Langages formels, Calculabilité et Complexité

Année 2007/2008

Formation interuniversitaire en informatique de l'École Normale Supérieure

Olivier Carton

Version du 5 juin 2008

Rédaction

Une toute première version de ce support de cours a été rédigée pendant l'année 2004/2005 par les élèves Gaëtan Bisson, François Garillot, Thierry Martinez et Sam Zoghaib. Ensuite, il a été complètement repris et très largement étoffé par mes soins. Même si la version actuelle est relativement éloignée de la première version, elle lui doit l'impulsion initiale sans laquelle elle n'existerait peut-être pas. Certains passages ont aussi bénéficié de quelques travaux de rédaction des élèves. Malgré tous ces efforts, ce support de cours contient encore de trop nombreuses erreurs et omissions. Une certaine indulgence est demandée au lecteur. Les corrections et suggestions sont bien sûr les bienvenues.

Objectifs

Ce support de cours reflète les deux objectifs de ce cours. Le premier est d'acquérir les principales notions élémentaires en langages formels, calculabilité et complexité. Le second est de ne pas rester uniquement au niveau des définitions et trivialités et de montrer quelques jolis résultats de ces différents domaines. Ce choix fait que des résultats de difficultés très différentes se côtoient. Le premier chapitre sur les langages rationnels contient par exemple le lemme de l'étoile mais aussi la caractérisation de Schützenberger des langages sans étoile.

Plan

La structure de ce document reprend la division du cours en deux grandes parties : les langages formels d'une part, calculabilité et complexité d'autre part. Chacune de ces deux parties est scindée en deux chapitres. Les deux premiers chapitres sont consacrés aux langages rationnels et aux langages algébriques et les deux suivants à la calculabilité et à la complexité.

Téléchargement

Ce support de cours est disponible à l'URL
`http://www.liafa.jussieu.fr/~carton/Enseignement/Complexite/ENS/Support/`.

Table des matières

Première partie

Langages formels

Chapitre 1

Langages rationnels

Les langages rationnels sont le premier niveau de la hiérarchie de Chomsky. Cette famille est constituée des langages acceptés par les automates finis qui sont le modèle le plus simple de machines. Cette famille de langages jouit de propriétés remarquables. Elle est en particulier close par de très nombreuses opérations.

La théorie des automates est une théorie relativement riche et certains de ses résultats sont de véritables perles. Elle entretient aussi des liens avec beaucoup d'autres domaines comme la dynamique symbolique, la combinatoire, l'algèbre, la topologie, la théorie des jeux, l'arithmétique, la logique et l'algorithmique. Certains de ces liens avec l'algèbre et la logique sont abordés dans ce support de cours (cf. sections 1.11 et 3.8.2 par exemple).

Les automates se sont aussi imposés comme un outil incontournable d'un point de vue pratique. Tout éditeur de texte un peu évolué comprend une fonction de recherche à partir d'une expression rationnelle. Cette recherche commence toujours par la construction d'un automate équivalent à l'expression. Les automates sont aussi utilisés dans le domaine de la vérification. Il s'agit dans ce domaine de vérifier qu'un objet tel un composant logiciel ou un protocole est bien conforme à une spécification.

Ce chapitre introduit les notions de mots et de langages. Après quelques éléments de combinatoire des mots, il développe les langages rationnels et les automates finis qui les acceptent. Une dernière partie est consacrée à la reconnaissance par morphismes des langages rationnels et à la caractérisation des langages sans étoile. Pour l'essentiel du chapitre, une bonne référence est [Per90].

1.1 Premières définitions

On commence par quelques définitions élémentaires. La terminologie est empruntée à la linguistique et provient du fait qu'un des objectifs initiaux de ce domaine était la modélisation des langues naturelles.

Définition 1.1.
- Un *alphabet* est un ensemble fini (souvent noté A ou Σ) dont les éléments sont appelés *lettres* ou *symboles*.
- Un *mot* w sur l'alphabet A est une suite finie $w_1 w_2 \cdots w_n$ de lettres de A. L'entier n est appelé la *longueur* de w qui est notée $|w|$.
- Le *mot vide* noté ε ou parfois 1 correspond à l'unique mot de longueur 0.

- Un *langage* sur l'alphabet A est un ensemble de mots sur A.
- L'*ensemble de tous les mots* sur l'alphabet A est noté A^* et il est appelé le *monoïde libre* sur A.

Un mot est écrit en juxtaposant ses éléments sans séparateur. Par exemple, le mot w de longueur 3 dont les éléments sont a, b et a est simplement écrit aba. Un mot de longueur 1 est écrit comme son unique lettre. Cette confusion entre une lettre a et le mot de longueur 1 dont l'unique élément est a est sans conséquence et même souvent très pratique.

La *concaténation* des deux mots $u = u_1 \cdots u_m$ et $v = v_1 \cdots v_n$ est le mot noté $u \cdot v$ ou uv et égal à $u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n$ obtenu par simple juxtaposition. C'est une opération associative dont le mot vide ε est l'élément neutre. C'est pour cette raison que le mot vide est parfois noté 1.

Exemple 1.2. Si $u = abaa$ et $v = bab$, on a $uv = abaabab$ et $vu = bababaa$. La concaténation n'est pas commutative.

Comme la concaténation est une loi de composition interne associative avec un élément neutre, elle munit l'ensemble A^* de tous les mots d'une structure de monoïde. Pour cette raison, la concaténation est aussi appelée *produit*. Ce monoïde est dit libre parce que les seules équations qu'il satisfait sont celles qui sont conséquences de la définition de monoïde. Ce fait est énoncé de manière rigoureuse à la proposition 1.116 (p. 54). La notion de *structure libre* peut être définie de manière très générale dans le cadre de l'algèbre universelle [Alm94].

Exercice 1.3. Soit l'alphabet $A = \{0, 1\}$ et soit la suite de mots $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par $f_0 = 1$, $f_1 = 0$ et $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$ pour $n \geq 0$.

- Montrer que si $n \geq 2$, alors f_n se termine par 01 si n est pair et par 10 sinon.
- Montrer que le mot g_n obtenu en supprimant les deux dernières lettres de f_n, c'est-à-dire $f_n = g_n01$ si n pair et $f_n = g_n10$ sinon est un palindrome. On rappelle qu'un *palindrome* est un mot qui reste identique lorsqu'il est retourné.

Solution. La première propriété se montre facilement par récurrence sur n. On vérifie en effet que $f_2 = 01$ se termine par 01 et que $f_3 = 010$ se termine par 10. La relation $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$ montre ensuite que f_{n+2} se termine comme f_n.

Pour la seconde propriété, on remarque que $g_2 = \varepsilon$, $g_3 = 0$ $g_4 = 010$ sont bien des palindromes et on montre le résultat par récurrence sur n. On suppose le résultat acquis pour f_n et f_{n+1} et on montre le résultat pour f_{n+3}. On suppose d'abord que n est pair. Les mots f_n et f_{n+1} s'écrivent alors $f_n = g_n01$ et $f_{n+1} = g_{n+1}10$ où g_n et g_{n+1} sont des palindromes. Les mots f_{n+2} et f_{n+3} sont alors égaux à $f_{n+1}f_n = g_{n+1}10g_n01$ et $g_{n+1}10g_n01g_{n+1}10$ d'où on tire $g_{n+3} = g_{n+1}10g_n01g_{n+1}$ qui est un palindrome. Le cas n impair se montre de la même façon.

Un mot u est un *préfixe* (resp. *suffixe*) d'un mot w s'il existe un mot v tel que $w = uv$ (resp. $w = vu$). Un mot u est un *facteur* d'un mot w s'il existe deux mots v et v' tels que $w = vuv'$.

Exercice 1.4. Soit $w = w_1 \cdots w_n$ un mot de longueur n. Par un léger abus, on utilise la notation w_i même si l'entier i n'est pas dans l'intervalle $[1; n]$. On note ainsi la lettre $w_{i'}$ où i' est l'unique entier tel que $1 \leq i' \leq n$ et $i' \equiv i \mod n$. On appelle *occurrence circulaire* d'un mot $u = u_1 \cdots u_p$ un entier k dans l'intervalle $[1; n]$ tel que $w_{k+i-1} = u_i$ pour chaque $1 \leq i \leq p$.

Montrer que pour tout alphabet A et tout entier k, il existe un mot w_k tel que tous les mots de longueur k sur A ont exactement une occurrence circulaire dans w_k. Un tel mot est appelé un mot de *de Bruijn* d'ordre k. Les mots 1100 et 11101000 sont des mots de de Bruijn d'ordre 2 et 3 sur l'alphabet $\{0,1\}$.

On pourra considérer l'automate dont l'ensemble des états est A^{k-1} et dont l'ensemble des transitions est $\{au \xrightarrow{a} ub \mid a,b \in A \text{ et } u \in A^{k-2}\}$. Montrer qu'il y a bijection entre les cycles eulériens de cet automate et les mots de de Bruijn d'ordre k.

Soit A et B deux alphabets. Un morphisme de monoïdes μ de A^* dans B^* est une application de A^* dans B^* qui est compatible avec la structure de monoïde. Ceci signifie que l'image du mot vide est le mot vide ($\mu(\varepsilon) = \varepsilon$) et que $\mu(uv) = \mu(u)\mu(v)$ pour tout mot u et v de A^*. L'image d'un mot $w = w_1 \cdots w_n$ est donc égal à $\mu(w) = \mu(w_1) \cdots \mu(w_n)$. Le morphisme est complètement déterminé par les images des lettres. Un morphisme μ est dit *effaçant* s'il existe une lettre a tel que $\mu(a) = \varepsilon$.

Exemple 1.5. Soit A l'alphabet $\{a,b\}$ et soit $\mu : A^* \to A^*$ le morphisme de monoïde déterminé par $\mu(a) = ab$ et $\mu(b) = a$. Ce morphisme est non-effaçant. L'image du mot aba par μ est le mot $abaab = ab \cdot a \cdot ab$.

1.2 Opérations rationnelles

On définit maintenant les opérations rationnelles qui permettent de construire de nouveaux langages.

Définition 1.6 (Union, Produit)**.**
- L'*union* est l'opération qui à deux langages L et L' associe le langage $L + L' = L \cup L'$.
- Le *produit* est l'opération qui à deux langages L et L' associe le langage $L \cdot L' = LL' = \{uv \mid u \in L \text{ et } v \in L'\}$.

Exemple 1.7. Soient les deux langages $L = \{u \in A^* \mid |u| \text{ pair }\}$ et $L' = \{u \in A^* \mid |u| \text{ impair }\}$. On a alors les égalités suivantes.
- $L + L' = A^*$
- $LL' = L' = L'L$
- $L'L' = L \setminus \{\varepsilon\}$
- $LL = L$ (L est un sous-monoïde de A^*)

Définition 1.8 (Étoile)**.** Soit $L \subseteq A^*$, on définit :

$$L^0 = \{\varepsilon\}, \qquad L^{i+1} = LL^i, \qquad L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

Cette définition justifie donc *a posteriori* la notation A^* puisque l'ensemble de tous les mots est bien l'étoile de l'alphabet. Il faut remarquer qu'en général L^i est différent de $\{u^i \mid u \in L \text{ et } i \geq 0\}$.

Un *sous-monoïde* de A^* est un langage de A^* qui contient le mot vide et qui est clos pour la concaténation. On vérifie que pour tout langage L, le langage L^* est le plus petit sous-monoïde de A^* qui contient L. Inversement tout sous-monoïde K de A^* est de la forme L^* puisque $K = K^*$.

Exemple 1.9.
- Si $L = \{a, ba\}$, alors L^* est constitué de tous les mots dans lesquels chaque b est suivi d'un a.
- Si $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$, alors L^* est constitué du mot vide ε et de tous les mots qui se terminent par un b.

– Si $L = \varnothing$, alors L^* est le langage $\{\varepsilon\}$ uniquement constitué du mot vide.

Pour un langage L, on note L^+ le langage $LL^* = L^*L = \bigcup_{i\geq 1} L^i$. Si L contient le mot vide, on a $L^+ = L^*$ et sinon on a $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$. Le langage A^+ est par exemple l'ensemble des mots non vides.

1.3 Combinatoire des mots

La combinatoire des mots est l'étude des propriétés structurelles des mots. Dans cette partie, on s'intéresse d'abord à des questions de périodicité puis à des questions de motifs inévitables.

1.3.1 Périodicités

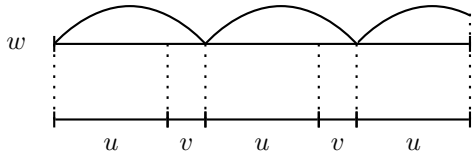


FIG. 1.1 – Période d'un mot w

Soit $w = w_1 \cdots w_n$ un mot sur un alphabet A. Une *période* de w est un entier p entre 1 et $|w|$ tel que $w_i = w_{i+p}$ pour tout $1 \leq i \leq |w| - p$. Par convention, la longueur de w est une période de w. On note $P(w)$ l'ensemble des périodes de w. Il faut remarquer qu'une période ne divise pas nécessairement la longueur du mot. Si p est une période de w, le mot w se factorise $w = (uv)^k u$ où l'entier k vérifie $k \geq 1$, l'entier p est égal à $|uv|$ et le mot v est non vide (cf. figure 1.1).

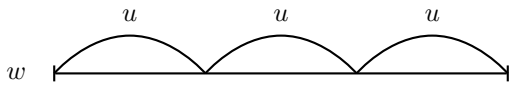


FIG. 1.2 – Mot non primitif $w = u^3$

Un mot w est *primitif* s'il ne s'écrit pas $w = u^k$ avec $k \geq 2$. Autrement dit, un mot est primitif si sa longueur est l'unique période qui divise sa longueur (cf. figure 1.2). Tout mot w s'écrit de manière unique $w = u^k$ où l'entier k vérifie $k \geq 1$ et le mot u est primitif. L'entier k est égal à 1 quand w est primitif.

Exemple 1.10. Le mot $w = 010101$ a $P(w) = \{2, 4, 6\}$ pour ensemble de périodes. Il n'est pas primitif car il s'écrit $w = (01)^3$. Le mot $w' = 01001010010$ a $P(w') = \{5, 8, 10, 11\}$ pour ensemble de périodes. Il est primitif car aucune de ses périodes autre que sa longueur ne divise sa longueur.

Le plus grand commun diviseur de deux entiers p et q est noté $p \wedge q$. Le théorème de Fine et Wilf est le résultat de base de la combinatoire des mots. Les preuves de beaucoup d'autres résultats font appel à ce théorème.

Théorème 1.11 (Fine-Wilf 1965)**.** *Si p et q sont deux périodes d'un mot w de longueur supérieure ou égale à $p + q - p \wedge q$, alors $p \wedge q$ est aussi une période de w.*

Avant de donner la preuve du théorème, on montre que la borne du théorème est optimale. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de mots définie par récurrence par $f_0 = 1$, $f_1 = 0$ et $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$. Les premiers mots de cette suite sont $f_2 = 01$, $f_3 = 010$, $f_4 = 01001$ et $f_5 = 01001010$. Les mots de cette suite sont appelés *mots de Fibonacci*. En effet, la longueur de chaque mot f_n est le nombre de Fibonacci F_n où la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq 0$.

Les mots de Fibonacci possèdent beaucoup de propriétés remarquables. Ils constituent en particulier des cas extrémaux pour le théorème de Fine et Wilf. Soit, pour $n \geq 2$, le mot g_n obtenu en supprimant de f_n ses deux dernières lettres qui sont 01 si n est pair et 10 sinon. Les premiers mots de cette suite sont donc $g_2 = \varepsilon$, $g_3 = 0$, $g_4 = 010$ et $g_5 = 010010$. On va montrer que le mot g_n admet F_{n-1} et F_{n-2} pour périodes mais pas $F_{n-1} \wedge F_{n-2} = 1$ alors que sa longueur $|g_n|$ est égale à $F_n - 2 = F_{n-1} + F_{n-2} - (F_{n-1} \wedge F_{n-2}) - 1$. On vérifie facilement que deux nombres de Fibonacci consécutifs F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux : $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

On montre par récurrence que $g_{n+2} = f_{n+1}g_n = f_ng_{n+1}$ pour tout $n \geq 2$. Les premières valeurs $g_2 = \varepsilon$, $g_3 = 0$ et $g_4 = 010$ permettent de vérifier ces égalités pour $n = 2$. La formule $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$ et la définition de g_n donnent immédiatement l'égalité $g_{n+2} = f_{n+1}g_n$. On a ensuite $g_{n+2} = f_nf_{n-1}g_n = f_ng_{n+1}$ par hypothèse de récurrence. Les relations $g_{n+2} = f_nf_{n-1}g_n = f_nf_ng_{n-1}$ montrent que g_{n+2} admet $F_n = |f_n|$ et $F_{n+1} = |f_nf_{n-1}|$ pour périodes. Par contre, g_n n'admet pas $F_n \wedge F_{n+2} = 1$ pour période si $n \geq 4$ car il commence par le préfixe 01.

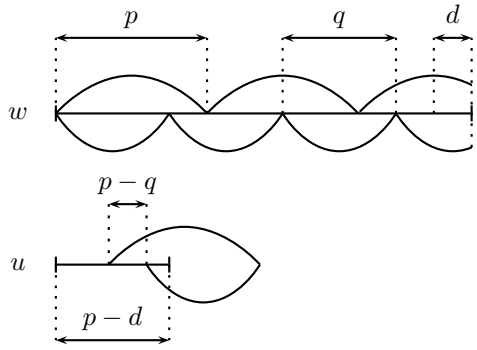


FIG. 1.3 – Preuve du théorème de Fine et Wilf

Une preuve un peu différente est donnée en [Lot83, p. 9].

Preuve. Soit $d = p \wedge q$ le plus grand commun diviseur de p et q. On fixe d et on prouve le résultat par récurrence sur la valeur de $p+q$. Si $p+q \leq d$, c'est-à-dire $p = d$ et $q = 0$ ou $p = 0$ et $q = d$, le résultat est trivial et on suppose qu'il est vrai pour les entiers inférieurs à $p + q$. Soit w un mot tel que $|w| \geq p + q - d$ et ayant p et q comme périodes. Par symétrie, on peut supposer que $p \geq q$. Le mot w est alors factorisé $w = uv$ où u est de longueur $p-d$ (cf. figure 1.3). Pour

tout $1 \leq i \leq q-d$, on a $u_i = w_i = w_{i+p} = w_{i+p-q} = u_{i+p-q}$ et u a donc $p-q$ comme période. Comme u a aussi q comme période, l'hypothèse de récurrence implique que u a $d = (p-q) \wedge q$ comme période. Comme $|u| \geq q$, le préfixe de w de longueur q a aussi d comme période. Comme w a q comme période et que d divise q, alors w a aussi d comme période. □

On va utiliser le théorème de Fine et Wilf pour prouver le théorème de Guibas et Odlyzko qui est un résultat assez surprenant. Il montre en effet que tout mot a les mêmes périodes qu'un mot sur un alphabet binaire. Ce théorème est contraire à l'intuition que plus de lettres dans l'alphabet donne plus de liberté pour choisir les périodes. Il est la première étape dans la caractérisation des ensembles d'entiers qui peuvent apparaître comme l'ensemble des périodes d'un mot.

Théorème 1.12 (Guibas-Odlyzko 1981)**.** *Pour tout mot w, il existe un mot w' sur un alphabet binaire tel que $P(w) = P(w')$.*

Puisque l'ensemble des périodes d'un mot comprend sa longueur, le mot w' fourni par le théorème précédent est toujours de même longueur que le mot w.

La preuve du théorème est décomposée en plusieurs lemmes. Le premier est un corollaire immédiat du théorème de Fine et Wilf. Il donne une première idée de la structure de l'ensemble des périodes d'un mot. Il dit essentiellement que seules les grandes périodes sont irrégulières puisque les autres sont les multiples de la plus petite période. La plus petite période d'un mot w est toujours définie puisque l'ensemble $P(w)$ des périodes contient au moins la longueur de w.

Lemme 1.13. *Soit w un mot et p sa plus petite période. Si q est une période de w telle que $q \leq |w| - p$, alors q est un multiple de p.*

Preuve. Puisque $p + q \leq |w|$, l'entier $p \wedge q$ est aussi une période de w par le théorème de Fine et Wilf (théorème 1.11). Par définition de p, on a $d = p$ et p divise q. □

Le second lemme permet de prolonger n'importe quel mot en un mot primitif. Sa preuve utilise encore le théorème de Fine et Wilf.

Lemme 1.14. *Pour tout mot w sur $\{0,1\}$, $w0$ ou $w1$ est primitif.*

Preuve. Si $w = \varepsilon$, alors $w0$ et $w1$ sont primitifs. Supposons par l'absurde que w est non vide et que les mots $w0$ et $w1$ s'écrivent $w0 = u^k$ et $w1 = v^l$ pour des entier $k, l \geq 2$ et des mots primitifs u et v. Les longueurs $|u|$ et $|v|$ sont des périodes de w et comme $|w| = k|u|-1 = l|v|-1 \geq 2\max(|u|,|v|)-1 \geq |u|+|v|-1$, l'entier $d = |u| \wedge |v|$ est aussi une période de w par le théorème de Fine et Wilf (théorème 1.11). Comme d divise $|u|$ et $|v|$ et que les mots u et v sont primitifs, on a $|u| = d = |v|$. Comme u et v sont deux préfixes de w, on doit avoir $u = v$ et ceci contredit le fait que les mots u et v se terminent respectivement avec les lettres 0 et 1. □

On a vu que si p est une période du mot w, celui-ci se factorise $w = (uv)^k u$ où $|uv| = p$ et v est non vide. On applique ce résultat à la plus petite période du mot w. Dans les trois lemmes qui suivent, le mot w est factorisé de la manière suivante.

$$w = (uv)^k u \quad \text{où } p = |uv| = \min P(w), v \neq \varepsilon \text{ et } k \geq 1. \tag{1.1}$$

La preuve du théorème de Guibas et Odlyzko se fait par récurrence sur la longueur du mot w. Elle utilise la factorisation ci-dessus pour se ramener au mot uv qui est plus petit sauf si $|w|$ est l'unique période de w (ce dernier cas est trivial). Les deux premiers lemmes traitent le cas $k \geq 2$ alors que le dernier traite le cas $k = 1$.

