phi_r, \phi_n)$.

Nombres parfaits et nombres de Mersenne

Soit σ la fonction qui à un entier associe la somme de ses diviseurs ; par exemple $\sigma(4) = 7$.
Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
En déduire que les entiers pairs n vérifiant $\sigma(n) = 2n$ sont exactement ceux de la forme $2^{k-1}(2^k - 1)$ où $2^k - 1$ premier. Prouver qu'alors k est premier.

Théorème de Wilson

Montrer qu'un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! = -1 \mod p$.

Dénombrement dans un produit de groupes cycliques

Soit p un nombre premier et m et n deux entiers.
On considère le groupe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^m \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.
Combien a-t-il d'éléments d'ordre p ? Et d'ordre p^2 ?
Combien a-t-il de sous-groupes cycliques d'ordre p^2 ?
Et de sous-groupes non-cycliques d'ordre p^2 ?

INDICATION. Les deux dernières réponses sont $\frac{p^m-1}{p-1} p^{m+n-1}$ et $\frac{p^{m+n}-1}{p^2-1} \frac{p^{m+n-1}-1}{p-1}$.

Dénombrement des fonctions croissantes

Soient n et m deux entiers.
Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$?
Et de fonctions croissantes au sens large ?

Nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini

Montrer que le nombre R_n de relations d'équivalence sur un ensemble de cardinal n vérifie la relation de récurrence $R_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k R_k$.

1.5 Polynômes et fractions rationnelles

Valeurs premières d'un polynome

Montrer qu'aucun polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant ne peut prendre une infinité de valeurs premières en des entiers consécutifs. Étendre ce résultat à $\mathbb{R}[X]$.

INDICATION. Montrer que $P(n + kP(n))$ est divisible par $P(n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps commutatif

Établir l'égalité $n = \sum_{k|n} \phi(n)$ pour tout entier naturel n, où ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler. En déduire que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique.

INDICATION. On exploitera le fait que le polynôme $X^k - 1$ admet au plus k racines.

Irréductibilité de polynômes augmentés

Soit x une famille finie d'entiers distincts.
Montrer que le polynôme $\prod_i (X - x_i) - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

INDICATION. Si $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$, trouver des zéros de $Q + R$.

Automorphismes des algèbres de polynômes

Déterminer tous les automorphismes de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ dénote un corps quelconque.

Polynômes de Hilbert

Considérons l'endomorphism $\Delta : P(X) \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.
Quel est son noyau ? Quelle est son image ?
Notons $H_k(X)$ le polynôme $\frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$.
Montrer l'égalité $P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\Delta^k P)(0) H_k(X)$, quelque soit le polynôme $P(X)$.
En déduire une méthode pour calculer $\sum_{k=0}^{n} P(k)$.

Quasi-surjectivité des fonctions rationnelles complexes

Soit R une fonction rationnelle non constante à coefficients complexes.
Montrer que tous les nombres complexes, sauf peut-être un, sont dans son image.
À quelle condition R est-elle bijective ?

INDICATION. Si $R = P/Q$ et $\lambda \notin \operatorname{im} R$, le polynôme $P - \lambda Q$ n'a pas de racines.

Racines d'un polynôme aux coefficients de signes fixés

Soit $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme avec $(a_k) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ et $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
En considérant $P(X)/X^{n-1}$, montrer qu'il admet un unique zéro ρ sur $\mathbb{R}_+^*$
Prouver que tous ses zéros complexes sont de module inférieur à ρ.
Établir que $\rho \leq \max(1, \sum a_k)$ et que $\rho < 1 + \max a_k$.

1.6 Topologie élémentaire

Continuité des racines d'un polynôme

Munissant $\mathbb{C}_n[X]$ de la topologie produit découlant de son identification à $\mathbb{C}^{n+1}$ par les coefficients, montrer la continuité de l'application qui à un couple de polynômes associe le reste de la division euclidienne du premier par le second.
En déduire que si une suite de polynômes P admet pour limite $\mu \prod(X - \lambda^i)$ alors, à partir d'un certain rang, on peut écrire $P_k(X) = \mu_k \prod(X - \lambda_k^i)$ avec $\mu_k \to \mu$ et $\lambda_k^i \to \lambda^i$ pour tout i.

Morphismes des suites entières convergentes

Déterminer tous les morphismes de l'anneau des suites convergentes d'entiers relatifs.

Valeurs d'adhérence d'une suite ralentissante

Soit u une suite réelle vérifiant $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.
Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.
En déduire que la suite de terme général $\sin(\ln n)$ est dense dans $[-1; 1]$.
Qu'en est-il de celle de terme général $n^{1/3} \cos(\pi \sqrt{n})$?

Sous-goupes discrets des réels

Montrer que tous les sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$ sont de la forme $x\mathbb{Z}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
En déduire que si p est un entier non carré alors la suite dont le terme général est la partie fractionnaire de $n\sqrt{p}$ est dense dans l'intervalle $[0; 1]$.

INDICATION. Voir que le sous-groupe engendré par $\sqrt{p}$ et 1 ne peut pas être monogène.

Théorème de Beatty

On appelle densité d'une partie X de $\mathbb{N}^*$ la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la quantité $\#(X \cap \{1, \dots, n\})/n$. Toutes les parties de $\mathbb{N}^*$ admettent-elles une densité ?
Montrer que la densité de l'union de deux parties disjointes est la somme de leurs densités.
Quelle est, en fonction de $y \in \mathbb{R}$, la densité de l'ensemble $X_y = \{\lfloor n y \rfloor : n \in \mathbb{N}^*\}$?
En déduire que X_y et X_z partitionnent $\mathbb{N}^*$ si et seulement si y et z sont des nombres irrationnels dont la somme des inverses vaut l'unité.

Dérivation topologique

Quels sont l'image et les points fixes de l'opérateur associant à une partie de $\mathbb{R}$ l'ensemble de ses points d'accumulation ?

Partitions des ouverts réels en intervalles

Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Existe-t-il une décomposition similaire en intervalles fermés ?

Chapitre 2

Analyse des fonctions réelles

En l'absence d'indication contraire, les fonctions considérées ici seront supposées réelles d'une variable réelle.

2.1 Continuité

Version discrète du lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue. Que dire du comportement de la quantité $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Fonctions à valeurs uniformément multiples

Pour quels entiers naturels n existe-t-il une fonction réelle continue prenant exactement n fois chaque valeur ?

Égalité en des points à une distance fixée

Soit f une fonction continue définie sur $[0;1]$ prenant la même valeur en 0 et en 1.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$ admet une solution.
Et si l'on suppose seulement $n \in \mathbb{R}^*$?