Lemme 1.15. *Soit w décomposé comme en (1.1) avec $k \geq 2$ et soit q tel que $|w| - p < q < |w|$. Soit $q = (k-1)p + r$ où $|u| < r < |u| + p$. Alors q est une période de w si et seulement si r est une période de uvu.*

Preuve. Pour tout $0 < i < |w| - q = p + |u| - r$, on a $w_i = (uvu)_i$ et $w_{i+q} = (uvu)_{i+r}$. On a donc $w_i = w_{i+q}$ si et seulement si $(uvu)_i = (uvu)_{i+r}$ ce qui signifie exactement que $q \in P(w)$ si et seulement si $r \in P(uvu)$. □

Lemme 1.16. *Soit w décomposé comme en (1.1) avec $k \geq 1$. Si $|uv| = |u'v'|$ et $P(u'v'u') = P(uvu)$, alors $P(w) = P(w')$ où $w' = (u'v')^k u'$.*

Preuve. Le cas $k = 1$ est trivial et on suppose dorénavant que $k \geq 2$. L'égalité $P(u'v'u') = P(uvu)$ implique $|uvu| = |u'v'u'|$ et donc $|w| = |w'|$. On remarque ensuite que $p = |uv|$ est une période de w'. On fixe un entier $1 \leq q \leq |w|$ et on montre que $q \in P(w)$ si et seulement si $q \in P(w')$. On considère deux cas suivant que q vérifie $q \leq |w| - p$ ou $q > |w| - p$.

On suppose d'abord que $q \leq |w| - p$. Si $q \in P(w')$, on a $|w'| = |w| \geq p + q$. D'après le théorème de Fine et Wilf (théorème 1.11), l'entier $d = p \wedge q$ est aussi une période de w'. Comme $d \leq p = |u'v'|$, d est aussi une période de $u'v'u'$ et donc de uvu. Comme d divise p, d est finalement une période de w. La minimalité de p implique $d = p$. Comme p divise q, q est une période de w. Si à l'inverse $q \in P(w)$, d'après le lemme 1.13, p divise q et q est une période de w'.

On suppose maintenant que $|w| - p < q < |w|$ et on pose $r = q - (k-1)p$ qui vérifie $|u| < r < p + |u|$. D'après le lemme précédent, $q \in P(w)$ si et seulement si $r \in P(uvu) = P(u'v'u')$ qui est, encore d'après le lemme précédent, équivalent à $q \in P(w')$. □

Lemme 1.17. *Soit $w = uvu$ comme en (1.1) avec $k = 1$. Soit $u' \in 0\{0,1\}^*$ tel que $P(u') = P(u)$. Si $b \in \{0,1\}$ est tel que $u'1^{|v|-1}b$ soit primitif alors on a $P(w) = P(w')$ où $w' = u'1^{|v|-1}bu'$.*

Preuve. Soit q une période de w qui vérifie donc $q \geq p = |u'1^{|v|-1}b|$. Elle est donc aussi période de w' puisque $P(u) = P(u')$. Ceci montre l'inclusion $P(w) \subseteq P(w')$. Supposons par l'absurde que cette inclusion soit stricte et soit q le plus petit entier de $P(w') \setminus P(w)$. Comme u' commence par un 0, q vérifie $q < |u'|$ ou $p - 1 \leq q < |w|$.

Si q vérifie $q < u'$, il est, par définition, la plus petite période de w'. Le lemme 1.13 implique que q divise p et que le mot $u'1^{|v|-1}b$ n'est pas primitif, ce qui est une contradiction.

Si q est égal à $p - 1$, on a alors $b = 0$ et l'égalité $u'1 = 0u'$ est à nouveau impossible. On a donc $p < q < |w|$ et on pose $r = q - p$. L'entier r est une période de u' et donc de u. Ceci implique que q est une période de w qui est en contradiction avec la définition de q. □

On est maintenant en mesure de prouver le théorème de Guibas et Odlyzko en combinant les différents lemmes.

Preuve du théorème 1.12. On raisonne par récurrence sur la longueur de w. Le résultat est trivial si $|w| \leq 2$. On suppose le résultat vrai pour tout mot de longueur inférieure à n et soit w un mot de longueur n qui s'écrit comme en 1.1.

Si $k \geq 2$, on a $|uvu| < n$ et par hypothèse de récurrence, il existe u' et v' tels que $|uv| = |u'v'|$ et $P(uvu) = P(u'v'u')$. Le lemme 1.16 permet alors de conclure.

Si $k = 1$, on a $|u| < n$ puisque v n'est pas le mot vide. Par hypothèse de récurrence, il existe u' tel que $P(u) = P(u')$. Si $u = \varepsilon$, on a alors $P(w) = \{|w|\}$ et $w' = 01^{|w|-1}$ vérifie $P(w) = P(w')$. Sinon, on peut supposer par symétrie que u' commence par 0. D'après le lemme 1.14, il existe $b \in \{0, 1\}$ tel que $u'1^{|v|-1}b$ est primitif. Le lemme 1.17 permet alors de conclure. □

La preuve du théorème est effective. Il est même possible d'en déduire un algorithme qui calcule en temps linéaire en la longueur de w le mot w' tel que $P(w) = P(w')$.

Exercice 1.18. Soient six mots x, y, z, x', y' et z' tels que $xyz \neq x'y'z'$. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que pour tout entier $k \geq k_0$, on a $xy^kz \neq x'y'^kz'$.

1.3.2 Mots infinis

On introduit ici les mots infinis parce qu'ils sont très utiles pour l'étude des motifs inévitables.

Un *mot infini* x sur un alphabet A est une suite infinie $x = x_0x_1x_2\cdots$ de lettres de A. L'ensemble des mots infinis sur A est noté A^ω. Un mot $x = x_0x_1x_2\cdots$ est *périodique* s'il existe un entier p appelé *période* tel que $x_n = x_{n+p}$ pour tout $n \geq 0$. Il est *ultimement périodique* s'il existe deux entiers l et p tels que $x_n = x_{n+p}$ pour tout $n \geq l$. Pour un mot fini u de longueur p, le mot infini de période p et dont les p premières lettres coïncident avec celles de u est noté u^ω. Le lemme 3.77 (p. 160) fournit une caractérisation en terme de facteurs des mots ultimement périodiques.

On décrit maintenant une façon très classique de construire des mots infinis. Un morphisme μ de A^* dans B^* est naturellement étendu aux mots infinis en posant $\mu(x) = \mu(x_0)\mu(x_1)\mu(x_2)\cdots$ pour tout mot infini $x = x_0x_1x_2\cdots$ sur A. Quelques précautions sont nécessaires si le morphisme μ est effaçant car $\mu(x)$ n'est pas nécessairement infini.

Soit μ un morphisme de A^* dans A^* tel que $\mu(a)$ commence par la lettre a, c'est-à-dire $\mu(a) = au$ pour $u \in A^*$. On définit par récurrence la suite de mots finis $(w_n)_{n\geq 0}$ par $w_0 = a$ et $w_{n+1} = \mu(w_n)$. On montre par récurrence que chaque mot w_n est préfixe du mot w_{n+1}. Si de plus $\lim_{+\infty} |w_n| = +\infty$, la suite de mots w_n converge vers un mot infini noté $\mu^\omega(a)$. Ce mot est appelé *point fixe* du morphisme μ car il vérifie $\mu(\mu^\omega(a)) = \mu^\omega(a)$.

Exemple 1.19. Soit A l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ et $\psi : A^* \to A^*$ le morphisme défini de la manière suivante.

$$\psi : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 221 \\ 2 \mapsto 2 \end{cases}$$

On vérifie sans peine que le point fixe $\psi^\omega(0)$ est le mot $a_0a_1a_2\cdots$ où $a_0 = 0$, $a_i = 1$ si i est un carré non nul et $a_i = 2$ sinon.

L'exemple précédent montre que le mot caractéristique des carrés (qui a 1 aux positions qui sont des carrés et 0 ailleurs) est un mot de la forme $\mu(\psi^\omega(0))$ pour des morphismes μ et ψ. Cette propriété reste encore vraie pour l'ensemble $\{P(n) \mid n \geq 0\}$ des valeurs prises par un polynôme P tel que $P(n)$ est entier pour tout $n \geq 0$.

Exemple 1.20. Soit le morphisme μ défini de la manière suivante.

$$\mu : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

La suite de mots $f_n = \mu^n(0)$ vérifie la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$ et les valeurs initiales sont $f_0 = 0$ et $f_1 = 01$. Il s'agit donc de la suite des mots de Fibonacci déjà rencontrée au théorème de Fine et Wilf (théorème 1.11). Par extension, le mot $f = \mu^\omega(a)$ est encore appelé *mot de Fibonacci*. Le début de ce mot est le suivant.

$$f = 01001010010010100101001001010010010100101001010010100101001010\cdots$$

1.3.3 Motifs inévitables

Le but de cette partie est d'étudier les mots qui évitent, c'est-à-dire ne contiennent pas comme facteurs certains mots. On suppose fixé un ensemble F de mots et on s'intéresse aux mots de $A^* \setminus A^*FA^*$. Plus particulièrement, la question principale est de déterminer si cet ensemble est fini ou non. Le lemme suivant reformule cette question en terme de mots infinis.

Lemme 1.21. *Soit F un sous-ensemble de mots sur un alphabet fini A. L'ensemble $A^* \setminus A^*FA^*$ est infini si et seulement si il existe un mot infini n'ayant aucun facteur dans F.*

Preuve. Il est clair que si le mot infini x n'a aucun facteur dans F, alors chacun de ses préfixes a la même propriété et l'ensemble en question est infini. La réciproque est une conséquence directe du lemme de König (lemme 3.20 p. 129). □

Un *carré* est un mot de la forme uu pour un mot u. L'ensemble F est ici l'ensemble des carrés non vides. Un mot est dit *sans carré* s'il ne contient pas de facteur, autre que le mot vide, qui ne soit un carré. Nous allons voir que sur un alphabet à trois lettres, il existe des mots sans carré arbitrairement longs.

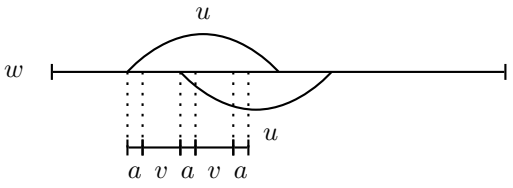


FIG. 1.4 – Chevauchement de deux occurrences d'un facteur u

Sur l'alphabet à deux lettres $\{0, 1\}$, les seuls mots sans carré sont les mots 010 et 101 et leurs facteurs. Pour un alphabet à trois lettres, on commence par étudier les chevauchements. Un *chevauchement* est un mot de la forme

$uvuvu$ où u est un mot non vide et v un mot quelconque. Un mot est dit *sans chevauchement* s'il ne contient pas de facteur qui ne soit un chevauchement. La terminologie est justifiée par la remarque suivante. Un mot w contient un chevauchement si et seulement si un de ses facteurs a deux occurrences qui se chevauchent (cf. figure 1.4). Si w a un chevauchement $uvuvu$, le mot uvu a deux occurrences qui se chevauchement dans w. Réciproquement, soit w un mot ayant deux occurrences d'un facteur u qui se chevauchent. Soit a la première lettre de u et soit v le reste de u jusqu'au début de l'occurrence suivante (cf. figure 1.4). Le mot $avava$ est un chevauchement de w. Ceci montre en particulier qu'un mot ayant un chevauchement a toujours un chevauchement de la forme $avava$ où a est une lettre.

On commence par montrer qu'il existe des mots arbitrairement longs sans chevauchement sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$. Soit le morphisme de Thue-Morse τ de A^* dans A^* défini de la manière suivante.

$$\tau : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 10 \end{cases}$$

Le mot infini $\tau^\omega(0)$ et appelé *mot de Thue-Morse*. On prouve sans difficulté que la n-ième lettre du mot de Thue-Morse est 0 si le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n est pair et 1 sinon. Le début du mot de Thue-Morse est le suivant.

$$0110100110010110100101100110100 1 \cdots$$

Proposition 1.22. *Le mot de Thue-Morse est sans chevauchement.*

Soit X l'ensemble $(01 + 10)^*$. Par définition même du morphisme τ, tout mot $\tau^n(0)$ appartient à X pour $n \geq 1$. On commence par établir une propriété élémentaire de l'ensemble X.

Lemme 1.23. *Si x appartient à X, alors $0x0$ et $1x1$ n'appartiennent pas à X.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur la longueur de x. Si x est le mot vide, ni 00 ni 11 n'appartient à X. Soit $x = x_1 \cdots x_n$ un mot de X de longueur $n \geq 1$. Si $0x0$ appartient à X, on a $x_1 = x_n = 1$ et le mot $x_2 \cdots x_{n-1}$ appartient à X. Ceci aboutit à une contradiction. Le raisonnement pour $1x1$ est similaire. □

Preuve de la proposition. Il suffit de montrer que les mots $\tau^n(0)$ sont sans chevauchement. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le mot $\tau(0) = 01$ ne contient pas de chevauchement. Supposons par l'absurde que le mot $w = \tau^{n+1}(0)$ contienne un chevauchement. Comme cela a été vu, on peut supposer que ce chevauchement est de la forme $avava$ où $a \in \{0, 1\}$ et $v \in \{0, 1\}^*$. Le mot w se factorise donc $w = xavavay$. On peut supposer que x est de longueur paire. L'autre cas s'obtient en passant au mot miroir puisque x et y ont des longueurs de parités différentes. Si v est de longueur paire, la seconde occurrence de v commence à une position paire. On en déduit que v et ava sont des mots de X^* et ceci est une contradiction d'après le lemme précédent. Si v est de longueur impaire, il se factorise $v = \bar{a}v'$. Comme le premier et le dernier a de $avava$ sont à des positions de même parité, la première lettre de y est aussi $\bar{a}$ et y se factorise $y = \bar{a}y'$. Le mot w se factorise finalement $w = xa\bar{a}v'a\bar{a}v'a\bar{a}y'$. Comme x est de longueur paire, le mot $a\bar{a}v'a\bar{a}v'a\bar{a}$ est l'image d'un facteur $auaua$ de $\tau^n(0)$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de récurrence. □

On considère le morphisme σ de $\{0,1,2\}$ dans $\{0,1\}$ défini de la manière suivante.

$$\sigma : \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01 \\ 2 \mapsto 011 \end{cases}$$

Chaque mot $\tau^n(0)$ ne contient pas de facteur 111 et commence par 0. Il appartient donc à l'ensemble $(0{+}01{+}011)^*$. On en déduit que pour tout entier n, il existe un mot w_n sur l'alphabet $\{0,1,2\}$ tel que $\sigma(w_n) = \tau^n(0)$. Le mot w_n est en outre unique. Chaque mot w_n est préfixe du mot w_{n+1}. La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers un mot infini que l'on note $\sigma^{-1}(\tau^\omega(0))$. Le début de ce mot est le suivant.

$$2102012101202102012021012102012 0 \cdots$$

Théorème 1.24 (Thue 1906)**.** *Le mot $\sigma^{-1}(\tau^\omega(0))$ est sans carré.*

Preuve. Il suffit de prouver que chacun des mots w_n est sans carré. Supposons par l'absurde que w_n contienne un carré uu. On peut supposer que uu a une occurrence qui n'est pas à la fin de w_n. Sinon, on remplace w_n par w_{n+1}. Comme uua est un facteur de w_n, $\sigma(u)\sigma(u)\sigma(a)$ est un facteur de $\tau^n(0)$. Les mots $\sigma(u)$ et $\sigma(a)$ commencent par 0. Le mot $\tau^n(0)$ a alors un chevauchement $avava$ contrairement au résultat de la proposition précédente. □

Le mot infini $\sigma^{-1}(\tau^\omega(0))$ peut être directement obtenu en itérant un morphisme. Soit le morphisme μ défini de la manière suivante.

$$\mu : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 20 \\ 2 \mapsto 210 \end{cases}$$

La suite de mots $(\mu^n(2))_{n\geq 0}$ converge vers le mot $\sigma^{-1}(\tau^\omega(0))$. En effet, on vérifie l'égalité $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \mu$. En utilisant en outre l'égalité $\sigma(2)0 = \tau^2(0)$, on montre par récurrence que $\sigma(\mu^n(2))\tau^n(0) = \tau^{n+2}(0)$.

Soit le morphisme ν défini de la manière suivante.

$$\nu : \begin{cases} 0 \mapsto 010 \\ 1 \mapsto 011 \end{cases}$$

Soit $\nu^\omega(0)$ le point fixe de ce morphisme. Ce mot infini est sans cube. En observant les façons dont les mots de longueur 2 se découpent sur $\{010, 011\}$, on prouve facilement que si $\nu^\omega(0)$ contenait un cube, il contiendrait un cube de longueur strictement plus petite.

Les carrés et les chevauchements sont des cas particuliers des répétitions qui sont des puissances non entières de mots. Soit u un mot de longueur p et soit r un nombre rationnel de la forme $r = q/p$. On note u^r, l'unique mot fini de longueur q qui est préfixe du mot u^ω. Ainsi un carré est mot de la forme u^r avec $r = 2$ alors qu'un chevauchement est un mot de la forme u^r avec $r > 2$.

Plus généralement, un *motif* est un mot p sur un alphabet X de variables. Un mot sur un alphabet A *contient* le motif p, s'il possède un facteur de la forme $\mu(p)$ pour un morphisme $\mu : X^* \to A^*$ non effaçant. Dans le cas contraire, on dit qu'il *évite* le motif p. Les carrés correspondent au motif xx et les chevauchements $uvuvu$ correspondent au motif $xyxyx$ si v est non vide et au motif xxx si v est

vide. Un motif p est dit *k-inévitable* si l'ensemble des mots sur un alphabet à k lettres qui évitent p est fini. Il est dit *inévitable* s'il est inévitable pour tout entier k. La référence sur les motifs inévitables est [Cas02]. Le lemme suivant permet de construire des motifs inévitables.

Lemme 1.25. *Si p est un motif inévitable et si la lettre x n'apparaît pas dans p, alors le motif pxp est encore inévitable.*

Preuve. Soit A un alphabet. L'ensemble des mots sur A qui évitent p est fini. Il existe un entier l tel que tout mot de longueur l contient le motif p. Soit $n = |A|^l$ le nombre de mots sur A de longueur l. Un mot w de longueur $nl + l + n$ se factorise $w = u_0a_1u_1a_2 \cdots a_nu_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des lettres et $u_0, \ldots, u_n$ sont des mots de longueur l. Par définition de n, deux mots u_i et u_j pour $i < j$ sont égaux. Le mot w se factorise donc $v_0u_iv_1u_iv_2$. Comme u_i est de longueur l, il se factorise $u_i = v_3\mu(p)v_4$ où μ est une morphisme de $(X \setminus \{x\})^*$ dans A^*. En prolongeant μ à X^* par $\mu(x) = v_4v_1v_3$, le mot w contient le facteur $\mu(pxp)$. □

Soit X l'alphabet infini $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. On définit la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ des mots de Zimin par $z_0 = \varepsilon$ et $z_{n+1} = z_nx_nz_n$ pour tout $n \geq 0$. Grâce au lemme précédent, chacun des mots z_n est un motif inévitable. La suite des mots de Zimin converge vers un mot infini z. Pour tout $n \geq 0$, la n-ième lettre de z est x_k si 2^k est la plus grande puissance de 2 qui divise n. Le début du mot z est le suivant.

$$z = x_0x_1x_0x_2x_0x_1x_0x_3x_0x_1x_0x_2x_0x_1x_0x_4x_0x_1x_0x_2x_0x_1x_0x_3 \cdots$$

Il existe un algorithme dû à Zimin qui calcule si un motif donné est inévitable ou non. Cet algorithme est détaillé en [Cas02]. Par contre, aucun algorithme n'est connu pour déterminer si un mot est k-inévitable pour un entier k donné.

1.3.4 Codes

Pour cette partie, on pourra consulter [BP84]. De manière intuitive, un ensemble X de mots est un code si tout mot a au plus une décomposition en produit de mots de X.

Définition 1.26. Un ensemble $X \subset A^*$ est un *code* sur A si pour tous entiers $m, n \geq 0$ et toute suite $x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_n$ de mots de X, l'égalité $x_1 \cdots x_m = x'_1 \cdots x'_n$ implique les égalités $m = n$ et $x_i = x'_i$ pour $1 \leq i \leq m$.

Exemple 1.27. L'ensemble $\{aa, baa, ba\}$ est un code sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Par contre, l'ensemble $\{a, ab, ba\}$ n'est pas un code car le mot $w = aba$ a les deux décompositions $(ab)a = a(ba)$. L'ensemble $X = a^*b$ est un code infini.

Soit X un code sur A et soit un alphabet B en bijection avec X par une fonction $\mu : B \to X$. La fonction μ se prolonge en un morphisme de B^* dans X^* en posant $\mu(b_1 \cdots b_n) = \mu(b_1) \cdots \mu(b_n)$ pour tout mot $b_1 \cdots b_n$ de B^*. La fonction ainsi prolongée est encore bijective si et seulement si X est un code. Lorsque X est un code, le monoïde X^* est alors isomorphe au monoïde libre B^*.

Soit A un alphabet. On appelle *sous-monoïde* de A^* un ensemble M de mots tels que $\varepsilon \in M$ et $MM \subseteq M$. La dernière inclusion est en fait une égalité puisque $\varepsilon \in M$ implique l'inclusion inverse $M \subseteq MM$. Pour des définitions plus générales de monoïde et de sous-monoïde, on pourra se reporter à la section 1.11.