INDICATION. On pourra considérer l'exemple des fonctions $x \mapsto x - \frac{\sin(n\pi x)^2}{\sin(n\pi)^2}$.

Valeur identique au diamètre opposé

Soit f une fonction continue du cercle unité dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un point en lequel elle prend la même valeur qu'en son opposé.

Croissance comme substitut de la continuité

Soit f une fonction positive en 0 et négative en 1.
On suppose qu'il existe une fonction continue dont la somme avec f est croissante.
Montrer que f admet un zéro sur $[0;1]$.

Fonctions à variations bornées

Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on définit $\sigma_a^b(f)=\sup\{\sum|f(x_{i+1})-f(x_i)|\}$ où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des subdivisions x de l'intervalle $[a;b]$.
Montrer que $b\mapsto\sigma_a^b(f)$ et $b\mapsto\sigma_a^b(f)-f(b)$ sont des fonctions croissantes.
En déduire que l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $\sigma_a^b(f)$ est fini quelque soit l'intervalle $[a;b]$ est exactement l'espace vectoriel engendré par les fonctions croissantes.

2.2 Relations de comparaison

Construction d'une fonction à croissance rapide

Soit f une suite de fonctions.
Construire une fonction g telle qu'en l'infini on ait $f_k=o(g)$ pour tout indice k.

Équivalence d'exponentielles

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur des fonctions réelles f et g pour que les quantités e^f et e^g soient équivalentes en l'infini.

Cesàro en version continue

Soit f une fonction continue pour laquelle la quantité $f(x+1)-f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers l'infini. Montrer que $f(x)/x$ tend vers cette même limite.

2.3 Dérivabilité

Inégalités de Kronecker

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^n([0;1],\mathbb{R})$ on définit $M_k=\sup|f^{(k)}|$.
Montrer l'inégalité $M_k\le 2^{\frac{1}{2}k(n-k)}M_0^{1-k/n}M_n^{k/n}$.

INDICATION. On la montrera d'abord pour $n=2$ puis raisonnera par récurrence.

Théorème de Darboux

Montrer que, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, la dérivée de toute fonction dérivable vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

INDICATION. On pourra montrer que l'image par f' de l'intervalle $[a;b]$ est recouverte par les images des deux fonctions $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $x \mapsto \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.

2.4 Développements limités

Utilisation du théorème de Cesàro pour les suites itérées

Soit f une fonction admettant un développement limité en $x = 0$ de la forme $f(x) = x - ax^b + o(x^b)$ avec $a > 0$ et $b > 1$.
Lorsque u_0 est positif et suffisament petit, trouver un équivalent de la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Appliquer ce résultat aux fonctions $f(x) = xe^{-x}$, $f = \sin$ et $f = \mathrm{id} \cdot \cos$.

INDICATION. Trouver α tel que $0 \neq \lim(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ puis penser à Cesàro.

Formule de Faulhaber

Soit B_k l'unique fonction telle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on ait $\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^n \frac{B_k(x)}{k!} t^k + o(t^n)$.
Montrer que $B_k(x)$ est un polynôme en x de degré k.
On note $b_k = B_k(0)$. Montrer que $B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k x^{n-k}$.
Que vaut $B_k(x+1) - B_k(x)$? En déduire une relation de récurrence sur les b_k.
Montrer enfin la formule $\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k b_k m^{n+1-k}$.

2.5 Convexité

Moyennes d'une fonction réelle

Soit f une fonction continue strictement positive sur $[a;b]$.
Pour tout réel t, on définit la quantité $M_t(f) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^t \, dx\right)^{1/t}$.
Déterminer les limites de cette quantité lorsque t tends vers 0, ∞ et $-\infty$.

Minimum de fonctions convexes

Notons $m(f)$ l'ensemble sur lequelle une fonction réelle convexe atteint son minimum.
Montrer que c'est un intervalle et rappeler pourquoi f est continue.
Soit y une famille finie de réels. Pour tout $p \in [1; \infty[$, on définit $f_p : x \mapsto \sum |x - y_i|^p$.
Montrer que, si $p > 1$, alors $m(f_p)$ est un singleton et le déterminer dans le cas $p = 2$.
Que dire de $m(f_1)$?

Inégalité de Jensen

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et ϕ une fonction convexe sur son image.
Établir l'inégalité $\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi \circ f$.

2.6 Intégration

Lemme de Lebesgue

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ et g une fonction continue T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer l'identité $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)g(nt)dt = (\frac{1}{T}\int_0^T g)\int_a^b f$.

Intégrabilité et uniforme continuité

Montrer qu'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ qui ne tend pas vers 0 en l'infini n'est pas uniformément continue.

Intégrabilité de fonctions d'argument uniformément continu

Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue alors l'intégrale $\int \exp(if)$ ne converge pas en l'infini.
Donner un exemple de fonction pour laquelle cette intégrale converge.

Majoration de l'erreur des méthodes d'intégration numériques

Soit f une fonction rélle de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que l'erreur commise par la méthode d'intégration numérique des rectangles, c'est-à-dire la quantité $|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})|$, est majorée par $\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n}\max|f'|$.
Établir une majoration similaire de l'erreur de la méthode d'intégration numérique des trapèzes lorsque la fonction est de calsse $\mathscr{C}^2$.

Irrationnalité de π

Supposons qu'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\pi = \frac{a}{b}$. Montrer qu'alors $\frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (bx - a)^n \sin(x) dx$ est un nombre entier qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Qu'en déduire ?

Relation de distribution des polynômes de Bernoulli

Montrer qu'il existe un unique polynôme, B_n, vérifiant $\int_y^{y+1} B_n = y^n$ pour tout y.
Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'identité $B_n(t) = m^{n-1} \sum_{r=0}^{m-1} B_n(\frac{t+r}{m})$.

2.7 Équations différentielles ordinaires

Lemme de Gronwall

Soient ϕ une fonction continue positive, a un réel positif et y une fonction réelle.
On suppose que l'inégalité $y(t) \leq a + \int_0^t y\phi$ est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que $y(t) \leq a \exp \int_0^t \phi$ l'est alors aussi.

INDICATION. Majorer la dérivée de la fonction $t \mapsto (\int_0^t y\phi) \exp(-\int_0^t \phi)$ par une dérivée parfaite et écrire que la différence de leurs deux primitives est croissante.

Asymptotique et dérivations multiples

Notons D l'opérateur de dérivation des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer qu'il y a équivalence entre :

— les racines de P sont toutes de partie réelle strictement négative ;
— pour tout f, si $P(D)(f) \to_\infty 0$, alors $f \to_\infty 0$.

Pendule sans frottement

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons x_α la solution maximale du problème différentiel $x'' = -\sin x$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = \alpha$. Quel est son ensemble de définition ? Étudier la périodicité et le comportement en l'infini de x_α ?