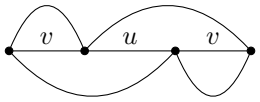


FIG. 1.5 – Diagramme des mots uv, vu et v

Définition 1.28. Un sous-monoïde M de A^* est *libre* si pour tous mots u et v sur A, les appartenances $uv, vu, v \in M$ impliquent $u \in M$.

Le diagramme des mots uv, vu, et v est représenté à la figure 1.5. Cette définition est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 1.29. *Un sous-monoïde M de A^* est libre si et seulement si $M = X^*$ pour un code X sur A.*

Lemme 1.30. *Pour tout sous-monoïde M de A^*, l'ensemble $X = (M - \varepsilon) - (M - \varepsilon)^2$ est un ensemble minimal de générateurs.*

Preuve. On montre facilement par récurrence sur la longueur que tout mot w de M se décompose $w = x_1 \cdots x_n$ où $x_i \in X$. Si w se décompose $w = w_1 w_2$ où $w_1, w_2 \in M - \varepsilon$, on applique l'hypothèse de récurrence à w_1 et w_2 pour obtenir une décomposition de w. Si w n'a pas décomposition $w = w_1 w_2$, il appartient à X.

Réciproquement, soit un ensemble Y tel que $M = Y^*$. Il est clair que tout mot x de X appartient à Y. Sinon x s'écrit $x = y_1 \cdots y_n$ avec $n \geq 2$ ce qui contredit le fait que x est indécomposable dans M. □

Preuve de la proposition. Supposons d'abord que $M = X^*$ où X est un code. Soient u et v des mots tels que $uv, vu, v \in M$. Les mots uv vu et v se décomposent en produits de mots de X. On considère alors le mot $w = vuv$ de M. Pour que ce mot ait une seule décomposition, il faut que la décomposition de uv soit faite d'une décomposition de u suivie de celle de v.

Réciproquement soit M un sous-monoïde libre de A^*. Soit X l'ensemble $X = (M - \varepsilon) - (M - \varepsilon)^2$. D'après le lemme précédent, on a l'égalité $M = X^*$. Supposons par l'absurde que X ne soit pas un code et soit z un mot de longueur minimale ayant une double factorisation $z = x_1 \cdots x_m = x'_1 \cdots x'_n$. Par définition de z, on a $x_1 \neq x'_1$ et par symétrie on peut supposer que $x'_1 = x_1 u$ pour un mot $u \neq \varepsilon$. On pose alors $v = x'_2 \cdots x'_n x_1$ et on vérifie que $vu = x'_2 \cdots x'_n x'_1$, $uv = x_2 \cdots x_n x_1$ et que $uv, vu, v \in M$. Puisque M est libre, le mot u appartient à M et ceci contredit la minimalité de z. □

La définition d'un sous-monoïde libre entraîne qu'une intersection quelconque de sous-monoïdes libres est encore un sous-monoïde libre. Il s'ensuit que pour tout langage L de A^*, il existe un plus petit sous-monoïde libre contenant L, appelé *enveloppe libre*.

Proposition 1.31. *Soit X un ensemble fini de mots. Si X n'est pas un code, l'enveloppe libre de X est engendrée par un ensemble Y tel que $|Y| \leq |X| - 1$.*

Preuve. Soit M l'enveloppe libre de X et soit Y le code tel que $M = Y^*$. Tout mot x de X se décompose $x = y_1 \cdots y_n$ avec $y_1, \ldots, y_n \in Y$. On définit la

fonction $f : X \to Y$ en posant $f(x) = y_1$ pour tout mot $x \in X$. On montre que la fonction f est surjective mais mais pas injective. Supposons par l'absurde que f n'est pas surjective. Si y n'appartient pas à $f(X)$, alors on a l'inclusion $X \subset \varepsilon + (Y - y)Y^*$. On pose alors $Z = (Y - y)y^*$ et on montre facilement que $X \subseteq Z^* = \varepsilon + (Y - y)Y^*$ ce qui contredit le fait que Y^* est l'enveloppe libre de X. Si X n'est pas un code, il existe une relation $z = x_1 \cdots x_m = x'_1 \cdots x'_n$ avec $x_1 \neq x'_1$. On vérifie que $f(x_1) = f(x'_1)$ car le mot z a une unique factorisation. □

Le corollaire suivant décrit les codes à deux mots. L'équivalence entre la deuxième et la troisième proposition peut aussi se montrer directement par récurrence sur la longueur de uv.

Corollaire 1.32. *Pour deux mots u et v, les propositions suivantes sont équivalentes.*
- *L'ensemble $\{u, v\}$ n'est pas un code.*
- *Il existe un mot w tel que $u, v \in w^*$.*
- *Les mots u et v vérifient $uv = vu$.*

Exercice 1.33. Montrer directement que deux mots u et v vérifient l'égalité $uv = vu$ si et seulement ils sont des puissances d'un même mot w, *i.e.* $u, v \in w^*$.

Solution. Il est clair que si $u = w^m$ et $v = w^n$, alors $uv = vu = w^{m+n}$. On montre la réciproque par récurrence sur $|u| + |v|$. Si $uv = vu$ alors u et v sont puissance d'un même mot. Si $|u| + |v| = 0$, alors les deux mots u et v sont vides et le résultat est trivial. On suppose donc que $|u| + |v| > 0$. Si $|u| = |v|$, l'égalité $uv = vu$ implique immédiatement que $u = v$ et le résultat est acquis en prenant $w = u = v$. Sinon, on peut supposer par symétrie que $|u| < |v|$. L'égalité $uv = vu$ implique alors que u est un préfixe de v et que $v = uu'$ pour un certain mot v'. L'égalité $uv = vu$ s'écrit alors $uuu' = uu'u$ d'où on tire $uu' = u'u$ en simplifiant à gauche par u. Par hypothèse de récurrence, il existe un mot w tel que $u = w^m$ et $u' = w^n$ et donc $v = uu' = w^{m+n}$.

1.4 Un peu d'ordre

Dans cette partie, on s'intéresse aux bons quasi-ordres et aux théorèmes de Higman et de Kruskal. Ces ordres sont souvent utilisés pour prouver la terminaison de systèmes de réécriture ou de procédures. On rappelle aussi quelques ordres classiques sur l'ensemble des mots.

Une relation binaire $\preceq$ sur un ensemble E est un *quasi-ordre* (on dit aussi *préordre*) si elle est réflexive et transitive. Contrairement à un ordre, un quasi-ordre n'est pas nécessairement antisymétrique. On peut très bien avoir $x \preceq y$ et $y \preceq x$ pour deux éléments distincts x et y. On écrit $y \succeq x$ pour $x \preceq y$. On écrit $x \prec y$ si $x \preceq y$ et $y \not\preceq x$. À un quasi-ordre $\preceq$ sur E est associée une relation d'équivalence $\approx$ définie par $x \approx y$ si $x \preceq y$ et $y \preceq x$. Le quasi-ordre $\preceq$ induit alors un ordre sur l'ensemble quotient $E/\approx$. Deux éléments x et y sont dits *incomparables* (pour $\preceq$) si $x \not\preceq y$ et $y \not\preceq x$.

Exemple 1.34. Soit $E = \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. La relation de divisibilité est un ordre sur $\mathbb{N}$. Soit la relation $\preceq$ définie sur $\mathbb{N}$ par $m \preceq n$ s'il existe un entier k tel que m divise n^k, c'est-à-dire si tout diviseur premier de m est aussi diviseur premier de n. C'est un quasi-ordre qui n'est pas un ordre. On a en effet $6 \preceq 12$ et $12 \preceq 6$ car 6 et 12 ont les mêmes diviseurs premiers.

Une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble E est un quasi-ordre sur E dont la relation d'équivalence associée $\approx$ est justement la relation $\sim$.

Soit $\preceq$ un quasi-ordre sur E. Une *chaîne décroissante* est une suite $(x_i)_{i\geq 0}$ finie ou infinie telle que $x_i \succ x_{i+1}$ pour tout $i \geq 0$. Un quasi-ordre est dit *bien fondé* s'il ne possède pas de chaîne infinie décroissante. Autrement dit, le quasi-ordre $\preceq$ est bien fondé si la relation $\succ$ induite sur $E/\approx$ est noethérienne (cf. section 2.7.1). Une *antichaîne* est un ensemble d'éléments incomparables deux à deux. Un *idéal* (d'ordre) est un ensemble I tel que si x appartient à I et $x \preceq y$, alors y appartient aussi à I. Une *base* d'un idéal I est un sous-ensemble B de I tel que $I = \{x \mid \exists b \in B \quad b \preceq x\}$. On dit alors que l'idéal I est *engendré* par la base B. Le théorème suivant donne plusieurs propriétés équivalentes qui définissent la notion fondamentale de bon quasi-ordre.

Théorème 1.35 (Higman)**.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un quasi-ordre sur E.*

i) tout idéal possède une base finie,

ii) toute chaîne croissante $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ d'idéaux est constante à partir d'un certain rang,

iii) toute suite infinie d'éléments de E contient une sous-suite infinie croissante,

iv) toute suite infinie d'éléments de E contient une sous-suite croissante de longueur 2,

v) toute chaîne décroissante est finie et toute antichaîne est finie,

vi) tout quasi-ordre $\preceq'$ qui prolonge $\preceq$ est bien fondé.

Un quasi-ordre qui satisfait l'une de ces propriétés est appelé bon quasi-ordre.

Il y a une différence de terminologie entre le français et l'anglais. En français, un ordre est implicitement total et le qualificatif *partiel* est ajouté s'il ne l'est pas. En anglais, un ordre est supposé partiel et on utilise l'adjectif *total* ou *linear* pour préciser qu'il est total. En anglais, un bon quasi-ordre est appelé *well quasi-order* souvent abrégé en *wqo*.

On a vu qu'une relation d'équivalence est un quasi-ordre. Elle est un bon quasi-ordre si et seulement si elle a un nombre fini de classes. En effet, deux éléments non équivalents sont incomparables. Pour qu'il n'existe pas d'antichaîne infinie, le nombre de classes doit être fini. La réciproque est évidente.

Exemple 1.36. L'ordre naturel des entiers naturels est un bon quasi-ordre sur $\mathbb{N}$. L'ordre naturel des entiers relatifs n'est pas bien fondé sur $\mathbb{Z}$ et il n'est donc pas un bon quasi-ordre. La divisibilité est un ordre bien fondé sur les entiers mais elle n'est pas un bon quasi-ordre car les nombres premiers forment une antichaîne infinie.

Preuve. On commence par montrer l'équivalence entre i) et ii). Soit $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ une chaîne croissante d'idéaux. L'ensemble $I = \bigcup_{n\geq 0} I_n$ est encore un idéal. Si le quasi-ordre a la propriété de base finie, cet idéal est engendré par une base finie B. Il existe alors un entier k tel que $B \subseteq I_k$. On a alors $I = I_k$ et $I_{k+n} = I_k$ pour tout $n \geq 0$. Réciproquement soit I un idéal. Si I ne possède pas de base finie, on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de I de la manière suivante. L'élément x_0 est choisi de façon arbitraire dans I. Les éléments $x_0, \ldots, x_k$ étant déjà choisis, l'élément x_{k+1} est choisi en dehors de l'idéal engendré par $B_k = \{x_0, \ldots, x_k\}$. Soit I_k l'idéal engendré par B_k. Par construction, la chaîne d'idéaux $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ est strictement croissante.

On montre maintenant l'équivalence entre iii), iv) et v). Il est clair que iii) implique iv) et que iv) implique à nouveau v). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments. On extrait de cette suite une sous-suite infinie croissante $(x_{i_n})_{n\geq 0}$ de la façon suivante. On appelle élément *minimal* d'un sous-ensemble X, un élément x de X tel que pour tout x' de X, $x' \preceq x$ implique $x \preceq x'$ et donc $x \approx x'$. Soit $X = \{x_n \mid n \geq 0\}$ l'ensemble des valeurs de la suite. Puisque il n'y a pas de chaîne infinie décroissante, il existe au moins un élément minimal dans X. Pour deux éléments minimaux x et x', soit ils sont incomparables soit ils vérifient $x \approx x'$. Puisqu'il n'y a pas d'antichaîne infinie, il existe un nombre fini de classes de $\approx$ formées d'éléments minimaux. Soient $z_1, \ldots, z_k$ des représentants de ces classes. Pour tout élément x_n de la suite, il existe au moins un représentant z_j tel que $x_n \succeq z_j$. Il existe donc au moins un représentant z_{j_0} tel qu'il existe une infinité d'éléments x_n vérifiant $x_n \succeq z_{j_0}$. On pose alors $x_{i_0} = z_{j_0}$ et on recommence avec la sous-suite des éléments x_n tels que $n > i_0$ et $x_n \succeq x_{i_0}$.

On montre ensuite l'équivalence entre i)-ii) et iii)-iv)-v). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments. Soit I_k l'idéal engendré par la base $B_k = \{x_0, \ldots, x_k\}$. Puisque la chaîne d'idéaux $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ est constante à partir d'un certain rang, il existe deux indices $k < l$ tel que $x_k \preceq x_l$, ce qui montre iv). Réciproquement, soit $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ une chaîne d'idéaux. Si cette chaîne n'est pas constante à partir d'un certain rang, on peut supposer, quitte à supprimer quelques idéaux de la chaîne, que chaque inclusion $I_n \subsetneq I_{n+1}$ est stricte. Soir x_n un élément de $I_{n+1} \backslash I_n$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ne contient aucune sous-suite croissante de longueur 2. Ceci contredit l'hypothèse que la chaîne d'idéaux n'est pas constante à partir d'un certain rang.

On montre finalement l'équivalence entre vi) et les autres propriétés. Soit $\preceq'$ un quasi-ordre qui prolonge $\preceq$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments. D'après iv), il existe deux indices $k < l$ tel que $x_k \preceq x_l$ et donc $x_k \preceq' x_l$. Ceci montre que le quasi-ordre $\preceq'$ n'a pas de chaîne infinie décroissante. Réciproquement, le quasi-ordre $\preceq$ est son propre prolongement. Ceci montre qu'il est bien fondé. Il reste à montrer qu'il n'a pas d'antichaîne infinie. On montre que si A est une antichaîne de $\preceq$ et si $\preceq_0$ est quasi-ordre quelconque sur A, il est possible de prolonger $\preceq$ en un quasi-ordre $\preceq'$ tel que la restriction de $\preceq'$ à A est $\preceq_0$. Soit $\preceq'$ la clôture transitive de la relation $\preceq \cup \preceq_0$. C'est bien sûr un quasi-ordre. Il reste à prouver que pour tous éléments a et b de A, $a \preceq' b$ implique $a \preceq_0 b$ puisque la réciproque est évidente. Si $a \preceq' b$, il existe une suite finie $x_0, \ldots, x_n$ telle que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_i \preceq x_{i+1}$ ou $x_i \preceq_0 x_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Si $n = 1$, le résultat est acquis puisque a et b sont incomparables pour $\preceq$. On suppose maintenant que $n \geq 2$. En utilisant la transitivité de $\preceq_0$, on peut supposer que les éléments $x_1, \ldots, x_{n-1}$ n'appartiennent pas à A. On a alors $x_i \preceq x_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$ et donc $a \preceq b$ contrairement à l'hypothèse que a et b sont incomparables pour $\preceq$. Ceci montre que $\preceq'$ coïncide avec $\preceq_0$ sur A. Si le quasi-ordre $\preceq$ a une antichaîne infinie A, on peut le prolonger en utilisant un quasi-ordre $\preceq_0$ sur A qui contient une chaîne infinie décroissante. Le quasi-ordre obtenu contient encore une chaîne infinie décroissante et n'est pas bien fondé. □

Soient $\preceq_1$ et $\preceq_2$ deux quasi-ordres sur des ensembles E_1 et E_2. Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est naturellement muni d'un quasi-ordre $\preceq$ défini par $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ si $x_1 \preceq_1 y_1$ et $x_2 \preceq_2 y_2$. Le résultat suivant est parfois attribué à Nash-Williams.

Lemme 1.37. *Si $\preceq_1$ et $\preceq_2$ dont des bons quasi-ordres sur E_1 et E_2, alors $\preceq$ est un bon quasi-ordre sur $E_1 \times E_2$.*

La preuve découle directement de la caractérisation iii) du théorème précédent. L'ordre naturel sur les entiers induit un ordre naturel sur les k-uplets d'entiers défini par $(m_1, \ldots, m_k) \leq (n_1, \ldots, n_k)$ si $m_i \leq n_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Le lemme précédent a pour conséquence le résultat suivant appelé lemme de Dickson.

Lemme 1.38 (Dickson 1913)**.** *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$ a un nombre fini d'éléments minimaux.*

1.4.1 Quasi-ordres sur les mots

Soit $\preceq$ un quasi-ordre sur un ensemble A. On définit un quasi-ordre $\preceq^*$ sur l'ensemble A^* des mots finis sur A de la façon suivante. Deux mots $w = a_1 \cdots a_m$ et $w' = a'_1 \cdots a'_n$ vérifient $w \preceq^* w'$ s'il existe une suite croissante $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ d'indices tels que $a_i \preceq a'_{j_i}$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Pour une relation R, on note parfois R^* la clôture réflexive et transitive de la relation R (cf. section 2.7.1). Ici le quasi-ordre $\preceq^*$ n'est pas du tout la clôture réflexive et transitive de $\preceq$ (qui est justement égale à $\preceq$). L'exposant $*$ rappelle seulement que $\preceq^*$ est l'extension à A^* du quasi-ordre $\preceq$. On vérifie facilement que $\preceq^*$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) quasi-ordre sur A^* tel que :

1. $uv \preceq^* uav$ pour tous mots $u, v \in A^*$ et toute lettre $a \in A$,
2. $uav \preceq^* ubv$ si $a \preceq b$ pour tous mots $u, v \in A^*$ et toutes lettres $a, b \in A$.

Soit $w = w_1 \cdots w_n$ un mot de longueur n. Un *sous-mot* de w est un mot u tel qu'il existe une sous-suite croissante $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ d'indices vérifiant $u = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$. Autrement dit, le mot u est obtenu en supprimant certaines lettres du mot w. La relation *être sous-mot* est bien sûr un ordre partiel sur l'ensemble des mots. La notion de sous-mot est à distinguer de celle de facteur où les lettres choisies sont consécutives.

Exemple 1.39. Si le quasi-ordre $\preceq$ sur A est l'égalité, le quasi-ordre $\preceq^*$ est l'*ordre des sous-mots*.

Théorème 1.40 (Higman 1952)**.** *Si $\preceq$ est un bon quasi-ordre sur A, alors $\preceq^*$ est un bon quasi-ordre sur A^*.*

Preuve. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est *mauvaise* s'il n'existe pas deux indices $k < l$ tels que $u_k \preceq^* u_l$ et on utilise la caractérisation iv) du théorème 1.35. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe au moins une mauvaise suite. On construit alors par récurrence une mauvaise suite minimale $(u_n)_{n\geq 0}$. Soit u_0 un mot le plus court possible tel que u_0 soit le premier élément d'une mauvaise suite. Les mots $u_0, \ldots, u_n$ étant choisis, u_{n+1} est un mot le plus court tel que $u_0, \ldots, u_{n+1}$ sont les premiers éléments d'une mauvaise suite. La suite ainsi construite est mauvaise. Puisque le mot vide vérifie $\varepsilon \preceq^* w$ pour tout mot w, aucun des mots u_n n'est vide. Chaque mot u_n s'écrit donc $u_n = a_n v_n$ où a_n est une lettre et v_n un mot. Comme $\preceq$ est un bon quasi-ordre, il existe une suite extraite $(a_{i_n})_{n\geq 0}$ qui est croissante. On considère alors la suite suivante

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots$$

obtenue en prenant les i_0 premiers éléments $u_0, u_1, \ldots, u_{i_0-1}$ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ puis tous les éléments de la suite $(v_{i_n})_{n\geq 0}$. Cette nouvelle suite est encore mauvaise. On ne peut pas avoir $k < l < i_0$ et $u_k \preceq^* u_l$, car $(u_n)_{n\geq 0}$ est mauvaise. La relation $u_k \preceq^* v_{i_l}$ implique la relation $u_k \preceq^* u_{i_l}$ et la relation $v_{i_k} \preceq^* v_{i_l}$ implique $u_{i_k} \preceq^* u_{i_l}$ car $a_{i_k} \preceq a_{i_l}$. On obtient alors une contradiction car v_{i_0} est plus court que u_{i_0}. □

Exemple 1.41. D'après le théorème de Higman, l'ordre des sous-mots sur un alphabet fini est un bon quasi-ordre. En effet, l'égalité sur A est bien sûr un bon quasi-ordre sur A.

Le quasi-ordre $\preceq^*$ défini sur les suites finies peut être étendu en un quasi-ordre $\preceq^\omega$ sur A^ω en posant $(a_n)_{n\geq 0} \preceq^\omega (a'_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une suite strictement croissante d'indices $(i_n)_{n\geq 0}$ telle que $a_n \preceq a'_{i_n}$ pour tout $n \geq 0$. L'exemple suivant montre que le théorème de Higman ne se généralise pas à $\preceq^\omega$.

Exemple 1.42. Soit $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'ensemble des paires d'entiers et soit l'ordre $\preceq$ défini sur A par $(m, n) \preceq (m', n')$ si $m = m'$ et $n \leq n'$ ou $m < m'$ et $n < m'$. On vérifie que c'est un bon ordre partiel. Pour chaque entier i, soit $x_i \in A^\omega$ donné par

$$x_i = (i, 0), (i, 1), (i, 2), (i, 3), \ldots$$

La suite $(x_i)_{i\geq 0}$ ne contient pas de sous-suite croissante de longueur 2 pour $\preceq^\omega$.

Pour obtenir une généralisation du théorème de Higman aux suites infinies, des meilleurs quasi-ordres (better quasi-order en anglais souvent abrégé en *bqo*) ont été introduits par Nash-Williams. Pour une définition des meilleurs quasi-ordre et quelques résultats, on pourra consulter [Alm94, p. 33].

Exemple 1.43. L'ordre des sous-mots est défini sur A^ω par $(a_n)_{n\geq 0} \preceq^\omega (a'_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une suite strictement croissante d'indices $(i_n)_{n\geq 0}$ telle que $a_n = a'_{i_n}$ pour tout $n \geq 0$. Si l'alphabet A est fini, c'est un bon quasi-ordre sur A^ω. Ceci provient du fait que l'égalité est un meilleur quasi-ordre sur A.

1.4.2 Ordres sur les mots

L'ordre des sous-mots n'est pas l'ordre le plus naturel sur les mots. Le plus familier est sans aucun doute l'*ordre lexicographique* utilisé dans le dictionnaire. On suppose que A est muni d'un ordre noté $<$. Deux mots w et w' vérifient $w <_{\text{lex}} w'$ soit si w est préfixe de w' soit s'il existe deux lettres a et b vérifiant $a < b$ et trois mots u, v et v' tels que $w = uav$ et $w' = ubv'$. Le mot u est en fait le plus long préfixe commun à w et w' qui est noté $w \wedge w'$. Dans le cas où w est préfixe de w', on a $w \wedge w' = w$.

On pourra remarquer que la fonction d définie par $d(w, w') = |w| + |w'| - 2|w \wedge w'|$ est une distance sur l'ensemble des mots.

L'ordre lexicographique est total mais il n'est pas bien fondé dès que l'alphabet a au moins deux lettres. Sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, la suite de mots $w_n = 0^n 1$ est infinie et décroissante. Pour cette raison, on considère aussi l'*ordre hiérarchique* où les mots sont d'abord classés par longueur puis par ordre lexicographique. Deux mots w et w' vérifient $w <_{\text{hié}} w'$ si $|w| < |w'|$ ou $|w| = |w'|$ et $w <_{\text{lex}} w'$. Cet ordre a l'avantage d'être total et bien fondé.

1.4.3 Quasi-ordres sur les arbres

Le théorème de Higman admet une généralisation aux arbres finis due à Kruskal. La construction de bons quasi-ordres sur les arbres est essentielle pour la terminaison de systèmes de réécriture de termes, souvent utilisés pour donner une sémantique aux langages de programmation fonctionnels.

On commence par rappeler la notion de domaine d'arbre. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des suites finies d'entiers. Un *domaine d'arbre* est sous-ensemble D de $\mathbb{N}^*$ qui vérifie les deux conditions suivantes.

1. D est clos par préfixe, c'est-à-dire si uv appartient à D, alors u appartient aussi à D pour toutes suites $u, v \in \mathbb{N}^*$.
2. D est clos par valeurs inférieures, c'est-à-dire si ui appartient à D, alors uj appartient aussi à D pour tout $u \in \mathbb{N}^*$ et tous entiers $0 \leq j \leq i$.

Soit A un alphabet non nécessairement fini. On appelle *arbre sur* A une fonction $t : D \to A$ où D est un domaine d'arbre. Un élément du domaine D de l'arbre est appelé un *nœud* de l'arbre. L'arbre est dit *vide* (resp. *fini*) si son domaine D est vide (resp. fini). On appelle *taille* de t et on note $|t|$ le cardinal du domaine de t. Le domaine d'un arbre t est noté $\mathrm{dom}(t)$. Un arbre est représenté comme un graphe ayant les nœuds pour sommets et les paires de nœuds de la forme (u, ui) pour arêtes.

Un mot fini $w = a_0 \cdots a_n$ s'identifie avec un arbre t de domaine $D = \{\varepsilon, 0, 0^2, \ldots, 0^n\} = (\varepsilon + 0)^n$ et défini par $t(0^k) = a_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

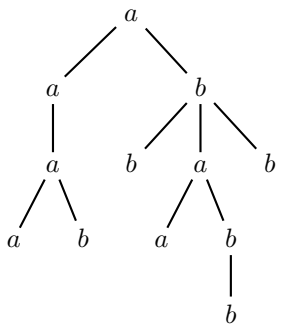


FIG. 1.6 – L'arbre de l'exemple 1.44

Exemple 1.44. Soit le domaine d'arbre D égal à l'ensemble

$$D = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 10, 11, 12, 000, 001, 110, 111, 1110\}$$

et soit l'arbre t défini sur ce domaine par $t(w) = a$ si w a un nombre pair de 1 et $t(w) = b$ sinon. Cet arbre t est représenté à la figure 1.6.

Soit t un arbre de domaine D et soit w un mot sur $\mathbb{N}$. L'arbre $w^{-1}t$ est l'arbre de domaine $w^{-1}D$ défini par $(w^{-1}t)(u) = t(wu)$ pour tout $u \in w^{-1}D$. Cet arbre est appelé le *sous-arbre de* t *enraciné en* w. Si w n'appartient pas au domaine de t, l'arbre $w^{-1}D$ est vide.

Soit $\preceq$ un quasi-ordre sur un ensemble A. On définit un quasi-ordre $\preceq^\Delta$ sur l'ensemble de tous les arbres finis sur A de la façon suivante. Deux arbres t et t' de domaines respectifs D et D' vérifient $t \preceq^\Delta t'$ s'il existe une fonction

injective f de D dans D' telle que pour tous w et w' dans D, on ait les propriétés suivantes.

1. $t(w) \preceq t'(f(w))$,
2. $f(w \wedge w') = f(w) \wedge f(w')$ et
3. Si $w <_{\text{lex}} w'$ alors $f(w) <_{\text{lex}} f(w')$

où $w \wedge w'$ dénote le plus long préfixe commun de w et w'.

La fonction f généralise la suite croissante d'indices $j_1, \ldots, j_m$ utilisée dans le cas des mots pour définir l'ordre $\preceq^*$. La première condition vérifiée par f est l'analogue de la condition $a_i \preceq a'_{j_i}$ pour les mots. Les deux autres conditions assurent que f est bien un plongement de l'arbre t dans l'arbre t'. La seconde condition exprime que la relation de parenté est préservée et la dernière que l'ordre des fils est également respecté.

Ce quasi-ordre peut être aussi défini de manière récursive sur les arbres.

Théorème 1.45 (Kruskal 1960)**.** *Si $\preceq$ est un bon quasi-ordre sur A, alors $\preceq^\Delta$ est un bon quasi-ordre sur l'ensemble des arbres finis sur A.*

Dans les arbres que nous avons définis, les fils de chaque nœud sont ordonnés et ils forment une suite. Il est possible de définir des arbres où l'ordre des fils est sans importance. Le théorème de Kruskal reste vrai pour cette variante des arbres.

Preuve. La preuve reprend les grandes lignes de la preuve du théorème de Higman. On dit qu'une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est *mauvaise* s'il n'existe pas deux indices $k < l$ tels que $t_k \preceq^\Delta t_l$ et on utilise la caractérisation iv) du théorème 1.35. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe au moins une mauvaise suite. On construit alors par récurrence une mauvaise suite minimale $(t_n)_{n\geq 0}$. Soit t_0 un arbre de taille minimale tel que t_0 soit le premier élément d'une mauvaise suite. Les arbres $t_0, \ldots, t_n$ étant choisis, t_{n+1} est un arbre de taille minimale tel que $t_0, \ldots, t_{n+1}$ sont les premiers éléments d'une mauvaise suite. La suite ainsi construite est mauvaise.

Il existe un nombre fini d'indices n tels que $|t_n| \leq 2$. Sinon il existe une sous-suite infinie d'arbres de taille 1 et on peut trouver deux indices $k < l$ tels que $t_k(\varepsilon) \preceq t_l(\varepsilon)$ qui est équivalent à $t_k \preceq^\Delta t_l$ si t_k et t_l sont de taille 1. Quitte à supprimer un nombre fini d'éléments de la suite, on peut supposer que $|t_n| \geq 2$ pour tout $n \geq 0$.

Puisque $\preceq$ est un bon quasi-ordre sur A, il existe une suite extraite $(t_{i_n})_{n\geq 0}$ telle que $t_{i_0}(\varepsilon) \preceq t_{i_1}(\varepsilon) \preceq t_{i_0}(\varepsilon) \preceq \cdots$. Quitte à remplacer la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ par la suite extraite $(t_{i_n})_{n\geq 0}$, on peut supposer que la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ vérifie $t_0(\varepsilon) \preceq t_1(\varepsilon) \preceq t_2(\varepsilon) \preceq \cdots$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des arbres qui apparaissent juste sous la racine d'un des arbres t_n. Plus formellement, on définit l'ensemble $\mathcal{D}$ par

$$\mathcal{D} = \{i^{-1}t_n \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } i \in \text{dom}(t_n)\}.$$

On prétend que $\preceq^\Delta$ est un bon quasi-ordre sur $\mathcal{D}$. Sinon, il existe une mauvaise suite $(r_n)_{n\geq 0}$ d'arbres de $\mathcal{D}$. On peut extraire de cette suite une nouvelle suite $(r'_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tous $k < l$, les arbres r'_k et r'_l sont des sous-arbres de t_m et t_n avec $m < n$. On peut donc supposer que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ satisfait cette

propriété. Soit alors n_0 le plus petit indice tel que r_0 est un sous-arbre de t_{n_0}. On considère la suite

$$t_0, t_1, \ldots, t_{n_0-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$$

et on constate que cette suite est encore mauvaise et qu'elle contredit la minimalité de la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ construite. Cette contradiction prouve que $\preceq^{\Delta}$ est bien un bon quasi-ordre sur $\mathcal{D}$. Par le théorème de Higman, le quasi-ordre $\preceq^{\Delta *}$ est un bon quasi-ordre sur $\mathcal{D}^*$.

Pour chaque arbre t_n, on note k_n l'entier $\max\{i \mid i \in \mathrm{dom}(t_n)\}$. Les sous-arbres sous la racine de t_n sont donc les arbres $0^{-1}t_n, 1^{-1}t_n, \ldots, k_n^{-1}t_n$. Puisque $\preceq^{\Delta *}$ est un bon quasi-ordre sur $\mathcal{D}^*$, il existe deux indices $m < n$ tels que

$$(0^{-1}t_m, 1^{-1}t_m, \ldots, k_m^{-1}t_m) \preceq^{\Delta *} (0^{-1}t_n, 1^{-1}t_n, \ldots, k_n^{-1}t_n)$$

Puisqu'on a en outre $t_m(\varepsilon) \preceq t_n(\varepsilon)$, on a finalement $t_m \preceq^{\Delta} t_n$ qui prouve que $\preceq^{\Delta}$ est un bon quasi-ordre sur l'ensemble de tous les arbres finis. □

Les théorèmes de Higman et de Kruskal peuvent encore être généralisés aux graphes. Le théorème de Robertson et Seymour établit que l'ordre par mineur des graphes est un bon quasi-ordre. On rappelle qu'un *mineur* d'un graphe G est un graphe obtenu par contraction d'arêtes d'un sous-graphe de G. Un *sous-graphe* est le graphe induit par un sous-ensemble de sommets. La contraction d'une arête consiste à identifier les deux sommets qu'elle relie. Beaucoup de classes de graphes comme celle des graphes planaires ou celle des graphes triangulés sont caractérisées par des mineurs interdits. Elles sont égales à l'ensemble des graphes qui ne contiennent pas certains graphes fixés comme mineur. La preuve du résultat de Robertson et Seymour est excessivement difficile et s'étend sur plusieurs centaines de pages.

L'exercice suivant introduit une extension du théorème de Ramsey (théorème 1.108) aux arbres.

Exercice 1.46. Pour $n \geq 0$, on note B_n l'ensemble $\{0,1\}^{\leq n}$ des mots de longueur au plus n sur l'aphabet $\{0,1\}$. Un arbre t est dit *monochrome* si pour tous $w, w' \in \mathrm{dom}(t)$, on a $t(w) = t(w')$. Montrer que pour tout arbre t de domaine B_{2n} sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, il existe un arbre t' monochrome de domaine B_n tel que $t' \preceq^{\Delta} t$ où l'ordre $\preceq$ sur A est l'égalité.

1.5 Langages rationnels

La classe des langages rationnels est le premier niveau de la hiérarchie de Chomsky. Ces langages sont très simples mais ils possèdent de très nombreuses propriétés remarquables. Ils peuvent être introduits par des définitions de natures très différentes. Ceci est une preuve de leur rôle central en théorie des langages formels.

1.5.1 Expressions rationnelles

On commence par la définition de ces langages qui utilise les opérations rationnelles et justifie la terminologie.

Définition 1.47 (Langages rationnels)**.** La classe $\mathcal{R}$ des *langages rationnels* (sur A) est la plus petite famille de langages telle que :
- $\varnothing \in \mathcal{R}$ et $\{a\} \in \mathcal{R}$ pour toute lettre a ;
- $\mathcal{R}$ est close pour les opérations rationnelles (l'union, le produit et l'étoile).

Exemple 1.48. Quelques exemples de langages rationnels.
- Le langage $\{\varepsilon\}$ est rationnel car il s'écrit $\varnothing^*$.
- Le langage A est rationnel puisqu'il s'écrit $A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$.
- Le langage L des mots de longueur paire est rationnel puisqu'il s'écrit $L = (AA)^* = (A^2)^*$.
- Le langage L' des mots de longueur impaire est rationnel puisqu'il s'écrit $L' = AL$.
- Le langage des mots qui contiennent un facteur aba est rationnel puisqu'il s'écrit A^*abaA^*.

La notion d'*expression* n'est pas formellement définie. Elle doit être entendue dans le sens usuel en mathématiques comme c'est le cas des expressions arithmétiques. Les opérateurs arithmétiques sont remplacés dans notre cadre par les opérateurs rationnels et les parenthèses sont encore utilisées pour lever les ambiguïtés.

Définition 1.49 (Expressions rationnelles)**.** La classe $\mathcal{E}$ des *expressions rationnelles* est la plus petite famille d'expressions telles que :
- $\varnothing \in \mathcal{E}$, et $a \in \mathcal{E}$ pour toute lettre a ;
- pour toutes expressions E et E' de $\mathcal{E}$, les expressions $E + E'$, $E \cdot E'$ et E^* sont encore dans $\mathcal{E}$.

Notons que $+$, $\cdot$ et $*$ sont vus ici des symboles inertes et non des opérations.

Notation 1.50. Pour alléger les notations, Le point dénotant le produit et les accolades autour des singletons sont omis dans l'écriture des expressions rationnelles. Ainsi l'expression $(\{a\} + \{b\} \cdot \{a\})^*$ est écrite $(a + ba)^*$. De plus, Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, on utilise A comme une abréviation pour $a_1 + \cdots + a_n$.

Exemple 1.51. Quelques exemples d'expressions rationnelles.

A^*	tous les mots
aA^*	mots commençant par a
A^*a	mots finissant par a
$(b + ab)^*(a + \varepsilon)$	mots n'ayant pas deux a consécutifs
$a^* + b^*$	mots n'ayant que des a ou que des b
$(aa + b)^*$	mots avec des blocs de a de longueur paire
$(ab^*a + b)^*$	mots ayant un nombre pair de a

Exercice 1.52. Donner une description en français des langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : AA, $(\varepsilon + A)(\varepsilon + A)$, $(AA)^*$, A^*aA^*, A^*abA^*, $A^*aA^*bA^*$ et $(ab)^*$.

Solution.
- AA est le langage des mots de longueur 2.
- $(\varepsilon + A)(\varepsilon + A)$ est le langage des mots de longueur au plus 2.
- $(AA)^*$ est le langage des mots de longueur paire.
- A^*aA^* est le langage des mots ayant au moins une occurrence de a.
- A^*abA^* est le langage des mots ayant au moins une occurrence du facteur ab.

– $A^*aA^*bA^*$ est le langage des mots ayant au moins une occurrence de a puis ensuite une occurrence d'un b.
– $(ab)^*$ est le langage des mots commençant par a, finissant par b et na'yant jamais deux a ou deux b consécutifs.

1.5.2 Automates

Une autre définition des langages rationnels peut être donnée en utilisant les automates. Il s'agit d'un type de machines très simples qui sont des cas particuliers des machines de Turing.

Définition 1.53 (Automate)**.** Un *automate* $\mathcal{A}$ sur l'alphabet A est un quintuplet (Q, A, E, I, F) où Q est fini, $I \subseteq Q$, $F \subseteq Q$ et $E \subseteq Q \times A \times Q$. On appelle les éléments de Q les états, ceux de I les états initiaux, ceux de F les états finaux et ceux de E les transitions.

Un automate est en fait un graphe enrichi d'étiquettes sur les arêtes et d'états initiaux et finaux. Une transition (p, a, q) est notée $p \xrightarrow{a} q$ à la manière d'une arête d'un graphe.

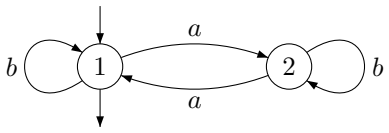


FIG. 1.7 – Un automate avec quatre transitions

Exemple 1.54. Soit $\mathcal{A} = (\{1,2\}, \{a,b\}, \{(1,b,1),(1,a,2),(2,b,2),(2,a,1)\}, \{1\}, \{1\})$ un automate représenté à la figure 1.7. Cet automate a les deux états 1 et 2. L'état 1 est à la fois initial (marqué d'une petite flèche entrante) et final (marqué d'une petite flèche sortante). Il possède quatre transitions représentées comme des arêtes d'un graphe.

Définition 1.55 (Chemin)**.** Un *chemin* dans un automate (Q, A, E, I, F) est une suite finie de transitions consécutives

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$$

noté aussi de manière concise $q_0 \xrightarrow{a_1 \cdots a_n} q_n$. L'état q_0 est l'*état de départ* et q_n est l'*état d'arrivée* du chemin. Le mot $a_1 \cdots a_n$ est l'*étiquette* du chemin.

Exemple 1.56. La suite $2 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$ est un chemin dans l'automate de l'exemple précédent. Son étiquette est le mot *abbab*.

Définition 1.57 (Acceptation)**.** Un chemin est *acceptant* ou *réussi* lorsque l'état de départ est initial et l'état d'arrivée est final. Un mot est *accepté* par l'automate $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un chemin acceptant de $\mathcal{A}$. Le langage des mots acceptés par l'automate $\mathcal{A}$ est noté $L(\mathcal{A})$.

Exemple 1.58. L'ensemble des mots acceptés par l'automate de la figure 1.7 est le langage $(ab^*a + b)^*$ des mots ayant un nombre pair d'occurrences de a.

Le théorème de Kleene établit l'équivalence entre les expressions rationnelles et les automates finis dans le sens où ces deux notions définissent les même langages. Ce résultat est remarquable car il relie deux notions de natures différentes, combinatoire pour les expressions rationnelles et opérationnelle pour les automates. Le théorème de Kleene admet de nombreuses extensions à des structures telles les arbres et les mot infinis ou même transfinis.

Théorème 1.59 (Kleene 1956)**.** *Un langage L est rationnel si et seulement s'il existe un automate (fini) $\mathcal{A}$ tel que $L = L(\mathcal{A})$.*

La preuve du théorème utilise les notions d'automate émondé et normalisé. que nous définissons successivement.

Définition 1.60 (Automate émondé)**.** Un automate est *émondé* si par tout état passe au moins un chemin acceptant.

Il est clair que les états par lesquels ne passe aucun chemin acceptant peuvent être supprimés sans changer l'ensemble des mots acceptés par l'automate. Un état q apparaît sur un chemin acceptant s'il est accessible d'un état initial et si un état final est accessible à partir de q (on dit que q est co-accessible). L'ensemble des états accessibles et co-accessibles peut être calculé par deux parcours en largeur de l'automate considéré comme un graphe. On suppose souvent dans la suite que les automates sont émondés.

Définition 1.61 (Automate normalisé)**.** Un automate est *normalisé* s'il possède un unique état initial qui est l'état d'arrivée d'aucune transition et un unique état final qui est l'état de départ d'aucune transition.

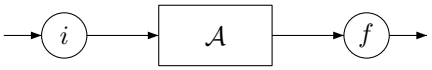


FIG. 1.8 – Schéma d'un automate normalisé

Si l'état initial et l'état final d'un automate normalisé coïncident, aucune transition n'est adjacente à cet état et l'automate accepte uniquement le mot vide. Sinon, l'automate n'accepte pas le mot vide. La proposition suivante n'est pas nécessaire à la preuve du théorème mais la construction utilisée dans la preuve est intéressante en soi.

Proposition 1.62 (Normalisation)**.** *Pour tout automate $\mathcal{A}$, il existe un automate normalisé $\mathcal{A}'$ tel que $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate. Soient i et f deux nouveaux états n'appartenant pas à Q. L'automate $\mathcal{A}'$ est égal à $(Q \cup \{i, f\}, A, E', \{i\}, \{f\})$ où l'ensemble E' des transitions est donné par

$$\begin{aligned} E' = E &\cup \{i \xrightarrow{a} q \mid \exists p \in I \;\; p \xrightarrow{a} q \in E\} \\ &\cup \{p \xrightarrow{a} f \mid \exists q \in F \;\; p \xrightarrow{a} q \in E\} \\ &\cup \{i \xrightarrow{a} f \mid \exists p \in I \;\; \exists q \in F \;\; p \xrightarrow{a} q \in E\}. \end{aligned}$$

C'est pure routine de vérifier que $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$. □

Preuve. Pour un langage L, on note respectivement $\varepsilon(L)$ et $\alpha(L)$ les langages $L \cap \{\varepsilon\}$ et $L \setminus \{\varepsilon\}$. Les formules suivantes montrent qu'on peut calculer récursivement $\alpha(L)$ et $\varepsilon(L)$ à partir d'une expression rationnelle de L.

$$\begin{array}{ll} \varepsilon(L + L') = \varepsilon(L) + \varepsilon(L') & \alpha(L + L') = \alpha(L) + \alpha(L') \\ \varepsilon(LL') = \varepsilon(L)\varepsilon(L') & \alpha(LL') = \alpha(L)\alpha(L') + \varepsilon(L)\alpha(L') + \alpha(L)\varepsilon(L') \\ \varepsilon(L^*) = \varepsilon & \alpha(L^*) = \alpha(L)^+ \end{array}$$

On montre par induction sur (la longueur de) l'expression rationnelle que si L est rationnel alors $\alpha(L)$ est accepté par un automate normalisé. Pour obtenir un automate acceptant L, il suffit d'ajouter éventuellement un nouvel état à la fois initial et final pour accepter le mot vide.