INDICATION. La quantité $x_\alpha'^2/2 - \cos x_\alpha$ est constante ; que représente-t-elle ?

Petites oscillations d'un pendule sphérique

Considérons les petites oscillations d'un pendule dans l'espace usuel.
Notant x et y ses déviations suivant les axes horizontaux, on a $\partial_{t^2} x = -x$ et $\partial_{t^2} y = -y$.
Transformer ces équations en quatre équations du premier ordre en quatre variables.
Montrer que la somme des carrés de ces quatre variables est constante, c'est-à-dire que les trajectoires se dessinent sur des sphères centrées en 0.
Montrer que les trajectoires sont des grands cercles de ces sphères.
Noter toutefois que tous les grands cercles ne sont pas des trajectoires.

Zéros d'une base de solutions d'une équation différentielle ordinaire

Soit (f, g) une base de l'espace vectoriel solution de l'équation différentielle homogène $y'' + py' + qy = 0$ où p et q sont des fonctions continues sur un intervalle I.
Montrer que les zéros de f sont isolés et qu'ils sont entrelacés avec ceux de g.

INDICATION. On pourra raisonner avec le Wronksien.

Théorie de Sturm

Soient q_1 et q_2 deux fonctions réelles continues sur un intervalle I vérifiant $q_1 \leq q_2$.
Pour $i \in \{1, 2\}$ on note E_i le problème différentiel $y'' + q_i y = 0$ et y_i l'une de ses solutions.
Si a et b sont deux zéros consécutifs de y_1, montrer que y_2 s'annule sur $]a; b]$.
Que cela signifie-t-il lorsque $q_1 = q_2$?
Si q_1 admet un encadrement du type $0 < m < q_1 < M$, encadrer la distance entre deux zéros consécutifs de y_1. On trouve $\pi/\sqrt{M} \leq b - a \leq \pi/\sqrt{m}$.

Choix d'une base de solutions

Déterminer les fonctions f pour lesquelles le problème différentiel $y'' + y' + fy = 0$ admet une base de solutions de la forme (g, g^2).

Chapitre 3

Algèbre linéaire élémentaire

En l'absence de précisions, nous travaillerons dans un espace vectoriel arbitraire E sur un corps fixé $\mathbb{K}$.

3.1 Espaces vectoriels

Formules de Grassmann

Combien y a-t-il de familles libres à r éléments dans un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini à p^α éléments ? Et de sous-espaces de dimension r ?

Union finie de sous-espaces stricts

Montrer qu'en caractéristique zéro aucun espace vectoriel n'est union finie de sous-espaces stricts.

Indépendance linéaire des caractères

Montrer que toute famille de morphismes distincts d'un groupe G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^\times$ d'un corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéairement indépendante.

3.2 Applications linéaires

Somme de deux projecteurs

Soient p et q deux projecteurs.
Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Établir qu'alors $\operatorname{im}(p+q) = \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q$ et $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Identification d'une somme de projecteurs

Soit f une famille finie d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n vérifiant $\sum f_i = \mathrm{id}$ et $\sum \operatorname{rg} f_i \leq n$. Montrer que les f_i sont des projecteurs.

Supplémentaire stable par un groupe fini d'automorphismes

Montrer que tout sous-espace F stable par un groupe d'automorphismes d'ordre r fini admet un supplémentaire stable par ce même groupe.

INDICATION. Si p est un projecteur sur F, étudier $\frac{1}{r} \sum_{g \in G} g\,p\,g^{-1}$.

Adjonction et nilpotence

On définit l'opérateur $\operatorname{ad} : f \in \operatorname{End}(E) \mapsto (g \mapsto f\,g - g\,f) \in \operatorname{End}(\operatorname{End}(E))$.
Montrer que si f est nilpotent alors $\operatorname{ad} f$ l'est aussi.
Déterminer dans ce cas son indice de nilpotence en fonction de celui de f.

INDICATION. Notant n l'indice de nilpotence de f, établir que $f^{(n-1)} \in \operatorname{im}(\operatorname{ad} f)^{(2n-2)}$ et pour cela que, pour tout $a \in \operatorname{End}(E)$, il existe $b \in \operatorname{End}(E)$ vérifiant $a\,b\,a = a$.

Suite exacte

Soit $(f_i : X_i \to X_{i+1})_{i \in \{0,\dots,n\}}$ une suite exacte, c'est-à-dire qui vérifie $X_0 = X_{n+1} = 0$ et $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$ quel que soit i. Montrer l'identité $0 = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \dim X_i$.

3.3 Algèbre matriciel

Idéaux de matrices

Quels sont les idéaux à droite de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?
Et à gauche ? Et les idéaux bilatères ?

Caractérisation exotique de l'inversibilité

Soit une application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tout couple $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que les matrices M inversibles sont exactement celles pour lesquelles $f(M) \neq 0$.

Formes linéaires des matrices

Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $M \mapsto \operatorname{tr}(MA)$ pour une unique matrice A. Lesquelles de ces formes linéaires f vérifient $f(AB) = f(BA)$?

Les endomorphismes de matrices préservent la trace

Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, tout endomorphisme ϕ de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ préserve la trace, c'est à dire que $\operatorname{tr} \circ \phi = \operatorname{tr}$.

INDICATION. On pourra déterminer les formes linéaires θ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour lesquelles l'égalité $\theta(AB) = \theta(BA)$ est toujours vérifiée.

Matrices à diagonale nulle

Considérons l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille n.
Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.
Montrer que toute matrice M à diagonale nulle peut s'écrire $XD - DX$ avec D diagonale.
Conclure que les matrices de la forme $XY - YX$ sont exactement celles de trace nulle.

INDICATION. On pourra considérer les matrices $X = (\frac{1}{i-j} m_{i,j})$ et $D = (i\,\delta_{i,j})$.

Disques de Gerschgorin

Montrer qu'une matrice M à diagonale prépondérante, c'est-à-dire dont les coefficients vérifient $|m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$ pour tout i, est inversible.
En déduire une localisation du spectre d'une matrice dans l'union de n disques.

Hyperplans et groupe linéaire

Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

3.4 Déterminants

Déterminant de sommes

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $\det(A+X) = \det(B+X)$ pour tout X alors $A = B$.

INDICATION. Commencer par le cas $B = 0$ et réduire A en une matrice équivalente.

Déterminant de la transposition

Quel est le déterminant de l'opérateur de transposition sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Résultant de deux polynômes

Soient P et Q deux polynômes, de degrés respectifs p et q.
Écrire la matrice du morphisme $(U, V) \in \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] \mapsto UP + QV$.
À quelle condition est-il inversible ?
En déduire tous les polynômes du type $X^3 + aX + b$ admettant une racine multiple.