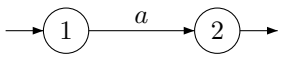


FIG. 1.9 – Automate normalisé acceptant $L = a$

On considère d'abord les cas de base. Le langage $L = a$ est accepté par l'automate de la figure 1.9

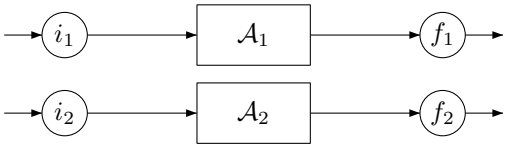


FIG. 1.10 – Automates normalisés $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_1$

Soient L_1 et L_2 deux langages rationnels et soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux automates normalisés acceptant respectivement les langages $\alpha(L_1)$ et $\alpha(L_2)$. Ces deux automates sont schématisés à la figure 1.10

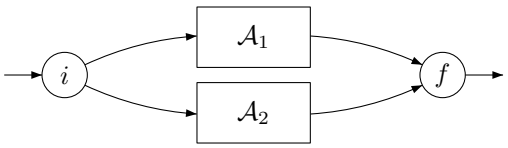


FIG. 1.11 – Automate pour l'union

Si $L = L_1 + L_2$, on utilise la formule $\alpha(L) = \alpha(L_1) + \alpha(L_2)$. Un automate acceptant $\alpha(L)$ est construit en faisant l'union disjointe des deux automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. Cet automate est ensuite normalisé en fusionnant i_1 avec i_2 et f_1 avec f_2 (cf. figure 1.11).

Si $L = L_1L_2$, on utilise la formule $\alpha(L) = \alpha(L_1)\alpha(L_2) + \varepsilon(L_1)\alpha(L_2) + \alpha(L_1)\varepsilon(L_2)$. D'après le cas précédent, on sait construire un automate normalisé pour l'union. Il suffit donc de savoir construire un automate pour $\alpha(L_1)\alpha(L_2)$.

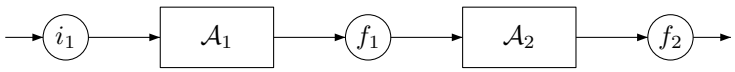


FIG. 1.12 – Automate pour le produit

Un automate normalisé acceptant $\alpha(L_1)\alpha(L_2)$ est construit en faisant l'union disjointe des deux automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ puis en fusionnant f_1 avec i_2 (cf. figure 1.12).

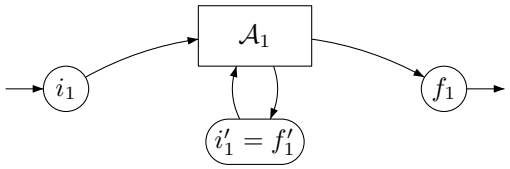


FIG. 1.13 – Automate pour l'étoile

Si $L = L_1^*$, on utilise la formule $\alpha(L) = (\alpha(L_1))^+$. Un automate normalisé acceptant $(\alpha(L_1))^+$ est construit en dupliquant chacun des états i_1 et f_1 en des états i'_1 et f'_1 puis en fusionnant i'_1 avec f'_1 (cf. figure 1.13). Cet automate peut aussi être obtenu en fusionnant d'abord i_1 avec f_1 puis en normalisant ensuite l'automate grâce à la proposition précédente.

Pour l'autre sens de l'équivalence, on renvoie le lecteur aux algorithmes ci-dessous. □

Il existe de nombreuses autres méthodes pour convertir une expression rationnelle en automate. Une variante de la méthode présentée ci-dessus consiste à utiliser des automates *semi-normalisés* où seules les conditions sur l'état initial sont satisfaites. Les constructions pour l'automate du produit et de l'étoile sont un peu plus délicates. Par contre, ces automates peuvent accepter le mot vide et les constructions limitent le nombre d'états engendrés. Cette méthode est pratique pour des constructions à la main. La méthode de Thompson utilise des automates avec ε-transitions qu'il faut ensuite supprimer. D'autres méthodes sont basées sur les quotients à gauche calculés directement sur l'expression. On peut obtenir un automate déterministe par la méthode Brzozowski ou un automate non déterministe par celle d'Antimirov (cf. [Sak03]).

Algorithme (McNaughton-Yamada)**.**

On suppose $Q = \{1, \ldots, n\}$. Pour $0 \leq k \leq n$, et deux états $q, q' \in Q$, on définit l'ensemble $L^k_{q,q'}$ de mots qui étiquettent un chemin de q à q' ne passant que par des états intermédiaires dans l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$. Plus formellement, l'ensemble $L^k_{q,q'}$ est défini par

$$L^k_{q,q'} = \{a_1 \ldots a_n \mid n \geq 0 \text{ et } q \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q' \text{ avec } \forall i, p_i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}.$$

Ainsi, on a : $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I, f \in F} L^n_{i,f}$. Les formules suivantes permettent de

calculer les langages $L^k_{q,q'}$ par récurrence sur k.

$$L^0_{q,q'} = \{a \mid q \xrightarrow{a} q' \in E\} \cup \{\varepsilon \mid \text{ si } q = q'\}$$
$$L^{k+1}_{q,q'} = L^k_{q,q'} + L^k_{q,k+1}(L^k_{k+1,k+1})^* L^k_{k+1,q'}.$$

Comme les formules ci-dessus ne font intervenir que les opérations rationnelles, on montre facilement par récurrence sur k que tous les langages $L^k_{q,q'}$ et donc aussi $L(\mathcal{A})$ sont rationnels.

Algorithme (Méthode par élimination)**.**

Cet algorithme manipule des automates dont les transitions sont étiquetées par des expressions rationnelles. La première étape consiste à normaliser l'automate en utilisant la proposition 1.62. La seconde étape remplace pour chaque paire d'états (p, q), toutes les transitions $p \xrightarrow{a} q$ par une seule transition étiquetée par l'expression rationnelle $\sum_{(p,a,q)\in E} a$. À chaque étape suivante, un des états autre que l'état initial et l'état final est supprimé. L'algorithme s'arrête lorsqu'il ne reste plus que l'état initial et l'état final ainsi qu'une seule transition entre les deux. Le résultat est alors l'expression rationnelle qui étiquette cette transition.

À chaque suppression d'un état s on ajoute, pour chaque paire (p, q) d'états restants, à l'expression portée par la transition de p à q l'expression xy^*z où x, y et z sont les expressions rationnelles portées respectivement par les transitions de p à s, de s à s et de s à q.

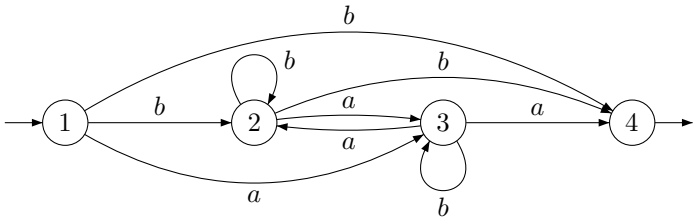


FIG. 1.14 – Méthode par élimination : normalisation

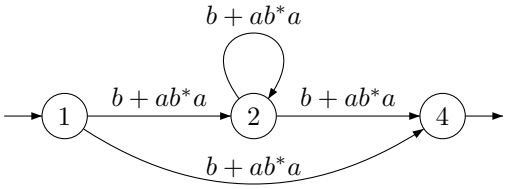


FIG. 1.15 – Méthode par élimination : suppression de 3

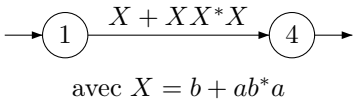


FIG. 1.16 – Méthode par élimination : suppression de 2

Exemple 1.63. Si on applique la méthode par élimination à l'automate de la figure 1.7, on obtient successivement les automates des figures 1.14, 1.15 et 1.16.

Lemme 1.64 (Lemme d'Arden)**.** *Soient K et L deux langages et soit l'équation $X = KX + L$ en le langage X.*
- *si $\varepsilon \notin K$, l'unique solution de l'équation est $X = K^*L$.*
- *si $\varepsilon \in K$, les solutions sont de la forme $X = K^*(L + Y)$ où $Y \subseteq A^*$.*

Preuve. Soit X une solution de l'équation $X = KX + L$. Si $Y \subset X$, on montre par récurrence sur n que $K^nY \subset X$ et donc $K^*Y \subset X$. En considérant $Y = L$, on constate que $K^*L \subset X$. Réciproquement, l'égalité $K = KK^*+\varepsilon$ implique que K^*L est une solution de l'équation. Ceci démontre que K^*L est la plus petite (pour l'inclusion) solution de l'équation. Ce résultat est en fait un cas particulier de la proposition 2.25 concernant les solutions d'un système polynomial.
- Si $\varepsilon \notin K$, il reste à montrer que K^*L est en fait l'unique solution de l'équation. Montrons par l'absurde que $X = K^*L$ en supposant que $X \setminus K^*L$ est non vide.
  Soit w un mot de $X \setminus K^*L$ de longueur minimale. Comme $w \notin L$, ce mot s'écrit $w = kx$ avec $k \in K$ et $x \in X$. Comme $k \neq \varepsilon$, le mot x est de longueur strictement inférieure à w. La minimalité de $|w|$ implique que x appartient à K^*L. Ceci aboutit à la contradiction que $w \in K^*L$.
- Si $\varepsilon \in K$ la solution X s'écrit $X = K^*L + Y$. Comme $Y \subset X$, on a aussi $K^*Y \subset X$ et donc l'égalité $X = K^*(L + Y)$. Comme $KK^* = K^*$, tout langage de la forme $K^*(L + Y)$ est solution de l'équation.

□

Algorithme (Méthode de Gauß)**.**

Pour chaque $q \in Q$, soit X_q l'ensemble des mots qui étiquettent un chemin de q à un état final. Alors, pour trouver $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{i\in I} X_i$, on résout, grâce au lemme d'Arden, le système :

$$X_p = \begin{cases} \sum_{(p,a,q)\in E} aX_q + \varepsilon & \text{si } p \text{ est final} \\ \sum_{(p,a,q)\in E} aX_q & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } p \in Q.$$

Exemple 1.65. Pour l'automate de la figure 1.7, on obtient le système

$$\begin{aligned} X_1 &= bX_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 &= aX_1 + bX_2 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme d'Arden sur la seconde équation, on obtient $X_2 = b^*aX_1$. En substituant dans la première équation, on obtient $X_1 = (ab^*a+b)X_1+\varepsilon$ qui donne finalement $L(\mathcal{A}) = X_1 = (ab^*a + b)^*$ grâce au lemme d'Arden.

Exercice 1.66. On appelle automate avec ε-transitions un automate dont les étiquettes des transitions sont soit une lettre soit le mot vide. Montrer que tout automate avec ε-transition est équivalent à un automate sans ε-transition.

Solution. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate avec ε-transitons. On définit une relation sur Q notée $\xrightarrow{\varepsilon*}$ de la façon suivante. Pour deux états p et q, on écrit $p \xrightarrow{\varepsilon*} q$ s'il existe un chemin, éventuellement vide, de p à q uniquement constitué de transitions étiquetées pas ε. La relation $\xrightarrow{a*}$ est donc la clôture réflexive et

transitive de la relation $\xrightarrow{\varepsilon}$. On définit alors l'automate $\mathcal{A}' = (Q, A, E', I, F)$ où l'ensemble E' des transitions est donné par

$$E' = \{p \xrightarrow{a} q \mid \exists p', q' \in Q \;\; p \xrightarrow{\varepsilon *} p', p' \xrightarrow{a} q' \text{ et } q' \xrightarrow{\varepsilon *} q\}.$$

Il est immédiat de vérifier que l'automate $\mathcal{A}'$ est sans ε-transition et qu'il est équivalent à $\mathcal{A}$.

1.6 Automates déterministes

La notion de machine ou de modèle de calcul déterministe est fondamentale et elle apparaît tout au long de ce cours. De manière intuitive, une machine est déterministe si pour chaque entrée, un seul calcul est possible. Pour certains modèles comme les automates ou les machines de Turing, toute machine est équivalente à une machine déterministe. Par contre, le passage à une machine déterministe a un prix qui est le nombre d'états pour les automates (cf. exemples 1.72 et 1.73) ou le temps de calcul pour les machines de Turing. Pour d'autres modèles comme les automates à pile, les machines déterministes sont moins puissantes.

Une propriété essentielle des automates finis est que tout automate est équivalent à un automate déterministe qui accepte le même langage. Cette propriété a un intérêt aussi bien théorique que pratique. D'un point de vue théorique, elle permet de montrer la clôture par complémentation des langages rationnels. D'un point de vue pratique, les automates déterministes sont plus faciles à implémenter. La commande Unix `grep` utilise par exemple un automate déterministe pour rechercher une occurrence d'une expression rationnelle dans un texte. En fait, la commande `grep` calcule d'abord un automate non déterministe puis le déterminise de manière paresseuse. Elle ne calcule que les états vraiment parcourus par la lecture du texte dans l'automate.

De manière intuitive, un automate est déterministe si une seule transition est possible à chaque instant.

Définition 1.67 (Automate déterministe)**.** Un automate $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ est *déterministe* si :
- il a un unique état initial : $|I| = 1$;
- si (p, a, q) et $(p, a, q') \in E$ alors $q = q'$.

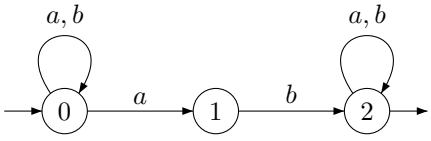


Fig. 1.17 – Automate non déterministe

Exemple 1.68. L'automate de la figure 1.7 (p. 31) est déterministe. Par contre, l'automate de la figure 1.17 n'est pas déterministe. Il accepte le langage A^*abA^* des mots qui contiennent au moins un facteur ab.

Proposition 1.69. *Tout automate est équivalent à (accepte le même langage que) un automate déterministe.*

Preuve. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate donné. On construit un automate déterministe équivalent $\hat{\mathcal{A}}$ dont les états sont les parties de Q.

$$\hat{\mathcal{A}} = \big(\mathfrak{P}(Q), A, \hat{E}, \{I\}, \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \varnothing\}\big)$$
$$\text{avec } \hat{E} = \big\{P \xrightarrow{a} P' \mid P' = \{q \mid \exists p \in P \;\; p \xrightarrow{a} q\}\big\}.$$

Ainsi, $\hat{\mathcal{A}}$ est déterministe et accepte le même langage que $\mathcal{A}$ comme le montre le lemme suivant. □

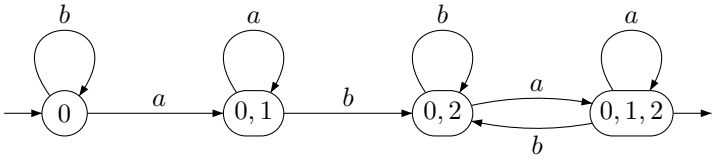


FIG. 1.18 – Déterminisation de l'automate de la figure 1.17

Exemple 1.70. En appliquant la construction utilisée dans la preuve de la proposition 1.69 à l'automate de la figure 1.17, on obtient l'automate de la figure 1.18

Le fait que l'automate $\hat{\mathcal{A}}$ soit équivalent à $\mathcal{A}$ découle directement du lemme suivant.

Lemme 1.71. *Pour tout $w \in A^*$, il existe un chemin de I à P dans $\hat{\mathcal{A}}$ étiqueté par w si et seulement si $P = \{q \mid \exists i \in I \;\; i \xrightarrow{w} q$ dans $\mathcal{A}\}$*

La preuve du lemme se fait par récurrence sur la longueur de w.

Un des problème de la construction par sous-ensembles utilisée dans la preuve de la proposition 1.69 est l'explosion du nombre d'états. Si l'automate $\mathcal{A}$ a n états, l'automate déterministe $\hat{\mathcal{A}}$ équivalent peut avoir jusqu'à 2^n états comme le montrent les exemples suivants.

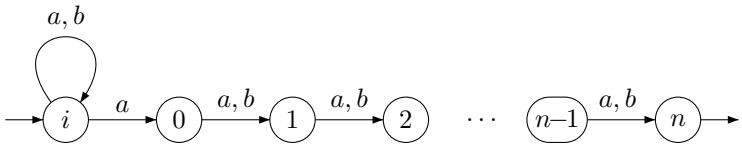


FIG. 1.19 – Automate non déterministe pour A^*aA^n

Exemple 1.72. Soient $A = \{a, b\}$ et n un entier. Le langage A^*aA^n est accepté par un automate non déterministe ayant $n + 2$ états. Par contre tout automate déterministe acceptant ce langage a au moins 2^n états.

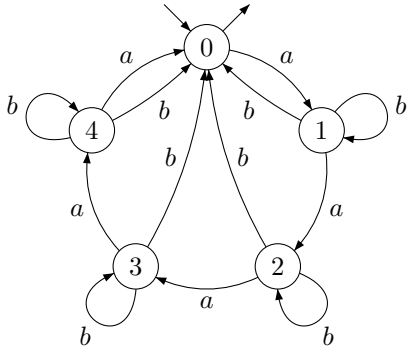


FIG. 1.20 – Automate $\mathcal{A}_5$ de l'exemple 1.73

Exemple 1.73. Soient $A = \{a, b\}$, n un entier et $Q_n = \{0, \ldots, n-1\}$. On considère l'automate $\mathcal{A}_n = (Q_n, A, E_n, \{0\}, \{0\})$ où l'ensemble des transitions est donné par

$$E_n = \{i \xrightarrow{a} i+1 \mid 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{n-1 \xrightarrow{a} 0\}$$
$$\cup \{i \xrightarrow{b} i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{i \xrightarrow{b} 0 \mid 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Tout automate déterministe et complet qui est équivalent à $\mathcal{A}_n$ possède au moins 2^n états.

Définition 1.74 (Automate complet)**.** Un automate est *complet* si pour tout paire (p, a) de $Q \times A$, il existe un état q tel que $p \xrightarrow{a} q$ soit une transition.

Notation 1.75. Dans un automate déterministe complet $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$, on notera pour tout état $q \in Q$ et toute lettre $a \in A$, létat $q \cdot a$ l'unique état p tel que $q \xrightarrow{a} p$ soit une transition de $\mathcal{A}$.

Proposition 1.76. *Tout automate (déterministe) est équivalent à un automate (déterministe) complet.*

Preuve. On introduit un nouvel état $p \notin Q$ appelé *puits* et on pose $Q' = Q \cup \{p\}$. On note $R = \{(q, a) \mid q \in Q' \text{ et } \forall q' \quad q \xrightarrow{a} q' \notin E\}$ l'ensemble des transitions manquantes. L'automate complété est l'automate $\mathcal{A}'$ défini par $\mathcal{A}' = (Q', A, E', I, F)$, avec $E' = E \cup \{q \xrightarrow{a} p \mid (q, a) \in R\}$. Notons que si $\mathcal{A}$ est déterministe, l'automate complété $\mathcal{A}'$ l'est également. □

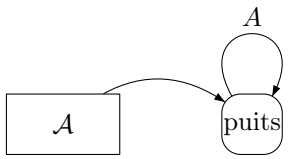


FIG. 1.21 – Complétion par ajout d'un état *puits*

Corollaire 1.77 (Clôture par complémentation)**.** *Si $L \subseteq A^*$ est rationnel, alors $A^* \setminus L$ est rationnel.*

Preuve. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate déterministe et complet acceptant le langage L. L'automate $\mathcal{A}' = (Q, A, E, I, Q \setminus F)$ accepte le langage $L(\mathcal{A}') = A^* \setminus L$. □

1.7 Automate minimal

Dans cette partie, on montre que tout langage rationnel est accepté par un automate minimal qui est le quotient de tout automate déterministe acceptant ce langage. On étudie ensuite quelques algorithmes permettant de calculer cet automate minimal. Une très bonne référence pour cette partie est [BBC93].

1.7.1 Quotients

Les quotients à gauche constituent un outil indispensable à l'étude des automates déterministes acceptant un langage L puisque le nombre de quotients donne un minorant du nombre d'états. Ils fournissent également une caractérisation très utile des langages rationnels (Proposition 1.82). Celle-ci est, par exemple, utilisée de manière cruciale dans la preuve du théorème 1.107 (p. 50).

Définition 1.78 (Quotients à gauche)**.** Soit $L \subseteq A^*$ un langage. Le *quotient à gauche* de L par un mot $u \in A^*$ est le langage $u^{-1}L = \{v \mid uv \in L\}$. Le *quotient à gauche* de L par un langage $K \subseteq A^*$ est $K^{-1}L = \bigcup_{k \in K} k^{-1}L$.

De manière symétrique, on peut aussi définir les *quotients à droite* d'un langage. L'intérêt des quotients à gauche réside dans leurs liens avec les automates déterministes.

Exemple 1.79. Soit $L = (ab^*a + b)^*$ le langage des mots ayant un nombre pair d'occurrences de a. On a les égalités $a^{-1}L = b^*aL$ et $b^{-1}L = L$ où b^*aL est le langage des mots ayant un nombre impair d'occurrences de a.

Les formules suivantes permettent de calculer explicitement un quotient $a^{-1}L$ puis un quotient $w^{-1}L$ en procédant par récurrence sur la longueur de w. On parvient ainsi à calculer tous les quotients à gauche d'un langage.