Indépendance de familles de fonctions réelles

Montrer qu'une famille f de n fonctions réelles est libre si et seulement s'il existe une famille $x \in \mathbb{R}^n$ telle que le déterminant de la matrice $(f_i(x_j))$ soit non nul.

Polynomialité en deux variables

Soit $\mathbb{K}$ un corps indénombrable et f une fonction de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$ qui est polynomiale en chacune de ses variables lorsque l'autre est fixée. Prouver que f est polynomiale.

INDICATION. Montrer l'existence de fonctions a_i telles que $f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^i$ pour une infinité de x. Choisir alors n scalaires distincts et montrer en résolvant un système linéaire que les a_i sont elles aussi polynomialles.

Matrices inversibles à coefficients polynomiaux

Soit $M : \mathbb{C} \to \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ une application dont toutes les composantes sont polynomiales. Montrer que les composantes de l'application $z \mapsto M(z)^{-1}$ le sont aussi.

Première ligne des matrices entières inversibles

Caractériser les vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ qui forment la première colonne d'une matrice de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{Z})$?

INDICATION. Montrer avec Bézout que les coefficients doivent être premiers entre eux.

Signe du déterminant d'une somme de puissances

Soient A et B deux matrices réelles qui commutent. On suppose en outre le déterminant de leur somme positif. Montrer que, pour tout entier positif p, on a $\det(A^p + B^p) \geq 0$.

INDICATION. Penser à factoriser $X^p + Y^p$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

3.5 Dualité

Dual de l'espace des suites stagnantes

Quel est le dual de l'espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang ?

Endomorphismes laissant stable les hyperplans

Quels sont les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui laissent stable chacun de ses hyperplans ?

Chapitre 4

Quelques notions topologiques

4.1 Topologie générale

La complétude n'est pas topologique

Montrer que l'espace $]0;1]$ muni de la distance $(x,y) \mapsto |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ est complet bien qu'ayant exactement les mêmes ouverts que muni de la distance usuelle.

Convergence locale des fractions rationnelles

Fixons $z \in \mathbb{C}$ et notons $v_z(Q)$ l'ordre de z comme racine d'une fraction rationnelle Q.
Montrer que l'application $(R,S) \mapsto 2^{-v_z(R-S)}$ définit une distance sur $\mathbb{C}(X)$.
Donner des exemples non triviaux de suites convergeant pour cette distance.
Montrer que l'espace métrique $\mathbb{C}(X)$ muni de cette distance n'est pas complet.

Construction de distances topologiquement équivalentes

Soient (E,d) un espace métrique et ϕ une application concave de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même continue en zéro et vérifiant telle que $\phi^{-1}\{0\} = \{0\}$. Montrer que $\phi \circ d$ est une distance définissant la même topologie que d.

Espace normaux et lemme d'Urysohn

Un espace topologique est dit normal s'il est séparé et que deux fermés disjoints sont toujours contenus dans deux ouverts disjoints.
Dans un tel espace, étant donnés deux fermés disjoints F et G, montrer qu'il existe une application réelle continue valant 0 sur F et 1 sur G ; c'est le lemme d'Urysohn.
Montrer réciproquement qu'un espace séparé vérifiant le lemme d'Urysohn est normal.
Déduire que les espaces métriques sont de ce type.

INDICATION. Notant U_1 le complémentaire de G, prouver l'existence d'un ouvert $U_{1/2}$ tel que $F \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U}_{1/2} \subseteq U_1$; itérer afin d'obtenir une famille indexée par les dyadiques.

4.2 Compacité

Subtil théorème de point fixe

Soit f une fonction continue d'un espace métrique compact dans lui-même telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x \neq y$. Montrer que f admet un point fixe.

Compactification d'Alexandroff

Soit E un espace topologique localement compact. Étant donné un élément x extérieur à E, on munit l'ensemble $E \cup \{x\}$ de la topologie dont les ouverts sont ceux de E ainsi que les complémentaires de compacts de E.
Montrer que l'espace ainsi construit est compact. Quel est-il dans le cas $E = \mathbb{R}$?

Compactification de Stone–Čech

Un espace est dit complètement régulier s'il est séparé et que, pour tout point extérieur à un fermé, il existe une application réelle continue valant 0 sur ce fermé et 1 en ce point.
Soit X un tel espace. Notons βX l'adhérence de l'image de la fonction qui à $x \in X$ associe la famille $(\lambda(x))_{\lambda \in \mathscr{C}(X,\mathbb{I})}$ dans $\mathbb{I}^{\mathscr{C}(X,\mathbb{I})}$. Montrer que c'est un compact.
Montrer que X est homéomorphe à son image par cette fonction.
Montrer que toute fonction continue de X dans un espace compact se prolonge de façon unique sur βX. C'est le seul espace compact possédant cette propriété.

INDICATION. Montrer que, pour $f \in \mathscr{C}(X, Y)$, l'application qui à $(t_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{C}(X,\mathbb{I})}$ associe $(t_{\mu \circ f})_{\mu \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{I})}$ est continue et peut être restreinte à $\beta X \to \beta Y$.

4.3 Connexité

Topologie lexicographique

Munissons $[0;1]^2$ de la topologie induite par l'ordre lexicographique.
Montrer que cet espace est compact mais pas séparable, donc pas métrisable.
Montrer qu'il est connexe mais non connexe par arc.

INDICATION. Voir qu'un chemin allant d'un point à un autre passe par tous les points qui sont (pour l'ordre) entre ces deux points.

Connexité et rationnalité dans le plan

Le sous-ensemble $((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{Q})\cup(\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))$ de $\mathbb{R}^2$ est-il connexe ?
Et $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cup((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))$?

Connexité par chemins continuement dérivables

Soit un chemin $\phi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{I},\mathbb{R}^d)$ de dérivée ne s'annullant pas.
Construire une fonction strictement croissante h de $\mathbb{I}$ dans lui-même tel que $\phi\circ h$ soit continue et injectif.

4.4 Théorie de Baire

Théorème de Banach–Steinhaus

Un espace est dit « de Baire » si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
Montrer que c'est le cas des espaces métriques complets, ainsi que des espaces topologiques localement compacts.
Soit L une famille de morphismes continus entre deux espaces de Banach telle que, pour tout x, l'ensemble $\{\ell(x):\ell\in L\}$ soit borné. Prouver que L est uniformément continue.

Résultat anti-Peano

Montrer qu'aucune fonction de $\mathscr{C}^1(\mathbb{I},\mathbb{I}^2)$ n'est surjective.
Qu'en est-il des fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{I}^2)$?