Proposition 1.80. *Pour toute lettre a, tous mots u, v et w et tous langages K et L, on a les relations suivantes qui permettent de calculer les quotients à gauche.*

- $w^{-1}(K + L) = w^{-1}K + w^{-1}L$
- $a^{-1}(KL) = (a^{-1}K)L + \varepsilon(K)a^{-1}L$
- $w^{-1}(KL) = (w^{-1}K)L + \sum_{uv=w} \varepsilon(u^{-1}K)v^{-1}L$ *en notant* $\varepsilon(L) = \varepsilon \cap L$.
- $a^{-1}(L^*) = (a^{-1}L)L^*$
- $w^{-1}L^* = \sum_{uv=w} \varepsilon(u^{-1}L^*)(v^{-1}L)L^*$
- $(uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L)$.

Le lemme suivant établit le lien fondamental entre les quotients à gauche d'un langage et les automates déterministes acceptant ce même langage. Des quotients à droite auraient pu être définis de manière symétrique. Nous avons privilégié les quotients à gauche parce qu'ils jsutement sont adaptés aux automates déterministes.

Lemme 1.81. *Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ un automate déterministe acceptant un langage L. Pour tout chemin $i \xrightarrow{u} q$, on a $u^{-1}L = \{v \mid q \xrightarrow{v} f$ avec $f \in F\}$.*

La preuve du lemme est triviale. Le lemme a pour corollaire immédiat que le nombre de quotients à gauche d'un langage est inférieur au nombre d'états de tout automate déterministe et complet acceptant ce langage. En particulier, le nombre de quotients à gauche d'un langage rationnel est fini. Cette propriété est en fait caractéristique des langages rationnels.

Proposition 1.82. *Un langage L est rationnel si et seulement si il a un nombre fini de quotients à gauche.*

Pour la preuve de la proposition, on introduit la définition suivante.

Définition 1.83. Soit L un langage rationnel. L'*automate minimal* de L est automate $\mathcal{A}_L = (Q, A, E, I, F)$ où

$$Q = \{u^{-1}L \mid u \in A^*\}, \qquad I = \{L\}, \qquad F = \{u^{-1}L \mid u \in L\}$$
$$E = \{u^{-1}L \xrightarrow{a} (ua)^{-1}L \mid u \in A^* \text{ et } a \in A\}.$$

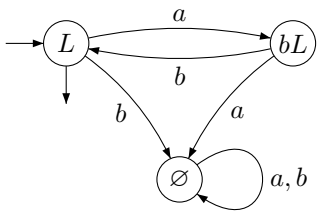


FIG. 1.22 – Automate minimal de $L = (ab)^*$

Exemple 1.84. Les différents quotients à gauche du langage $L = (ab)^*$ sont les langages $a^{-1}L = bL$, $b^{-1}L = \varnothing$, $a^{-1}(bL) = \varnothing$ et $b^{-1}(bL) = L$. En appliquant la construction donnée dans la preuve de la proposition précédente, on obtient l'automate minimal de L de la figure 1.22.

Le nombre d'états de l'automate minimal est bien sûr minimal puisqu'il est égal au nombre de quotients à gauche. La proposition découle alors directement du lemme suivant.

Lemme 1.85. *L'automate minimal $\mathcal{A}_L$ accepte le langage L.*

Preuve. On montre facilement par récurrence sur la longueur que pour tout mot u, on a un chemin $L \xrightarrow{u} u^{-1}L$ dans l'automate $\mathcal{A}_L$. La définition des états finaux donne immédiatement le résultat. □

1.7.2 Congruence de Nerode

On montre dans cette partie que l'automate minimal a en outre la propriété d'être le quotient de tout autre automate déterministe acceptant le même langage. Il peut toujours être obtenu en fusionnant des états.

Pour toute paire $(p, a) \in Q \times A$ d'un automate déterministe, on note, s'il existe, $q \cdot a$ l'unique état q tel que $p \xrightarrow{a} q$ soit une transition. Si de plus l'automate est complet, $q \cdot a$ est toujours défini. Cette notation peut être étendue à tous les mots en définissant par récurrence $p \cdot (ua) = (p \cdot u) \cdot a$. L'état $q \cdot w$ est alors l'unique état q tel que $p \xrightarrow{w} q$ soit un chemin. On a alors défini une action à droite du monoïde A^* sur Q puisque $q \cdot uv = (q \cdot u) \cdot v$ pour tous mots u et v.

Définition 1.86 (Congruence)**.** Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ un automate déterministe et complet. Une *congruence* sur $\mathcal{A}$ est une relation d'équivalence $\sim$ sur Q qui vérifie pour tous $q, q' \in Q$ et $a \in A$:

$$q \sim q' \implies (q \in F \iff q' \in F),$$
$$q \sim q' \implies q \cdot a \sim q' \cdot a.$$

La première propriété signifie que chaque classe d'une congruence ne contient que des états finaux ou que des états qui ne sont pas finaux. La seconde propriété est qu'une congruence est compatible avec les transitions de l'automate. Rien dans cette définition ne concerne l'état initial.

Si $\sim$ est une congruence sur un automate $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$, l'automate quotient $\mathcal{A}/\sim$ est l'automate $(Q/\sim, A, E', \{[i]\}, \{[f] \mid f \in F\})$ où l'ensemble E' des transitions est donné par

$$E' = \{[q] \xrightarrow{a} [q \cdot a] \mid q \in Q \text{ et } a \in A\}.$$

Cet automate est encore déterministe car la classe $[q \cdot a]$ ne dépend que de la classe de q. Le lemme suivant montre qu'un automate quotient accepte le même langage.

Lemme 1.87. *Soit $\sim$ une congruence sur un automate $\mathcal{A}$, alors l'automate quotient $\mathcal{A}/\sim$ accepte le langage $L(\mathcal{A})$.*

Preuve. Soit un chemin

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$$

d'étiquette $w = a_1 \dots a_n$ dans l'automate $\mathcal{A}$. On en déduit que

$$[q_0] \xrightarrow{a_1} [q_1] \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} [q_n]$$

est un chemin étiqueté par w dans $\mathcal{A}/\sim$. Si de plus q_0 est initial et q_n est final dans $\mathcal{A}$, alors $[q_0]$ est initial et $[q_n]$ est final dans $\mathcal{A}/\sim$. Ceci prouve l'inclusion $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}/\sim)$.

Soit maintenant un chemin

$$[q_0] \xrightarrow{a_1} [q_1] \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} [q_n]$$

d'étiquette $w = a_1 \dots a_n$ dans l'automate $\mathcal{A}/\sim$. On montre par récurrence sur n que pour tout état q'_0 de la classe $[q_0]$, il existe un chemin

$$q'_0 \xrightarrow{a_1} q'_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q'_n$$

d'étiquette w tel que $q'_i \sim q_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Si le chemin dans $\mathcal{A}/\sim$ est acceptant, on peut choisir $q'_0 = i$ et l'état q'_n est alors final. Ceci montre l'inclusion $L(\mathcal{A}/\sim) \subseteq L(\mathcal{A})$. □

On introduit maintenant la congruence de Nerode qui permet le calcul de l'automate minimal d'un langage à partir de n'importe quel automate déterministe le reconnaissant.

Définition 1.88 (Congruence de Nerode)**.** Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ un automate déterministe et complet. La congruence de Nerode est définie pour tous états q et q' par

$$q \sim q' \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall w \in A^* \ \ (q \cdot w \in F \iff q' \cdot w \in F).$$

La relation ainsi définie est effectivement une congruence d'automates. Elle sature l'ensemble des états finaux. L'équivalence $q \in F \iff q' \in F$ obtenue en prenant $w = \varepsilon$ dans la définition montre que deux états équivalents sont tous les deux finaux ou tous les deux non finaux. De plus, l'équivalence $q \cdot aw \in F \iff q' \cdot aw \in F$ implique que si q et q' sont équivalents, alors $q \cdot a$ et $q' \cdot a$ sont encore équivalents.

La congruence de Nerode est la congruence la plus grossière qui sépare les états finaux des états non finaux. En effet, si $q \cdot w$ est final alors que $q' \cdot w$ ne l'est pas, les états q et q' ne peuvent pas être équivalent car sinon les états $q \cdot w$ et $q' \cdot w$ le sont aussi.

La proposition suivante donne comment obtenir l'automate minimal à partir de n'importe quel automate déterministe.

Proposition 1.89. *Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe et complet acceptant un langage L. L'automate minimal $\mathcal{A}_L$ est égal à $\mathcal{A}/\sim$ où $\sim$ est la congruence de Nerode de $\mathcal{A}$.*

Preuve. Pour un état q, on note L_q le langage $\{w \mid q \cdot w \in F\}$. Deux états q et q' vérifient $q \sim q'$ si et seulement si $L_q = L_{q'}$. D'après le lemme 1.81, chaque langage L_q est de la forme $u^{-1}L$ pour un mot u qui étiquette un chemin de l'état initial à q. On peut donc identifier les classes de la congruence de Nerode avec les quotients à gauche de L. □

1.7.3 Calcul de l'automate minimal

D'après la proposition précédente, calculer l'automate minimal revient à calculer la congruence de Nerode d'un automate déterministe. Ce calcul peut être fait de manière très efficace. Une première méthode naïve donne un temps de calcul en $O(n^2)$ où n est le nombre d'états de l'automate. Une seconde méthode basée sur le principe *diviser pour régner* permet d'obtenir un temps de calcul en $O(n \log n)$. Le résultat de cette méthode est étonnant car le principe *diviser pour régner* n'est pas évident à appliquer à la minimisation d'automates.

Méthode itérative

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ un automate déterministe. On définit par récurrence une suite $(\sim_i)_{i \geq 0}$ de relations d'équivalence sur Q par

$$\begin{aligned} q \sim_0 q' &\iff (q \in F \Leftrightarrow q' \in F) \\ q \sim_{i+1} q' &\iff q \sim_i q' \text{ et } \forall a \in A \ \ q \cdot a \sim_i q' \cdot a \end{aligned}$$

Proposition 1.90. *Il existe $k \leq |Q|$ tel que $\sim_k = \sim_{k+1}$. De plus, $\sim_k = \sim_{k+n}$ pour tout $n \geq 0$ et $\sim_k$ est la congruence de Nerode.*

Preuve. Les deux premières affirmations sont évidentes et on conclut par récurrence. Si $q \not\sim_k q'$ alors (comme $\sim_k = \sim_{k+1}$), $q \cdot a \not\sim_k q' \cdot a$, et donc $L_q \neq L_{q'}$ d'où $q \not\sim_N q'$. Cela montre que $\sim_k$ est moins fine que la congruence de Nerode.

Mais, si $q \sim_k q'$, alors pour tout $u = a_1 \cdots a_n$ on a :

$$q \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n \in F \iff q' \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q'_n \in F$$

Ce qui implique que $q \sim_N q'$. □

Algorithme de Hopcroft

L'algorithme de Hopcroft calcule la congruence de Nerode d'un automate déterministe en temps $O(|A| n \log n)$ où n est le nombre d'états. Comme beaucoup d'algorithmes en temps $n \log n$, il utilise le principe de *diviser pour régner*. Son utilisation est ici particulièrement astucieuse. La mise en œuvre de ce principe pour le calcul de la congruence de Nerode n'est pas évidente. Ce tour de force conduit à un algorithme donc le fonctionnement est relativement subtil. L'analyse de la complexité est également difficile.

Dans cette partie, on identifie une relation d'équivalence sur un ensemble Q avec la partition de Q en classes qu'elle induit.

Définition 1.91 (Stabilité et coupure)**.** Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate complet déterministe et émondé, et soient $a \in A$ et $B, C \subseteq Q$. La partie B est *stable* pour (C, a) si $B \cdot a \subseteq C$ ou si $B \cdot a \cap C = \varnothing$ avec $B \cdot a = \{q \cdot a \mid q \in B\}$. Sinon, la paire (C, a) *coupe* B en les deux parties B_1 et B_2 définies par

$$B_1 = \{q \in B \mid q \cdot a \in C\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{q \in B \mid q \cdot a \notin C\}$$

Par extension, une partition de Q est dite *stable* pour (C, a) si chacune de ses parts est stable pour (C, a).

La notion de stabilité qui vient d'être introduite permet de reformuler le fait d'être une congruence pour une partition. Une partition $\{P_1, \ldots, P_k\}$ de Q compatible avec F est une congruence si et seulement si elle est stable pour chacune des paire (P_i, a) où P_i parcourt les parts et a les lettres de l'alphabet.

La preuve du lemme suivant est immédiate. Par contre, le résultat de celui-ci est le principe même sur lequel est basé l'algorithme de Hopcroft.

Lemme 1.92. *Si $B \subseteq Q$ et $C = C_1 \uplus C_2$ où $\uplus$ représente l'union disjointe, on a alors :*

1. *Si B est stable pour (C_1, a) et (C_2, a) alors B est stable pour (C, a).*
2. *Si B est stable pour (C_1, a) et (C, a) alors B est stable pour (C_2, a).*

Cet algorithme fonctionne globalement de la façon suivante. Il maintient une partition de l'ensemble Q des états dans la variable $\mathcal{P}$ et un ensemble $\mathcal{S}$ de paires (C, a) où C est une part de la partition et a une lettre. Les paires (C, a) de $\mathcal{S}$ sont celles pour lesquelles il reste à vérifier que les parts de partition sont stables. L'algorithme s'arrête donc dès que cet ensemble $\mathcal{S}$ est vide. Tans que cet ensemble n'est pas vide, une paire (C, a) de cet ensemble est traitée. Le traitement consiste à remplacer chaque part B coupée par (C, a) en B_1 et B_2 par les nouvelles parts B_1 et B_2. Ce remplacement doit s'effectuer d'abord dans la partition $\mathcal{P}$ puis dans l'ensemble $\mathcal{S}$. C'est ce second remplacement qui recèle

toute l'ingéniosité de cet algorithme. Si une paire (B, b) est présente dans $\mathcal{S}$, celle-ci est remplacée par les deux paires (B_1, b) et (B_2, b). On applique alors le point 1 du lemme précèdent. Si la paire (B, b) est absente de l'ensemble $\mathcal{S}$, seule une des deux paires (B_1, b) ou (B_2, b) est ajoutée à $\mathcal{S}$. On applique alors le point 2 du lemme précèdent. Le principe *diviser pour régner* est mis en œuvre en ajoutant à $\mathcal{S}$ la paire dont la première composante est de plus petit cardinal. Pour deux parties B et B' de Q, on note $\min(B, B')$ celle des deux ayant le plus petit cardinal ou n'importe laquelle des deux si elles ont même cardinal.

Input Automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, E, E, I, F)$
1: $\mathcal{P} \leftarrow (F, Q \setminus F)$
2: $\mathcal{S} \leftarrow \{(\min(F, Q \setminus F), a) \mid a \in A\}$
3: **while** $\mathcal{S} \neq \varnothing$ **do**
4: $(C, a) \leftarrow$ un élément de $\mathcal{S}$
4: // Boucle en complexité proportionnelle à $|C||a|$
5: $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \setminus \{(C, a)\}$
6: **for** chaque B coupé par (C, a) en B_1, B_2 **do**
7: remplacer B par B_1, B_2 dans $\mathcal{P}$
8: **for all** $b \in A$ **do**
9: **if** $(B, b) \in \mathcal{S}$ **then**
10: remplacer (B, b) par (B_1, b) et (B_2, b) dans $\mathcal{S}$
11: **else**
12: ajouter $(\min(B_1, B_2), b)$ à $\mathcal{S}$

Algorithme 1: Algorithme de Hopcroft

Nous allons maintenant analyser cet algorithme. Nous allons en particulier prouver qu'il termine toujours et qu'il calcule bien la congruence de Nerode. L'implémentation de cet algorithme est particulièrement délicate. Pour obtenir la complexité annoncée de $n \log n$, il faut utiliser les structures de données appropriées. Une description complète de l'implémentation peut être trouvée en [BBC93].

Nous commençons par prouver la terminaison. À chaque itération de la boucle principale `while`, soit la partition $\mathcal{P}$ est raffinée parce qu'au moins une part B est coupée, soit le cardinal de $\mathcal{S}$ a diminué d'une unité. Comme ces deux événements ne peuvent survenir qu'un nombre fini de fois, l'algorithme s'arrête nécessairement car $\mathcal{S}$ devient vide.

Nous montrons maintenant que la partition $\mathcal{P}$ est égale à la congruence de Nerode lorsque l'algorithme se termine. Il est facile de voir que la congruence de Nerode raffine toujours la partition $\mathcal{P}$. Chaque coupure réalisée par l'algorithme est en effet nécessaire. Il reste donc à montrer qu'aucune coupure n'a été oubliée, c'est-à-dire que la partition $\mathcal{P}$ est stable pour chacune des paires (C, a) où C parcourt toutes les parts de $\mathcal{P}$. Dans ce but, bous allons montrer l'invariant suivant.

Lemme 1.93. *Pour toute lettre $a \in A$ et toute part $P \in \mathcal{P}$, P est combinaison booléenne de :*
- *parties C telles que $\mathcal{P}$ est stable pour (C, a) ;*
- *parties C telles que $(C, a) \in \mathcal{S}$.*

La preuve se fait facilement par induction sur le nombre d'itérations de la boucle principale de l'algorithme. Lorsque l'ensemble $\mathcal{S}$ est vide, la partie P

est combinaison booléenne de parties C telles que $\mathcal{P}$ est stable pour (C, a). Il découle directement du lemme 1.92 que la partition $\mathcal{P}$ est stable pour (P, a).

Il reste finalement à analyser la complexité de l'algorithme. Une implémentation rigoureuse garantit que le déroulement du corps de la boucle principale prend un temps au plus proportionnel à la taille de la partie C. La complexité totale est donc bornée par la somme des tailles de ces parties C. Pour calculer cette somme, nous allons utiliser la relation suivante qui est vraie pour chaque lettre a fixée.

$$\sum_{(C,a) \text{ traitée}} |C| = \sum_{q \in Q} |\{(C, a) \mid (C, a) \text{ traitée et } q \in Q\}|$$

Pour obtenir la complexité $O(|A||Q| \log |Q|)$, il suffit de montrer que le cardinal de chaque ensemble $\{(C, a) \mid (C, a)$ traitée et $q \in Q\}$ est borné par $\log_2 |Q|$ pour chaque lettre a et chaque état q.

Soit un état q et une lettre a. Supposons qu'à une itération donnée de la boucle principale, une paire (C, a) soit traitée et que la part C contienne q. Soit (C', a) la paire suivante traitée telle que C' contienne q. Comme les parties C et C' sont des parts de la partition $\mathcal{P}$ et que cette dernière ne peut être que raffinée, la partie C' est contenue dans C et C' provient d'une coupure de C. Comme l'algorithme ajoute à $\mathcal{S}$ la paire dont la première composante est de cardinal minimal, on a l'inégalité $|C'| \leq |C|/2$. Ceci prouve que le nombre de paires (C, a) traitées où C contienne q est au plus $\log_2 |Q|$ et termine l'analyse de la complexité de l'algorithme.

Les méthodes pour minimiser s'appliquent lorsque l'automate de départ est déterministe. Si ce n'est pas le cas, il peut toujours être d'abord déterminisé grâce à la proposition 1.69 puis ensuite minimisé. L'exercice suivant donne une autre méthode pour calculer l'automate minimal en utilisant uniquement des déterminisations.

Exercice 1.94. Pour un automate $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$, on note $d(\mathcal{A})$ la partie accessible de l'automate $\hat{\mathcal{A}}$ construit dans la preuve de la proposition 1.69. On note aussi $t(\mathcal{A})$ l'automate (Q, A, E^t, F, I) où l'ensemble E^t des transitions est donné par

$$E^t = \{p \xrightarrow{a} q \mid q \xrightarrow{a} p \in E\}.$$

Soit $\mathcal{A}$ acceptant un langage L. Momtrer que l'automate $d(t(d(t(\mathcal{A}))))$ est l'automate minimal $\mathcal{A}_L$ de L.

Solution. Soit $\mathcal{A}'$ l'automate $d(t(d(t(\mathcal{A}))))$. Par construction, cet automate est déterministe. On vérifie en outre qu'il accepte le langage L. Il reste donc à vérifier que cet automate est minimal.

Soient P et P' deux états distincts de $\mathcal{A}'$. Par définition, P et P' sont deux ensembles états de l'automate $d(t(\mathcal{A}))$. Soit R un état de $d(t(\mathcal{A}))$ tel que $R \in P$ et $R \notin P'$. Par définition de $d(t(\mathcal{A}))$, R est un ensemble d'états de $\mathcal{A}$. Grâce au lemme 1.71, il existe un mot w tel que $R = \{q \mid q \xrightarrow{w} f$ avec $f \in F\}$. On en déduit que dans $\mathcal{A}'$, il existe un chemin de P à un état final étiqueté par w alors que ce n'est pas le cas pour P'. Ceci montre que P et P' ne sont pas équivalents pour la congruence de Nerode.

1.8 Propriétés de clôture

La classe des langages rationnels est très robuste. Elle est close pour d'innombrables opérations. Ceci est une propriété importante de ces langages et justifie l'intérêt qui leur est porté. Cette partie donne les principales propriétés de clôture mais la liste est loin d'être exhaustive.

1.8.1 Opérations booléennes

Il a déjà été vu que le complémentaire d'un langage rationnel est encore rationnel (cf. corollaire 1.77). Comme la classe des langages rationnels est par définition close par union, elle est aussi close par intersection.

1.8.2 Morphisme et morphisme inverse

La classe des langages rationnels est close par morphisme et par morphisme inverse.

Proposition 1.95. *Soit μ un morphisme de A^* dans B^*. Si $L \subseteq A^*$ est rationnel, alors $\mu(L)$ est rationnel. Si $K \subseteq B^*$ est rationnel, alors $\mu^{-1}(K)$ est aussi rationnel.*

Preuve. Il est possible d'obtenir une expression rationnelle pour $\mu(L)$ à partir d'une expression rationnelle pour L en remplaçant chaque occurrence d'une lettre a par $\mu(a)$.