Chapitre 5

Convergence des suites et séries

5.1 Espaces vectoriels normés

Convergence et paraboles

Étudier la convergence de la suite de fonctions définie par la récurrence $f_n : x \in [0;1] \mapsto 1 + \int_0^x f_{n-1}(t - t^2) dt$ avec $f_0 = 1$.

Point fixe d'un opérateur d'intégration

Existe-t-il une fonction bornée $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour laquelle on a $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f(t)^2} dt$?

5.2 Familles sommables

5.3 Séries numériques

Série des inverses des nombres premiers

Quelle est la nature de la série de terme général $1/p_n$ où p_n dénote le n^{e} nombre premier ?

INDICATION. On utilisera l'équivalence $\log 1/(1 - 1/p) \sim 1/p$.

Étude asymptotique de la fonction indicatrice d'Euler

Étudier les limites inférieure et supérieure de la suite $\phi(n)/n$.

INDICATION. Considérer $n = \prod_{k=1}^N p_k$ où p_k désigne le k^{e} nombre premier.

Permutations d'une série semi-convergente

Montrer que, si la série réelle de terme général a_i est semi-convergente, alors pour tout réel ℓ, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ pour laquelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} = \ell$.

Sommes de séries alternées

Que vaut la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$?
On change à présent l'ordre de ses termes en alternant p termes positifs et q termes négatifs ; par exemple, pour $p = 3$ et $q = 2$ cela donne $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.
Qu'en devient la somme ?

Sommation dans une fonction continûment dérivable

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ pour laquelle $\lim_\infty \frac{f'}{f} = -\infty$.
Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge et donner un équivalent du reste.

5.4 Suites et séries de fonctions

Convergence uniforme d'une série de fonctions

Montrer que la série de fonctions de terme général $x^n \sin(nx)/n$ converge uniformément sur $[-1; 1]$ vers la somme $\arctan(\frac{x \sin x}{1-x\cos x})$. En déduire l'identité $\sum \sin(n)/n = \pi/2 - 1/2$.

Théorème de Dini

Montrer que si une suite croissante de fonctions continues d'un espace métrique compact vers $\mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.

INDICATION. Pour $\epsilon > 0$, considérer les ensembles $\{x : \lim(f)(x) - f_n(x) < \epsilon\}$.

Développement eulérien de la fonction sinus

Posons $P_n(x) = (1 + ix/n)^n - (1 - ix/n)^n$; on sait que $\lim P_n(x)/2i = \sin(x)$.
Déterminer les racines de $P_{2n}(x)/x$.
En déduire l'identité $\lim \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x^2/(4n^2 \tan(\frac{k\pi}{2n})^2)) = \sin(x)/x$.
Montrer que cette convergence est uniforme.

Théorie spectrale de fonctions réelles

Considérons l'opérateur $H : h \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R}) \mapsto (x \mapsto h(\frac{x}{2}) + h(\frac{x+1}{2}))$.
Montrer que son spectre est inclu dans $[-2;2]$.
Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$ et $g : x \mapsto (\frac{\pi}{\sin \pi x})^2$ sont égales sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

INDICATION. Appliquer H au prolongement par continuité de $f - g$.

5.5 Séries entières

Rayon de convergence et puissances

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $\rho > 0$.
Exprimer en fonction de ρ et de $k \in \mathbb{N}$ ceux de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$, $\sum a_n^k z^n$, $\sum a_n z^{kn}$ et $\sum a_{nk} z^n$.

Fractions rationnelles et suites réccurentes

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe. Montrer que, s'il $\lambda \in \mathbb{C}^k$ vérifiant $a_{n+k+1} + \sum_{i=0}^k \lambda_i a_{n+i} = 0$ pour tout n, alors la série entière est celle d'une fraction rationnelle.
Ce résultat admet-il une réciproque ?

Théorème de Liouville

Soit $f : z \mapsto \sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence ρ.
Montrer que, quelque soit $r < \rho$, on a la relation $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.
Supposant $\rho = \infty$, en déduire que si f est bornée alors elle est constante.
Plus généralement, montrer que si elle est bornée en valeur absolue par un polynôme de degré n alors c'est elle-même un polynôme de degré n.

Nombres de mots bien parenthésés

Notons a_n le nombre de bons parenthésages d'un mot de longueur n, c'est à dire utilisant $n-2$ couples de parenthèses. Montrer la relation de récurrence $a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k a_{n+1-k}$.
Calculer le carré de la série entière $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ et en déduire une expression pour a_n.

Pseudo-sommation de Riemann

Soit ϕ une fonction décroissante intégrable de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$.
Montrer que $\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^\infty h\phi(nh)$ existe et en déterminer la valeur.
En déduire un équivalent en 1^- de la série entière $\sum_{n=1}^\infty x^n/\sqrt{n}$.

INDICATION. Poser $h = -\ln(x)$ et $\phi : t \mapsto e^{-t}/\sqrt{t}$.

Calcul de l'intégrale Gaussienne

Montrer l'encadrement $(1-x/n)^n \leq e^{-x} \leq (1+x/n)^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;n]$.
Posons $x = t^2$ et intégrons-en les membres sur $[0;\sqrt{n}]$.
Trouvant un équivalent de $\int_0^\infty (1+u^2)^{-n}\,du$, montrer l'identité $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

5.6 Séries de Fourier

Annulation des coefficients de Fourier

Montrer que tout sous-espace vectoriel E fermé pour la norme infinie et stable par translation de l'espace $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions 2π-périodiques continues peut s'écrire sous la forme $\{f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) : \forall k \in I, c_k(f) = 0\}$ pour un certain ensemble $I \subseteq \mathbb{Z}$.

INDICATION. En écrivant une somme de Riemann, voir que si $f \in E$ vérifit $c_0(f) \neq 0$ alors $(t \mapsto 1) \in E$.

Développement en série entière des fonctions holomorphes

Montrer que toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ au sens complexe sur le disque $D(0,\rho) \subseteq \mathbb{C}$ y est développable en série entière.

INDICATION. En dérivant par rapport à r la définition de $c_n(\theta \mapsto f(re^{i\theta}))$, montrer que ce coefficient s'écrit sous la forme $d_n r^n$ avec $d_{n<0} = 0$.

Phénomène de Gibbs

Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f valant -1 sur $[-\pi;0[$ et 1 sur $[0;\pi[$. Étudier alors les extrema de sa série partielle au voisinage de 0.

Inégalité d'optimisation

Soit une fonction $f \in \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer l'inégalité $\int_0^1 f'^2 \geq \pi^2 \int_0^1 f^2$. Que dire du cas d'égalité ?

INDICATION. Écrire l'égalité de Parseval pour g et g' où g dénote la fonction impaire 2π-périodique égale à $x \mapsto f(x/\pi)$ sur $[0;\pi]$.

Fonction zêta de Riemann et nombres de Bernoulli

Soit B la suite de polynômes définie par $B_n' = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n = 0$ pour $n > 0$ et $B_0 = 1$.
Montrer l'identité $c_k(\widehat{B}_n) = -\frac{n!}{(2i\pi k)^n}$ pour tout $n > 0$, où $\widehat{B}_n$ dénote la fonction 2π-périodique coïncidant avec $x \to B_n(x/2\pi)$ sur $[0; 2\pi]$.
Déduire la valeur de $\zeta(2p)$ de la convergence en 0 de la série de Fourier de $\widehat{B}_{2p}$.

5.7 Intégrales à paramètre

Généralisation des intégrales de Wallis

Quel est le domaine de définition et la classe de la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$?
Montrer qu'elle est décroissante et vérifit $f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x)$.
Étudier la periodicité et la classe de $g : x \mapsto (x+1)f(x)f(x+1)$.
Montrer que g est constante et en déduire un équivalent de f en l'infini.

INDICATION. Comme g est périodique, il suffit de montrer qu'elle admet une limite en l'infini ; utiliser alors l'équivalent de $f(n)$ donné par les intégrales de Wallis.

Étude d'une intégrale à paramètre

Quel est le domaine de définition de la fonction $g : t \mapsto \int_0^\infty \sin(xt)/(x+x^3) dx$?
Montrer qu'elle est lipschitzienne puis bornée. En déterminer la limite en l'infini.

INDICATION. Le lemme de Lebesgue donne $g \sim \int_0^\epsilon \sin(xt)/(x+x^3) dx$, ce qu'on peut ramener à l'intégrale de Dirichlet.

Intégration de fractions rationnelles

On souhaite calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} x^\mu/(x^\lambda+1) dx$ pour tout paramètres $\lambda \in]1; \infty[$ et $\mu \in]-1; \lambda-1[$. Considérons d'abord le cas $\lambda = 2n$ et $\mu = s$ où les entiers n et s satisfont $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq 2n-2$.
Décomposer la fraction rationnelle $z^s/(z^{2n}+1)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}$.
Utiliser l'identité $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) = \sin(\frac{nh}{2}) \sin(a+(n-1)\frac{h}{2}) / \sin(\frac{h}{2})$ pour montrer l'égalité $\int_0^\infty x^s/(x^{2n}+1) dx = \frac{\pi}{2n} / \sin((s+1)\frac{\pi}{2n})$.
En déduire la valeur de $\int_0^\infty x^s/(x^n+1) dx$.
Généraliser cette approche aux nombres réels λ et μ, en commençant par le cas $\mu = 0$.

Chapitre 6

Réduction des endomorphismes

6.1 Polynômes d'endomorphismes

Nullité de la trace des puissances

Montrer qu'une matrice carrée A à coefficients réels est nilpotente si et seulement si pour tout entier naturel n elle vérifit $\operatorname{tr}(A^n) = 0$.

Calcul fonctionnel en dimension finie

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et x une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On note $\psi_x(f)$ la matrice $P(x)$ où P est un polynôme interpolant f en les valeurs propres de x. Autrement dit, si $\prod_{j=1}^m (X - \lambda_j)^{r_j}$ dénote le polynôme minimal de x, alors P vérifit $P^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j)$ pour tout $k \in \{0, \dots, r_j - 1\}$ et tout indice j. Montrer que $\psi_x(f)$ ne dépend pas du choix de P.
Montrer que ψ_x est un morphisme d'algèbres.
Vérifier que, pour $f = \exp$, cette construction coïncide avec l'exponentielle matricielle.
Si x est une matrice nilpotente et k un entier, établir l'existence d'une solution y à l'équation $(\mathrm{id} + y)^k = \mathrm{id} + x$.

Adjonction et identité en dimension infinie

Montrer que, si deux endomorphismes u et v satisfont $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$, ils n'admettent pas de polynôme minimal et sont de rang infini.

6.2 Valeurs propres et espaces caractéristiques

Valeurs propres communes

Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possèdent r valeurs propres communes si et seulement si l'équation $AX = XB$ admet une matrice solution X de rang r.

INDICATION. Si $AX_i = \lambda_i X_i$ et ${}^t B Y_i = \lambda_i Y_i$, poser $X = \sum_{i=1}^{r} X_i {}^t Y_i$.

Sous-espaces caractéristiques

Soit M une matrice carrée complexe. On pose $F_\lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \ker(M - \lambda \operatorname{id})^k$.
Montrer que c'est un sous-espace stable par M.
Établir que le projecteur sur F_λ suivant $\bigoplus_{\mu\neq\lambda} F_\mu$ est un polynôme en M.

Décomposition de Jordan

Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre k de $E = \mathbb{C}^n$. Donner la matrice de la restriction de u au sous espace F engendré par un élément x de $E \setminus \ker u^{(k-1)}$.
Soit f une forme linéaire ne s'annulant pas en $u^{(k-1)}(x)$.
Montrer que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \ker(f \circ u^i)$ et F sont stables par u et en somme directe.
En conclure une façon de réduire un endomorphisme complexe.

6.3 Diagonalisabilité et trigonalisabilité

Diagonalisabilité d'une matrice de petit rang

À quelle condition sur $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ la matrice ci-dessous est-elle diagonalisable ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisabilité de la composition

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. À quelle condition l'endomorphisme qui à $v \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ associe $u \circ v$ est-il diagonalisable ?

Adjonction et sous-algèbres torales

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Prouver que son endomorphisme adjoint $\mathrm{ad}(u) \in \mathrm{End}(\mathrm{End}(E))$ qui à $v \in \mathrm{End}(E)$ associe $u \circ v - v \circ u$ est aussi diagonalisable.
Déterminer ses valeurs propres et les dimensions de ses espaces propres.
Montrer que toute sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ formée exclusivement d'éléments dont l'adjoint est diagonalisable est abélienne.

6.4 Topologie de l'algèbre des matrices

Compacité et polynômes annulateurs

À quelles conditions l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ annulées par un polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$ est-il compact ? Et dans le cas réel ?

Homéomorphicité de la décomposition polaire

Montrer que l'application $(O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{SDP}_n(\mathbb{R}) \to OS \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, produit de matrices orthogonales et symétriques définies positives, est bijective. Montrer que sa réciproque (appelée décomposition polaire) est un homéomorphisme en utilisant la compacité de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Groupes topologiques

Quels sous-groupes de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ admettent-ils la matrice identité comme point intérieur ?

INDICATION. Montrer qu'un tel sous-groupe est ouvert puis fermé.