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate acceptant le langage K. On contruit un automate $\mathcal{A}'$ pour $\mu^{-1}(K)$ ayant même ensemble d'états. Il y a une transition $p \xrightarrow{a} q$ dans $\mathcal{A}'$ s'il y un chemin $p \xrightarrow{\mu(a)} q$ dans $\mathcal{A}$. En gardant les mêmes états initiaux et finaux, l'automate $\mathcal{A}$ accepte le langage $\mu^{-1}(K)$. On peut remarquer que si $\mathcal{A}$ est déterministe alors $\mathcal{A}'$ est aussi déterministe. □

Exercice 1.96. Soient K et L deux langages sur un alphabet A. Le *mélange* $K \amalg L$ des langages K et L est le langage sur A^* défini par la formule suivante.

$$K \amalg L = \{u_0 v_0 u_1 \cdots u_n v_n \mid u_i, v_i \in A^*, u_0 \cdots u_n \in K \text{ et } v_0 \cdots v_n \in L\}.$$

1. Montrer que Si les langages L et L' sont rationnels, alors le langage $L \amalg L'$ est encore rationnel.
2. Montrer en utlisant le théorème de Higman qu'un langage de la forme $L \amalg A^*$ est toujours rationnel même si L n'est pas rationnel.

Solution. Soient $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ et $\mathcal{A}' = (Q', A, E', I', F')$ deux automates acceptant respectivement les langages K et L. On construit l'automate dont l'ensemble d'états est $Q \times Q'$, les ensembles d'états initiaux et finaux sont $I \times I'$ et $F \times F'$ et dont l'ensemble des transitions est

$$\{(p, p') \xrightarrow{a} (q, p') \mid p \xrightarrow{a} q \in E\} \cup \{(p, p') \xrightarrow{a} (p, q') \mid p' \xrightarrow{a} q' \in E'\}.$$

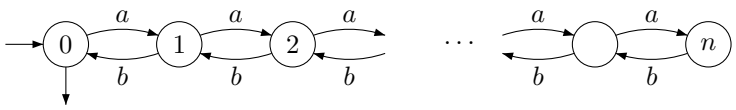
On vérifie sans difficulté que cet automate accepte $K \amalg L$.

Le langage $L \amalg A^*$ est un idéal pour l'ordre sous-mot. D'après le théorème de Higman, cet ideal est de base fini. Il existe donc un ensemble fini F de mots tel que $L \amalg A^* = \bigcup_{w \in F} w \amalg A^*$. D'après le résultat précédent, chaque langage $w \amalg A^*$ est rationnel et L est donc aussi rationnel.

Exercice 1.97. 1. Soient les langages L_n définis par récurrence par $L_0 = \varepsilon$ et $L_{n+1} = L_n \sqcup\!\sqcup (ab)^*$. Montrer que L_n est l'ensemble des mots w tels que $|w|_a = |w|_b$ et $|u|_b \leq |u|_a \leq |u|_b + n$ pour tout préfixe u de w.

2. Soit une suite croissante $n_1, \ldots, n_k$ d'entiers telle que $n_1 = 1$ et pour tout $1 \leq i < n$, on a $n_i \leq n_{i+1} \leq n_0 + \cdots + n_i + 1$. Montrer que le langage $(a^{n_1}b^{n_1})^* \sqcup\!\sqcup (a^{n_2}b^{n_2})^* \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup (a^{n_k}b^{n_k})^*$ est encore égal à l'ensemble des mots w tels que $|w|_a = |w|_b$ et $|u|_b \leq |u|_a \leq |u|_b + n_1 + \cdots + n_k$ pour tout préfixe u de w. On peut remarquer qu'une suite $n_1, \ldots, n_k$ d'entiers vérifie les conditions ci-dessus si et seulement si pour tout entier s tel que $1 \leq s \leq n_1 + \cdots + n_k$, il existe une suite d'indices $i_1 < \cdots < i_r$ telle que $s = n_{i_1} + \cdots + n_{i_r}$.

Solution. Soit un mot w appartenant à L_n. Il existe des mots $w_1, \ldots, w_n$ de $(ab)^*$ tels que $w \in w_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup w_n$. Tout préfixe u de w appartient à un langage $u_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_n$ où chaque u_i est un préfixe de w_i. Comme chaque u_i vérifie $|u_i|_b \leq |u_i|_a \leq |u_i|_b + 1$, le mot u vérifie bien sûr les inégalités requises. Inversement le langage des mots vérifiant les inégalités est accepté par l'automate déterministe ci-dessous.



Soit w un mot accepté par cet automate. Pour $1 \leq i \leq n$, soit w_i le mot formés des lettres w qui étiquettent les transitions entre les états $i-1$ à i dans le chemin acceptant w. Il est clair que chaque mot w_i appartient à $(ab)^*$ et que le mot w appartient à $w_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup w_n$.

Exercice 1.98. Soit L un langage. Pour tout entier n tel que L contienne au moins un mot de longueur n, w_n est défini comme le mot le plus petit pour l'ordre lexicographique de $L \cap A^n$. Montrer que si L est rationnel, le langage $\{w_n \mid L \cap A^n \neq \varnothing\}$ est encore rationnel.

Exercice 1.99. Soit $s = (s_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers. Pour un mot $w = w_0 \cdots w_n$, on note $w[s]$ le mot $w_{s_0} w_{s_1} \cdots w_{s_k}$ où k est l'unique entier tel que $s_k \leq n < s_{k+1}$. Pour un langage $L \subseteq A^*$, on note $L[s]$, le langage $\{w[s] \mid w \in L\}$. Montrer pour chacune des suites suivantes que si L est rationnel, alors $L[s]$ est encore rationnel.

$$s_n = n!, \qquad s_n = 2^n, \qquad s_n = n^2.$$

1.9 Lemme de l'étoile et ses variantes

L'intérêt principal de ce lemme, également appelé *lemme d'itération* ou *lemme de pompage* est de donner une condition nécessaire pour qu'un langage soit rationnel. Cette condition est souvent utilisée pour montrer qu'un langage donné n'est pas rationnel. Cette partie et particulier le présentation du théorème de Ehrenfeucht, Parikh et Rozenberg doit beaucoup à [Sak03, p. 77].

Il existe une multitude de variantes pour ce lemme. Leurs démonstrations sont toutes basées sur un usage plus ou moins fin du principe des tiroirs, ou

de sa version plus évoluée, le théorème de Ramsey. Nous donnons d'abord la version la plus simple puis une version forte. Nous terminons par le théorème de Ehrenfeucht, Parikh et Rozenberg qui établit une réciproque au lemme de l'étoile.

Proposition 1.100 (Lemme de l'étoile)**.** *Pour tout langage rationnel L, il existe un entier n tel que pour tout mot f,*

$$\left.\begin{array}{r} |f| \geq n \\ f \in L \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists u, v, w \in A^* \;\; v \neq \varepsilon \\ f = uvw \text{ et } uv^*w \subseteq L \end{array}\right.$$

Preuve. Soit n le nombre d'états d'un automate acceptant le langage L, par exemple l'automate minimal de L. Si $|f| \geq n$, un chemin acceptant pour f doit repasser au moins deux fois par un même état q. Si u, v et w sont les étiquettes d'un chemin de l'état initial à q, du circuit de q à q et du chemin de q à un état final, on obtient une factorisation convenable de f. □

Exercice 1.101. Montrer en utilisant le lemme de l'étoile que le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas rationnel.

Solution. Supposons par l'absurde que le langage L soit rationnel. Soit n l'entier fourni par lemme de l'étoile et soit f le mot $f = a^n b^n$. Le mot f se factorise $f = uvw$ où v est non vide et où $uv^*w \subseteq L$. Si v contient à la fois des lettres a et des lettres b, alors uv^2w n'appartient pas $a^*b^* \supset L$ contrairement à l'hypothèse. Si u ne contient que des a ou que des b, le mot uv^2w n'a pas le même nombre de a que de b, ce qui conduit à une contradiction.

Exercice 1.102. Soit A l'alphabet $\{a, b\}$. Montrer en utilisant le résultat de l'exercice précédent que le langage $L = \{w \in A^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ n'est pas rationnel.

Solution. Si le langage L est rationnel, alors le langage $L' = L \cap a^*b^*$ est aussi rationnel puisque les langages rationnels sont clos par intersection. Or ce langage L' est justement le langage $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ considéré à l'exercice précédent.

Le problème du lemme de l'étoile est qu'il donne une condition nécessaire mais pas suffisante. Certains langages peuvent vérifier la condition sans être rationnel.

Exercice 1.103. Soit L le langage $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Montrer que le langage $L' = L \cup A^*baA^*$ vérifie la condition du lemme de l'étoile sans être rationnel.

Solution. Si $n \geq 1$, le mot $f = a^n b^n$ se factorise $f = uvw$ où $u = a^{n-1}$, $v = ab$ et $w = b^{n-1}$. On vérifie sans peine que uv^*w est inclus dans L'. Pour montrer que L' n'est pas rationnel, on procède comme à l'exercice précédent en considérant $L' \cap a^*b^*$.

Il est possible de renforcer la condition du lemme de l'etoile. On obtient alors un lemme qui permet de montrer plus facilement que certains langages ne sont pas rationnels.

Proposition 1.104 (Lemme de l'étoile fort)**.** *Pour tout langage rationnel L, il existe un entier n tel que pour tout mot f,*

$$\left.\begin{array}{r} f = uv_1 \cdots v_n w \\ f \in L \text{ et } v_i \in A^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \exists i, j \;\; 0 \leq i < j \leq n \\ uv_1 \cdots v_i (v_{i+1} \cdots v_j)^* v_{j+1} \cdots v_n w \subseteq L \end{cases}$$

Malgré le renforcement de la condition, celle-ci n'est toujours pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.105. Soient les alphabets $A = \{a, b\}$ et $B = \{a, b, \#\}$. Soit le langage L sur B défini par $K' + A^*KA^*\#A^* + A^*\#A^*KA^*$ où les langages K et K' sont définis par $K = \{uu \mid u \in A^*\}$ et $K' = \{u\#v \mid u, v \in A^* \text{ et } u \neq v\}$. On vérifie que le langage L vérifie les conclusions du lemme précédent bien qu'il ne soit pas rationnel.

Nous allons maintenant énoncer le théorème de Ehrenfeucht, Parikh et Rozenberg qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage soit rationnel. Ce théorème est basé sur des propriétés σ_k et σ'_k dont nous donnons maintenant les définitions.

Définition 1.106 (Propriétés σ_k et σ'_k)**.** Un langage L vérifie la propriété σ_k (resp. σ'_k) pour $k \geq 0$ si pour toute factorisation $f = uv_1v_2 \cdots v_kw$ où tous les mots v_i sont non vides, il existe deux indices $1 \leq i < j \leq k$ tels que

$$\begin{array}{lll} \forall n \geq 0 \quad f \in L \iff uv_1 \cdots v_i(v_{i+1} \cdots v_j)^n v_{j+1} \cdots v_k w \in L & \text{pour } \sigma_k \\ \qquad\quad f \in L \iff uv_1 \cdots v_i v_{j+1} \cdots v_k w \in L & \text{pour } \sigma'_k \end{array}$$

Il faut remarquer une différence essentielle entre la condition du lemme de l'étoile et les propriétés σ_k et σ'_k. Ces dernières sont des équivalences alors que la condition du lemme est seulement une implication. Ceci signifie que la condition du lemme porte sur le langage lui-même alors que les propriétés σ_k et σ'_k portent simultanément sur le langage et son complémentaire.

Le théorème suivant établit que les propriétés σ_k et σ'_k qui généralisent les lemmes de l'étoile sont caractéristiques des langages rationnels. L'intérêt de ce théorème réside plus dans la technique de preuve et dans l'utilisation astucieuse du théorème de Ramsey que dans le résultat lui-même.

Théorème 1.107 (Ehrenfeucht, Parikh et Rozenberg 1981)**.** *Pour tout langage L, les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *L est rationnel.*
2. *Il existe $k \geq 0$ tel que L vérifie σ_k.*
3. *Il existe $k \geq 0$ tel que L vérifie σ'_k.*

La preuve du théorème s'appuie sur le théorème suivant qui étend le principe des tiroirs. Ce principe très simple énonce que si $n + 1$ objets sont rangés dans n tiroirs, deux objets se trouvent nécessairement dans le même tiroir. Dans le théorème de Ramsey, ce sont les parties à k objets qui sont rangés dans les tiroirs plutôt que les objets eux-mêmes. L'affectation des tiroirs est donnée par la fonction f et les tiroirs sont les éléments de l'ensemble C. Si E est un ensemble, on notera $\mathfrak{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E. Le théorème de Ramsey se démontre par récurrence sur k, le cas $k = 1$ étant le principe des tiroirs. Une démonstration détaillée peut être consultée en [vLW92].

Théorème 1.108 (Ramsey 1929)**.** *Pour tout triplet d'entiers naturels (k, m, r), il existe un entier $N(k, m, r)$ tel que pour tout :*

- *ensemble E tel que $|E| \geq N(k, m, r)$,*
- *ensemble C tel que $|C| = m$,*
- *fonction $f : \mathfrak{P}_k(E) \to C$,*

il existe $F \subseteq E$ *tel que :*
- $|F| \geq r$;
- $|f(\mathfrak{P}_k(F))| \leq 1$.

Dans la littérature, les éléments de l'ensemble C sont appelées les *couleurs* et la fonction f affecte une couleur à chaque partie à k éléments. La condition $|f(\mathfrak{P}_k(F))| \leq 1$ signifie que toutes les parties à k éléments de F se voient affecter la même couleur. On dit alors que F est *monochrome*.

Preuve. Nous montrons successivement que la condition 1 implique la condition 2, qui implique à son tour la condition 3 qui implique finalement la condition 1. Il est tout d'abord évident que la condition 1 implique la condition 2 et que la condition 2 implique la condition 3. Il reste donc à montrer que la condition 3 implique la condition 1. La suite de la preuve est consacrée a cette implication.

La preuve de cette implication se décompose en deux étapes. On montre dans un premier temps que si L satisfait σ'_k, alors le quotient $v^{-1}L$ satisfait σ'_k pour chaque mot v. Dans un second temps, on montre que le nombre de langages vérifiant σ'_k est fini. Finalement, avec ces deux résultats, on obtient qu'un langage vérifiant σ'_k possède un nombre fini de quotients à gauche. La proposition 1.82 (p. 41) permet de conclure qu'il est rationnel.

Première étape Soit L un langage qui vérifie σ'_k pour un entier k fixé et soit un mot $v \in A^*$. On montre que le langage $v^{-1}L$ vérifie aussi σ'_k. Soit alors f, un mot qui s'écrit $f = uv_1v_2 \cdots v_k w$ où les mots v_i ne sont pas vides pour $1 \leq i \leq k$. Les mots u et w sont quelconques. En appliquant la condition σ'_k au langage L et au mot $f' = vf$, on obtient une paire (i, j) et on a alors les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
f \in v^{-1}L &\iff vf \in L && \text{Par définition de } v^{-1}L \\
&\iff vuv_1 \cdots v_i v_{j+1} \cdots v_k w \in L && \text{Par définition de } (i,j) \\
&\iff uv_1 \cdots v_i v_{j+1} \cdots v_k w \in v^{-1}L && \text{Par définition de } v^{-1}L
\end{aligned}$$

On a montré que $v^{-1}L$ vérifie σ'_k.

Seconde étape Nous montrons maintenant que le nombre de langages vérifiant σ'_k est fini pour chaque entier k. C'est la partie délicate de la preuve qui fait appel au théorème de Ramsey. En appliquant ce théorème pour $k = 2$, $m = 2$ et $r = k + 1$, on obtient un entier $N = N(2, 2, k + 1)$.

On note $A^{\leq N}$ l'ensemble des mots de longueur au plus N sur l'alphabet A. Soient L et K deux langages vérifiant σ'_k pour un entier k fixé. On montre que si K et L coïncident sur les mots de longueur au plus N, c'est-à-dire $L \cap A^{\leq N} = K \cap A^{\leq N}$, alors les deux langages K et L sont égaux. Ceci prouve que le nombre de langages vérifiant σ'_k est fini. Le nombre de tels langages est en effet borné par 2^m où $m = (|A|^{N+1} - 1)/(|A| - 1)$ est le nombre de mots de longueur au plus N sur l'alphabet A.

On suppose maintenant que $L \cap A^{\leq N} = K \cap A^{\leq N}$. Pour tout mot f, on montre par récurrence sur la longueur $|f|$ que f appartient à K si et seulement si f appartient à L. Le résultat est bien sûr immédiat si f est de longueur au plus N.

On suppose alors que $|f| > N$. Le mot f est factorisé $f = a_0 \cdots a_N g$ où $a_0, \ldots, a_N$ sont des lettres et g est un mot quelconque.

On définit maintenant un ensemble de paires d'entiers qui va permettre l'utilisation du théorème de Ramsey. Toute l'intelligence de cette preuve réside dans l'introduction de cet ensemble X défini par la formule suivante.

$$X = \{(i,j) \mid a_0 \cdots a_i a_{j+1} \cdots a_N g \in L\}$$

Soient E l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ des entiers de 1 à N, C l'ensemble à deux couleurs $C = \{0, 1\}$ et la fonction χ de $\mathfrak{P}_2(E)$ dans C définie par

$$\chi(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction χ est en fait la fonction caractéristique de l'ensemble X vu comme un sous-ensemble de $\mathfrak{P}_2(E)$. On a implicitement identifié une partie $\{i,j\}$ à deux éléments avec la paire (i,j) où $i < j$. Le théorème de Ramsey pour $k = 2$, $m = |C|$ et $r = k+1$ donne un ensemble à $k+1$ éléments $F = \{i_0, \ldots, i_k\}$ tel que $\chi(i_m, i_n)$ reste constant quand les deux indices m et n parcourent $\{0, \ldots, k\}$. Ceci signifie que pour toutes paires (m,n) et (m',n') telles que $0 \leq m < n \leq k$ et $0 \leq m' < n' \leq k$, on a l'équivalence

$$a_0 \cdots a_{i_m} a_{i_n+1} \cdots a_N g \in L \iff a_0 \cdots a_{i_{m'}} a_{i_{n'}+1} \cdots a_N g \in L.$$

Les $k+1$ entiers $i_0, \ldots, i_k$ induisent une factorisation $f = uv_1v_2 \cdots v_k w$ où les mots $u, v_1, \ldots, v_k, w$ sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} u &= a_0 a_1 \cdots a_{i_0-1} \\ v_j &= a_{i_{j-1}} a_{i_{j-1}+1} \cdots a_{i_j-1} \text{ pour chaque } 1 \leq j \leq k \\ w &= a_{i_k} \cdots a_N g \end{aligned}$$

Comme les deux langages K et L vérifient la propriété σ'_k, la factorisation $f = uv_1v_2 \cdots v_k w$ donne deux paires (m,n) et (m',n') d'entiers *a priori* différentes. On a alors la suite d'équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} f \in L &\iff a_0 \cdots a_{i_m} a_{i_n+1} \cdots a_N g \in L && \text{par définition de } (m,n) \\ &\iff a_0 \cdots a_{i_{m'}} a_{i_{n'}+1} \cdots a_N g \in L && \text{par définition de } F \\ &\iff a_0 \cdots a_{i_{m'}} a_{i_{n'}+1} \cdots a_N g \in K && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\iff f \in K && \text{par définition de } (m',n') \end{aligned}$$

On a donc montré que f appartient à K si et seulement si f appartient à L et que K et L sont égaux. Ceci termine la preuve du théorème. □

1.10 Hauteur d'étoile

On étudie ici une classification des langages rationnels basée sur le nombre d'étoiles imbriquées des expressions rationnelles. La raison pour laquelle on s'intéresse à cette opération est qu'elle est celle qui donne toute leur puissance aux expressions rationnelles. Les seuls langages à pouvoir être décrits sans étoile sont les langages finis.

La *hauteur d'étoile* $h(e)$ d'une expression rationnelle e est définie par récurrence sur la structure de l'expression par les formules suivantes.

$$\begin{aligned} h(a) = h(\varepsilon) &= 0 \text{ pour toute lettre } a \in A \\ h(e+f) &= \max(h(e), h(f)) \\ h(ef) &= \max(h(e), h(f)) \\ h(e^*) &= 1 + h(e) \end{aligned}$$

Exemple 1.109. Les expressions $ab + ba$, $(ab + a)^*$ et $(ab^*a + b)^*$ sont respectivement de hauteur d'étoile 0, 1 et 2.

Il faut remarquer qu'un même langage peut être décrit par plusieurs expressions rationnelles ayant des hauteurs d'étoile différentes. Par exemple, les deux expressions $(a + b)^*$ et $(a^*b)^*a^*$ sont de hauteurs d'étoile 1 et 2 mais décrivent le même langage de tous les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$. La *hauteur d'étoile* d'un langage L est définie comme la hauteur minimale d'une expression rationnelle décrivant L. Les langages de hauteur d'étoile 0 sont les langages finis.

Exemple 1.110. Le langage $(a+b)^*$ est de hauteur d'étoile 1 puisqu'il est décrit par une expression rationnelle de hauteur 1 et qu'il ne peut être décrit par une expression de hauteur 0 parce qu'il est infini.

Un premier résultat sur la hauteur d'étoile est que pour tout entier n, il existe un langage rationnel de hauteur d'étoile n. Il existe un algorithme qui calcule la hauteur d'étoile d'un langage rationnel donné mais celui-ci est très complexe et dépasse le cadre de cet ouvrage.

Comme la classe des langages rationnels est close pour toutes les opérations booléennes, il est possible de considérer des expressions utilisant non seulement les opérations rationnelles mais aussi toutes les opérations booléennes. On peut d'ailleurs se limiter à la complémentation puisque l'union et la complémentation permettent d'exprimer les autres opérations booléennes. La hauteur d'étoile peut être étendue à ces expressions généralisées en posant

$$\begin{aligned} h(\varnothing) &= 0, \\ h(e^c) &= h(e). \end{aligned}$$

La *hauteur d'étoile généralisée* d'un langage L est la hauteur d'étoile minimale d'une expression utilisant les opérations rationnelles et booléennes et décrivant L.