Rang et connexité

Pour quelles parties $P \subseteq \{0, \ldots, n\}$ l'ensemble $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{rg}(M) \in P\}$ est-il connexe par arc ?

INDICATION. Si $\mathrm{rg}(M) < n$, on écrira M comme $P J_r Q$ avec $P, Q \in \mathscr{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

6.5 Exponentiation matricielle

Groupes de matrices à un paramètre

Décrire les morphismes de groupes $\gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}))$. Et ceux de classe $\mathscr{C}^0$?

INDICATION. Considérer une primitive Γ et voir que $\Gamma(t+\epsilon) - \Gamma(t) = \gamma(t)\int_0^\epsilon \gamma(s)ds$.

Solutions à norme constante

Montrer que la norme des solutions x du problème différentiel $X' = AX$ pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée ne dépend pas du temps si et seulement si A est antisymétrique.

Chapitre 7

Calcul différentiel élémentaire

7.1 Différentiabilité

Holomorphie

On identifie implicitement $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par la décomposition $z = x + iy$. Montrer qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est dérivable par rapport à z si et seulement si ses dérivées partielles réelles vérifient $\partial_x f + i\partial_y f = 0$.
Admettant que f est alors $\mathscr{C}^\infty$, prouver que $\Delta\Re f = \Delta\Im f = 0$.
En déduire que $\Delta|f|^2 = 2(|\nabla\Re f|^2 + |\nabla\Re f|^2) \geq 0$.

Distance d'une cubique à l'origine

Quelle est la distance à l'origine de la cubique d'équation $xyz = a$ dans $\mathbb{R}^3$ où a est un réel strictement positif fixé ? Est-elle atteinte ? En quel point ?

Rang de la différentielle des puissances de matrices

Montrer que le rang de la différentielle de la fonction associant à une matrice carrée complexe M de taille n le vecteur $(\operatorname{tr} M, \dots, \operatorname{tr} M^n)$ est le degré du polynôme minimal de M.

7.2 Équations aux dérivées partielles

L'équation de transport de Burger

Notons (t, x) les coordonnées des points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble des fonctions $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions du problème différentiel $\partial_t u - \partial_x u = 0$ avec comme condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$ pour un certain $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fixé.
Faire de même pour le problème $\partial_t u + u\partial_x u = 0$.

INDICATION. Regarder les lignes de niveau d'une solution u, c'est-à-dire les chemins $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ pour lesquels $u \circ \phi$ est constante.

7.3 Problèmes d'extrémums

Fonctions à laplacien positif en dimension deux

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{B}^2$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathring{\mathbb{B}}^2$. Supposant qu'en tout point de $\mathring{\mathbb{B}}^2$ on ait $\Delta f \geq 0$, montrer que f atteint son maximum sur $\partial\mathbb{B}^2$.

INDICATION. Commencer par supposer $\Delta f > 0$ (on diagonalisera la matrice hessienne) puis considérer $f + \epsilon\|\cdot\|^2$.

Extremum de la somme sur un domaine fermé

Étant donné un réel strictement positif a, que dire des extremums de la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum x_i$ sur le domaine $(\mathbb{R}_+^*)^n \cap \sum x_i^{-1} = a$?

7.4 Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

Fonctions différentiellement isométriques

Montrer qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ dont la différentielle est, en tout point, une isométrie est une isométrie.

INDICATION. Voir que c'est localement une isométriea puis prendre une base affine.

7.5 Intégrales multiples

Volume d'une hyperboule

Calculer le volume de la boule unité et l'aire de la sphère unité en dimension n arbitraire. En quelles dimensions ces quantités sont-elles maximales ?

Fonctions infiniement dérivables d'intégrale nulle

Montrer que l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ d'une fonction $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact est nulle si et seulement s'il existe n fonctions $G_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact telles que $g = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} G_i$.

Points d'un réseau dans un domaine dilaté

Soit D une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est paramétrable par une famille finie de fonctions lipschitziennes à variable dans $\mathbb{I}^{n-1}$, c'est-à-dire que ∂D est recouvert par les images de ces fonctions, et soit un réseau de domaine fondamental F. On peut considérer par exemple le réseau $\mathbb{Z}^n$ et le domaine fondamental $F = [0;1]^n$.
Montrer que le nombre de points du réseau contenu dans λD est équivalent à $\frac{\operatorname{vol} D}{\operatorname{vol} F} \lambda^n$ lorsque le réel λ tends vers l'infini.

Chapitre 8

Algèbre euclidienne et hermitienne

8.1 Espaces euclidiens et hermitiens

Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction convenable de I dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_I P(t)Q(t)p(t)dt$ sur $\mathbb{R}[X]$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, à savoir la famille des X^i, on obtient des polynômes P_i vérifiant $\langle P_i, P_j\rangle = \delta_i^j$ et $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que P_i est scindé à racines simples sur l'intérieur de I.
Trouver λ et μ, deux suites réelles telles que $P_i = (x + \lambda_i)P_{i-1} - \mu_i P_{i-2}$.
Vérifier que $\mu_i > 0$.
Établir que les racines de P_i sont entrelacées avec celles de P_{i-1}.

Vecteurs dos-à-dos

Montrer qu'un espace euclidien dans lequel on peut trouver n vecteurs v_i qui vérifient $\langle v_i, v_j\rangle < 0$ quels que soient les indices $i \neq j$ est nécessairement de dimennsion n ou plus.

Matrices de Gram et inégalité d'Hadamard

Pour toute famille v de vecteurs d'un espace euclidien, notons G_v la matrice $\langle v_i, v_j\rangle$.
Montrer que le rang de G_v est celui de v et que son déterminant est positif.
Prouver que si v est une famille libre alors $\|x - \pi_{\langle v\rangle}^{\perp} x\|^2 = \det G_{(x,v_1,\dots,v_n)} / \det G_v$.
En déduire que $\det G_v \leq \prod_i \|v_i\|^2$ et identifier le cas d'égalité.

Groupes finis de symétries

Pour tout élément non nul x d'un espace euclidien E, on note σ_x la symétrie orthogonale par rapport à $x^\perp$. Soit x une famille finie de tels points et G le groupe engendré par (σ_{x_i}). Montrer que l'intersection $\bigcap_{g\in G} \ker(g-\mathrm{id}) =$ est triviale si et seulement si $\mathrm{vect}(x_i) = E$. Vérifier que $\{x \in E : \|x\| = 1 \text{ et } \exists g \in G, \exists i, \sigma_x = g^{-1}\sigma_{x_i} g\}$ est stable par G et qu'il est fini si et seulement si G l'est.

Composition d'isométries explicites

Dans $\mathbb{R}^3$, soient s une symétrie orthogonale et r une rotation. Identifier l'isométrie $s \circ r \circ s$.

Fonctions droites

Soit H un espace de Hilbert.
Caractériser les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{I}, H)$ vérifiant $\int \|f\| = \|\int f\|$.

Autour de Householder

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Pour tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$ on définit l'application $\rho_{u,v} : x \mapsto x - \langle v, x\rangle u$.
Quels sont ses espaces propres ? Est-elle diagonalisable ?
Donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité et donner son adjoint.
Montrer que, pour tout u non nul, il existe un unique vecteur $\widehat{u}$ tel que $\rho_{u,\widehat{u}}$ soit orthogonal.

Théorème ergodique de Von Neumann

Soit T une application linéaire sur un espace de Hilbert vérifiant $\|T\| \leq 1$.
Montrer l'équivalence $T(x) = x \Leftrightarrow T^*(x) = x$.
Prouver que l'adhérence de l'image de $(T - \mathrm{id})$ est en somme orthogonale avec son noyau.
En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right)$ converge vers la projection orthogonale de x sur $\ker(T - \mathrm{id})$ parallèlement à $\overline{\mathrm{im}}(T - \mathrm{id})$.

8.2 Formes quadratiques et hermitiennes

Norme matricielle et rayon spectral

Soit M une matrice carrée à coefficients réels. On pose $\|M\|_2 = \sup_{x\neq 0} \|Mx\|_2/\|x\|_2$ et on note ρ l'opérateur « rayon spectral » $M \mapsto \max\{|\lambda| : \ker(M - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}\}$.
Montrer la formule $|||M|||_2^2 = \rho(M^t M)$.

Déterminant des matrices antisymétriques

Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille n. Que dire de la forme bilinéaire définie par $\phi : (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \det\begin{pmatrix} A & X \\ -{}^tY & 0 \end{pmatrix}$?
Qu'en déduire sur le déterminants de A ?

INDICATION. Si n est impair, cette forme bilinéaire symétrique n'est pas nulle et sa matrice est de rang un ; on peut donc écrire $\phi(X, X) = \alpha\langle X, V\rangle^2$ et montrer par récurrence que $\alpha \geq 0$.

8.3 Endomorphismes orthogonaux et unitaires

8.4 Endomorphismes autoadjoints et normaux

Diagonalisation des endomorphismes normaux

Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ est normal, c'est-à-dire qu'il commute avec son adjoint, si et seulement s'il est diagonalisable dans une base orthonormée.
Qu'en est-il des endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^n$?

Annexe A

Exercices et problèmes de révision

***Transcendence de** e*

Supposons qu'il existe un polynôme $A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients entiers de degré n strictement positif dont e soit racine. On peut de surcroît supposer que $a_0 \neq 0$.
Notons $P(X)$ le polynôme $\frac{X^{p-1}}{(p-1)!}(X-1)^p \cdots (X-n)^p$ où p est un nombre premier.

a. Par réccurence sur le degré de P, montrer l'égalité $e^{\alpha} Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$ où l'on a posé $Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(k)}(X)$ et $R(\alpha) = e^{\alpha} \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x) dx$. En déduire alors que $0 = \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) + \sum_{j=0}^{n} a_j R(j)$.

b. Montrer que $\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j)$ est un entier divisible par p mais que, lorsque p est suffisament grand, ce n'est pas le cas de $a_0 P^{(p-1)}(0)$. En déduire que $|\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)| \geq 1$.

c. En majorant P sur $[0; n]$, montrer que $|R(j)| \leq n e^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!}$. En déduire que, lorsque p est grand, on a $|\sum_{j=0}^{n} a_j R(j)| < 1$ puis conclure.

Théorème de Brouwer

Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}^2)$ sans point fixe.

a. Établir l'existence d'une unique application $\rho : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\operatorname{im}(\mathrm{id} + \rho \cdot (\mathrm{id} - f)) \subseteq \mathbb{S}^2$. On pose alors $\alpha = \rho \cdot (\mathrm{id} - f)$ et on définit l'application ψ : $(x, t) \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \begin{vmatrix} 1 + t\partial_{x_1}\alpha_1 & t\partial_{x_2}\alpha_1 \\ t\partial_{x_1}\alpha_2 & 1 + t\partial_{x_2}\alpha_2 \end{vmatrix} = 1 + t\beta(x) + t^2\gamma(x)$.

b. Montrer que $\int_{\mathbb{B}^2} \beta = 0$.

c. Montrer que $\int_{\mathbb{B}^2} \gamma = \int_{\mathbb{B}^2} \partial_{x_1}\alpha_1 \partial_{x_2}\alpha_2 - \int_{\mathbb{B}^2} \partial_{x_2}\alpha_1 \partial_{x_2}\alpha_1$ et montrer la nullité de cette intégrale grâce à deux intégrations par parties pour chaque terme du membre de droite ainsi qu'en utilisant le théorème de Schwarz.

d. En déduire que la fonction $t \in [0; 1] \mapsto \int_{\mathbb{B}^2} \psi(\cdot, t)$ est constante bien que ses valeurs en 0 et en 1 soient distinctes.

REMARQUE. Cette démonstration se généralise en dimension arbitraire.

Étude d'une équation particulière

On considère le problème différentiel $xy'' + 2y' + \frac{x}{y} = 0$.

a. Montrer que le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique sur chaque quadrant et que les graphes sont invariants par symétrie selon Ox, Oy, O ainsi que par homothétie. On se restreint à présent au quadrant $\{x > 0, y > 0\}$ et note ϕ une solution définie sur $]a, b[$.

b. Calculer $(x^2\phi')'$ et en observer le signe. La fonction ϕ admet-elle un minimum ? Montrer qu'elle est monotone sur un intervalle de la forme $[a', b[$.

c. Supposons que $b = \infty$. Que dire des variations de $x^2\phi'$? Aboutir à une contradiction en étudiant son comportement en l'infini.

d. Déterminer la limite de ϕ en b. Observant $x^2\phi'$, établir que $\lim_{x\to b} \phi' = -\infty$.

INDICATION. On trouve $(x^2\phi')' = -\frac{x^2}{\phi}$; comme $x^2\phi'$ est décroissante, ϕ' ne peut changer de signe qu'une fois. Cette décroissance montre aussi que $x\phi'$ tend vers 0 en l'infini. Si $x > y$ on a donc $\phi(x) \le \phi(y) + y\phi'(y)$ ce qui montre que ϕ est bornée. Si $0 < \phi \le M$ alors $-\frac{x^2}{\phi} \le -\frac{x^2}{M}$ d'où $x^2\phi' - y^2\phi' \le \frac{1}{3M}(y^3 - x^3)$.