Exemple 1.111. Le langage $(a + b)^* = \varnothing^c$ est de hauteur d'étoile généralisée 0.

Les langages de hauteur d'étoile généralisée 0 sont appelés langages sans étoile. Ils sont étudiés en détail et caractérisés de manière algébrique à la section 1.12 (p. 60). C'est encore une problème ouvert de savoir s'il existe des langages de hauteur d'étoile généralisée strictement plus grande que 1.

1.11 Reconnaissance par morphisme

Les langages rationnels peuvent être décrits par des expressions rationnelles ou par des automates. On donne maintenant une troisième façon plus algébrique de définir ces langages.

Définition 1.112 (Monoïde)**.** On appelle *monoïde* tout ensemble muni d'une loi de composition interne associative qui possède un élément neutre noté 1_M.

Exemple 1.113. Quelques exemples classiques de monoïdes :
- A^* muni de la concaténation (pour A, alphabet quelconque),
- l'ensemble $\mathfrak{P}(A^*)$ des parties de A^* muni du produit des langages,
- tout groupe G muni de sa loi naturelle,
- l'ensemble des matrices $n \times n$ sur un anneau et plus généralement sur un semi-anneau (pas d'inverse pour l'addition),
- $M = \{1, \alpha, \beta\}$ où 1 est l'élément neutre et où la loi est définie pour les autres éléments par $\alpha\beta = \alpha^2 = \alpha$ et $\beta^2 = \beta\alpha = \beta$ (loi $xy = x$),
- $M = \{1, \alpha, \beta\}$ où 1 est l'élément neutre et où la loi est définie pour les autres éléments par $\alpha^2 = \beta\alpha = \alpha$ et $\alpha\beta = \beta^2 = \beta$ (loi $xy = y$),
- $M = \{1\} \cup I \times J$ pour deux ensembles I et J où la loi est $(i, j)(i', j') = (i, j')$.

Définition 1.114 (Morphisme de monoïdes)**.** Soient M et M' deux monoïdes. Un *morphisme* de M dans M' est une application $\mu : M \to M'$ qui vérifie :
- $\mu(1_M) = 1_{M'}$,
- $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$, pour tous éléments x et y de M.

Exemple 1.115. L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'addition est un monoïde. L'application $w \mapsto |w|$ est un morphisme de A^* dans $\mathbb{N}$.

La proposition suivante justifie le fait que le monoïde A^* soit appelé monoïde libre. Cette propriété caractérise le monoïde libre engendré par A.

Proposition 1.116. *Toute fonction $\mu : A \to M$ de A dans un monoïde M se prolonge de façon unique en un morphisme de monoïde de A^* dans M.*

Preuve. Si le morphisme $\hat{\mu}$ prolonge μ, on a pour tout mot $w = a_1 \cdots a_n$ de A^*,

$$\hat{\mu}(w) = \hat{\mu}(a_1) \cdots \hat{\mu}(a_n) = \mu(a_1) \cdots \mu(a_n).$$

Ceci définit $\hat{\mu}$ de manière unique. Inversement, il est facile de vérifier que la formule ci-dessus définit bien un morphisme. □

Définition 1.117 (Reconnaissance par monoïde)**.** Un langage $L \subseteq A^*$ est *reconnu* par un morphisme $\mu : A^* \to M$ si et seulement si il existe une partie P de M telle que $L = \mu^{-1}(P)$. Par extension, un monoïde M *reconnaît* le langage L s'il existe un morphisme $\mu : A^* \to M$ qui reconnaît L.

Quand un morphisme de monoïdes $\mu : A^* \to M$ reconnaît un langage L, on peut toujours prendre la partie P égale à $P = \mu(L)$. Autrement dit, un morphisme $\mu : A^* \to M$ reconnaît L si et seulement si $L = \mu^{-1}(\mu(L))$. Si le morphisme μ n'est pas surjectif, on peut remplacer le monoïde M par le sous-monoïde $M' = \mu(A^*)$.

Exemple 1.118. On considère le monoïde M égal au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à deux éléments.
- $\mu : \begin{array}{ccc} A^* & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ w & \mapsto & |w| \bmod 2 \end{array}$ (dans ce cas : $\mu^{-1}(0) = (A^2)^*$)
- $\mu : \begin{array}{ccc} A^* & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ w & \mapsto & |w|_a \bmod 2 \end{array}$ (dans ce cas : $\mu^{-1}(0) = (ab^*a + b)^*$)

Exemple 1.119. On considère $A = \{a, b\}$ et le monoïde $M = \{1, \alpha, \beta\}$ avec $\alpha^2 = \alpha\beta = \alpha$ et $\beta\alpha = \beta^2 = \beta$ (cf. exemple 1.113). Le morphisme $\mu : A^* \to M$ défini par :

$$\mu(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = \varepsilon \\ \alpha & \text{si } w \in aA^* \\ \beta & \text{si } w \in bA^* \end{cases}$$

Proposition 1.120 (Rationalité par morphisme)**.** *Un langage $L \subseteq A^*$ est rationnel si et seulement s'il est reconnu par un monoïde fini.*

Preuve. Soit un langage L et un morphisme $\mu : A^* \to M$ tel que $L = \mu^{-1}(P)$ pour une partie P de M. On construit l'automate $\mathcal{A} = (M, A, E, \{1\}, P)$ où l'ensemble des transitions est $E = \{(m, a, m\mu(a)) \mid m \in M, a \in A\}$. Cet automate reconnaît L, ce qui prouve un sens de l'équivalence. □

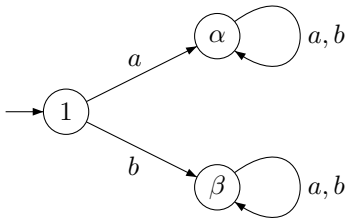


FIG. 1.23 – Automate du monoïde $M = \{1, \alpha, \beta\}$ avec la loi $xy = x$

Exemple 1.121. Si on applique la construction précédente au monoïde $M = \{1, \alpha, \beta\}$ avec la loi $xy = x$ (cf. exemple 1.113), on obtient l'automate de la figure 1.23.

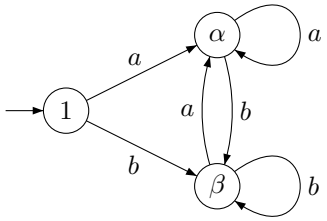


FIG. 1.24 – Automate du monoïde $M = \{1, \alpha, \beta\}$ avec la loi $xy = y$

Exemple 1.122. Si on applique la construction précédente au monoïde $M = \{1, \alpha, \beta\}$ avec la loi $xy = y$ (cf. exemple 1.113), on obtient l'automate de la figure 1.24.

Pour montrer que tout langage rationnel est reconnu par un monoïde fini, on introduit quelques définitions. Soient r et r' deux relations binaires sur un même ensemble E. On définit la composition de ces deux relations, notée rr' par la formule suivante.

$$rr' = \{(x, z) \mid \exists y \in E \ \ (x, y) \in r \text{ et } (y, z) \in r'\}.$$

On vérifie sans peine que la loi de composition ainsi définie est associative et que l'identité est un élément neutre. On note $\mathcal{R}_E$ le *monoïde des relations binaires* sur l'ensemble E muni de cette loi de composition interne.

Définition 1.123 (Monoïde des transitions)**.** Soit un automate $\mathcal{A}$ égal à (Q, A, E, I, F). L'application $\mu : A^* \to \mathcal{R}_Q$ définie par :

$$\mu(w) = r_w = \{(q, q') \mid q \xrightarrow{w} q' \text{ dans } \mathcal{A}\}$$

est un morphisme de A^* dans $\mathcal{R}_Q$. Son image $\mu(A^*)$ dans $\mathcal{R}_Q$ est appelée *monoïde des transitions* de l'automate $\mathcal{A}$.

Avec ce morphisme, il suffit de prendre :

$$P = \{r \mid r \cap (I \times F) \neq \varnothing\}$$

pour avoir le résultat recherché.

Définition 1.124 (Sous-monoïde)**.** Un monoïde M' est appelé *sous-monoïde* de M lorsque $M' \subseteq M$ et si l'application identité $M' \xhookrightarrow{id} M$ est un morphisme de M' dans M.

Une façon équivalente d'exprimer que M' est un sous-monoïde de M est de dire que M est inclus dans M', que l'unité de M' coïncide avec l'unité de M et que le produit de M' est la restriction à M' du produit de M.

Exemple 1.125. Quelques exemples de sous-monoïdes.
- Les sous-monoïdes de A^* sont les langages de la forme L^* pour $L \subset A^*$.
- L'ensemble des parties rationnelles de A^* est un sous-monoïde de $\mathfrak{P}(A^*)$.

Exercice 1.126. On dit qu'un langage est *préfixe* si $L \cap LA^+ = \varnothing$, c'est-à-dire si un préfixe stricte d'un mot de L n'est jamais un mot de L. Montrer que l'ensemble des langages préfixes est un sous-monoïde de $\mathfrak{P}(A^*)$ et que dans ce monoïde, l'égalité

$$L_1 \cdots L_m = K_1 \cdots K_n$$

n'est vérifiée que si $m = n$ et $L_i = K_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Un tel monoïde est dit *libre* car il est isomorphe à un monoïde de la forme B^*.

Définition 1.127 (Monoïde quotient)**.** On dit que M est *quotient* de M' s'il existe un morphisme surjectif $\mu : M' \mapsto M$.

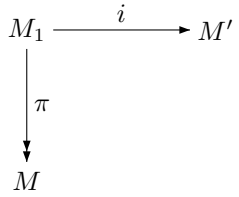


FIG. 1.25 – Relation de division $M \lhd M'$

Définition 1.128 (Monoïde diviseur)**.** On dit que M *divise* M' et on note $M \lhd M'$ si M est un quotient d'un sous-monoïde M_1 de M' (cf. figure 1.25).

la notion de *diviseur* pour des objets algébriques est l'équivalent pour les graphes de la notion de *mineur*.

Proposition 1.129 (Ordre de la division)**.** *La relation de division est une relation d'ordre sur l'ensemble des monoïdes finis.*

On perd l'anti-symétrie lorsque les monoïdes sont infinis comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.130. On peut illustrer ce fait avec $M = \{a, b\}^*$ et $M' = \{a, b, c, d\}^*$ (remarquez que $M \subsetneq M'$). Et en considérant les morphismes définis par :

$$\begin{array}{rcl} \mu : M \to M' & : & w \mapsto w \\ \mu' : M' \to M & : & \left\{ \begin{array}{l} a \mapsto aa \\ b \mapsto bb \\ c \mapsto ab \\ d \mapsto ba \end{array} \right. \end{array}$$

Preuve. La réflexivité est évidente et l'anti-symétrie se vérifie facilement par équipotence.

Pour la transitivité, supposons que $M \lhd M' \lhd M''$, alors :

$$\begin{array}{ccccc} M_2 & \overset{id}{\hookrightarrow} & M_1' & \overset{id}{\hookrightarrow} & M'' \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi' & & \\ M_1 & \overset{id}{\hookrightarrow} & M' & & \\ \downarrow \pi & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

On vérifie alors que le monoïde $M_2 = \pi'^{-1}(M_1)$ est un sous-monoïde de M_1' et donc de M'' et que $\pi(\pi'((M_2)) = \pi(M_1) = M$. □

Définition 1.131 (Congruence)**.** Une relation d'équivalence $\sim$ définie sur un monoïde M est appelée *congruence* (de monoïde) si pour tous x, x', y et y' dans M, on a :

$$\left.\begin{array}{l} x \sim x' \\ y \sim y' \end{array}\right\} \Rightarrow xy \sim x'y'$$

Pour qu'une relation d'équivalence $\sim$ soit une congruence, il suffit que pour tous y et y' dans M, l'implication $y \sim y' \implies \forall x, z\ xyz \sim xy'z$ soit satisfaite.

Proposition 1.132. *Si $\sim$ est une congruence sur M, le quotient $M/\sim$ est un monoïde pour la loi définie par $[x][y] = [xy]$ où $[x]$ désigne la classe de x dans le quotient.*

Définition 1.133 (Congruence syntaxique)**.** Pour tout langage $L \subseteq A^*$, on appelle *contexte* de $y \in A^*$ l'ensemble $C(y) = \{(x, z) \in (A^*)^2 : xyz \in L\}$. La relation $\sim_L$ définie par :

$$y \sim_L y' \Leftrightarrow C(y) = C(y') \Leftrightarrow \forall x, z \in A^*(xyz \in L \Leftrightarrow xy'z \in L)$$

est appelée *congruence syntaxique* de L.

La proposition suivante justifie la terminologie.

Proposition 1.134 (Monoïde syntaxique)**.** *Pour tout langage L, la congruence syntaxique $\sim_L$ est effectivement une congruence et le monoïde quotient $A^*/\sim_L$ est appelé* monoïde syntaxique *de L.*

Preuve. Si $y \sim_L y'$, on a $\forall x, z \in A^*$, $C(xyz) = C(xy'z)$ et donc $xyz \sim_L xy'z$. □

la proposition suivante montre que le monoïde syntaxique d'un langage est en quelque sorte l'équivalent algébrique de l'automate minimal. Il est le plus petit monoïde reconnaissant le langage. Beaucoup de propriétés d'un langage peuvent être déduites de son monoïde syntaxique.

Proposition 1.135. *Un monoïde M reconnaît un langage $L \subseteq A^*$ si et seulement si le monoïde syntaxique $M(L)$ divise M.*

On commence par prouver un premier lemme qui montre que la relation de division est compatible avec la reconnaissabilité.

Lemme 1.136. *Pour tout langage $L \subseteq A^*$ et tout monoïde M, les propositions suivantes sont vérifiées.*

1. *Si M reconnaît L si M est sous-monoïde de M', alors M' reconnaît L.*
2. *Si M reconnaît L si M est quotient de M', alors M' reconnaît L.*
3. *Si M reconnaît L si M divise M', alors M' reconnaît L.*

Preuve. La proposition 1. découle du fait qu'un morphisme de A^* dans M peut être vu comme un morphisme de A^* dans M'. La proposition 3. est conséquence de 1. et de 2.

Pour la proposition 2, soit μ un morphisme de A^* dans M et π un morphisme surjectif de M' dans M. Pour toute lettre a de A, on pose $\mu'(a) = m_a$ où m_a est un élément quelconque de M' vérifiant $\pi(m_a) = \mu(a)$. D'après la proposition 1.116, μ' se prolonge en un morphisme de A^* dans M' qui vérifie $\pi(\mu'(w)) = \mu(w)$. Il est alors facile de vérifier que la partie $P' = \pi'^{-1}(\mu(L))$ de M' vérifie $\mu'^{-1}(P') = L$ et que μ' reconnaît L. □

Ce second lemme établit qu'un langage est bien reconnu par son monoïde syntaxique.

Lemme 1.137. *Pour tout langage L, le monoïde syntaxique $M(L)$ reconnaît L.*

Preuve. Il faut remarquer qu'un mot w appartient à L si et seulement si son contexte $C(w)$ contient la paire $(\varepsilon, \varepsilon)$. Il est alors clair que si une classe de la congruence syntaxique $\sim_L$ contient un mot de L, elle est alors entièrement contenu dans L.

L'application canonique de A^* dans $M(L) = A^*/\sim$ qui associe à tout mot w sa classe $[w]$ est un morphisme. D'après la remarque précédente, ce morphisme reconnaît L puisque $L = \bigcup_{w \in L} [w]$. □

On procède maintenant à la preuve de la proposition.

Preuve. En utilisant les lemmes 1.137 et 1.136, on obtient immédiatement que, si $M(L)$ divise M, alors M reconnaît aussi L.

Réciproquement, si M reconnaît L, il existe un morphisme $\mu : A^* \to M$ tel que $L = \mu^{-1}(P)$ pour une partie $P \subseteq M$. On note π la morphisme canonique de A^* dans $M(L)$. Le monoïde $M' = \mu(A^*)$ est un sous-monoïde de M. On va montrer que $M(L)$ est un quotient de M' ce qui prouvera que $M(L)$ divise M.

On montre que pour tous mots w et w', si $\mu(w) = \mu(w')$, alors on a aussi $\pi(w) = \pi(w')$. Une paire (u, v) appartient au contexte $C(w)$ si uwv appartient à L, c'est-à-dire si $\mu(u)\mu(w)\mu(v)$ appartient à P. Ceci montre que les contextes $C(w)$ et $C(w')$ sont égaux et que $\pi(w) = \pi(w')$.

Pour tout élément m de M', on peut définir $\pi'(m) = \pi(w)$ où w est un mot tel que $\mu(w) = m$ puisque $\pi(w)$ est indépendant du choix de w. On vérifie alors sans difficulté que π' ainsi défini est un morphisme surjectif de M' dans $M(L)$.

$$\begin{array}{lll} A^* & \xrightarrow{\mu} & M' \subseteq M \\ \downarrow \pi & \swarrow \pi' & \\ M(L) & & \end{array}$$

□

Pour le calcul du monoïde syntaxique, on utilise la proposition suivante.

Proposition 1.138. *Le monoïde syntaxique $M(L)$ d'un langage rationnel L est égal au monoïde des transitions de l'automate minimal de L.*

Preuve. D'après la proposition 1.120, le monoïde des transitions de l'automate minimal de L reconnaît L. Il est donc divisible par le monoïde syntaxique $M(L)$ d'après la proposition 1.135. Soient deux mots w et w' ayant des images différentes dans le monoïde des transitions de l'automate minimal. Puisque cet automate est déterministe, il existe un état p tel que $p \cdot w \neq p \cdot w'$. Soient q et q' les états $p \cdot w$ et $p \cdot w'$. Puisque cet automate est minimal, il existe un mot v tel que $q \cdot v$ est final et $q' \cdot v$ n'est pas final (ou l'inverse). Il existe aussi un mot u tel que $i \cdot u = p$. On en déduit que la paire (u, v) appartient à $C(w)$ mais pas à $C(w')$ et que w et w' ont des images différentes dans le monoïde syntaxique de L. □

Exemple 1.139. Soit le langage $L = (ab)^*$ dont l'automate minimal est représenté à la figure 1.22. On construit son monoïde syntaxique en déterminant toutes les relations de transitions de l'automate. Comme l'automate est déterministe, ces relations sont des fonctions. On obtient la table ci-dessous.

Le monoïde associé comporte 6 éléments $\{1, 0, \alpha, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha\}$ qui vérifie les relations suivantes. Ceci constitue en fait une présentation par générateurs et relations de ce monoïde.

$$\alpha\beta\alpha = \alpha \quad \beta\alpha\beta = \beta \quad \alpha^2 = \beta^2 = 0$$

La reconnaissance par monoïdes des langages rationnels permet de résoudre rapidement certaines questions. Pour illustrer le propos, nous allons montrer la proposition suivante dont la preuve est grandement facilitée par les monoïdes. Le plus intéressant n'est pas le résultat en soi mais la technique de preuve. Le résultat est en fait un cas particulier d'une construction beaucoup plus générale.

Proposition 1.140. *Soit σ une substitution de A^* dans B^* et soit $K \subset B^*$ un langage rationnel. Les deux langages $\{w \mid \sigma(w) \cap K \neq \varnothing\}$ et $\{w \mid \sigma(w) \subseteq K\}$ sont rationnels.*

	0	1	2
$1 = \varepsilon$	0	1	2
$aba = a$	1	2	2
$bab = b$	2	0	2
$0 = bb = aa$	2	2	2
ab	0	2	2
ba	2	1	2
bb	2	2	2
aba	1	2	2
bab	2	0	2

TAB. 1.1 – Fonctions de transitions de l'automate minimal de $(ab)^*$

Pour un monoïde M, l'ensemble $\mathfrak{P}(M)$ des parties de M est naturellement muni d'une structure de monoïde par le produit $P \cdot Q = \{pq \mid p \in P \text{ et } q \in Q\}$ pour deux parties $P, Q \subseteq M$.

Preuve. On va montrer que si K est reconnu par le monoïde M, alors les deux langages $L = \{w \mid \sigma(w) \cap K \neq \varnothing\}$ et $L' = \{w \mid \sigma(w) \subseteq K\}$ sont reconnus par le monoïde $\mathfrak{P}(M)$. Soit $\mu : B^* \to M$ un morphisme de B^* dans un monoïde fini M tel que $K = \mu^{-1}(P)$ pour une partie $P \subseteq M$. On définit le morphisme $\hat{\mu} : A^* \to \mathfrak{P}(M)$ par $\hat{\mu}(a) = \mu(\sigma(a))$. On vérifie que $\hat{\mu}(w) = \mu(\sigma(w))$ pour tout mot $w \in A^*$. Ceci implique que $L = \hat{\mu}^{-1}(Q)$ et $L' = \hat{\mu}^{-1}(Q')$ où Q et Q' sont respectivement les ensembles $\{T \mid T \cap P \neq \varnothing\}$ et $\{T \mid T \subseteq P\}$ des parties de M qui intersectent P et qui sont incluses dans P. □

1.12 Langages sans étoile

Le but de cette partie est d'illustrer l'utilisation du monoïde syntaxique et de montrer la puissance de cet outil. On introduit la classe des langages appelés *sans étoile* et on prouve le théorème de Schützenberger qui donne une élégante caractérisation de ces langages en terme de groupes contenus dans leurs monoïdes syntaxiques.

Définition 1.141 (Langage sans étoile)**.** La famille des *langages sans étoile* est la plus petite famille $\mathcal{E}$ telle que :
- $\varnothing \in \mathcal{E}$ et $\{a\} \in \mathcal{E}$ pour toute lettre a ;
- $\mathcal{E}$ est close par union, complémentation et produit. Ceci signifie que si les langages K et L appartiennent à $\mathcal{E}$, alors les langages $K + L$, $A^* \setminus L$ et KL appartiennent aussi à $\mathcal{E}$.

Les langages sans étoile sont aussi les langages de hauteur d'étoile généralisée 0 (cf. section 1.10 p. 52).

Exemple 1.142. Quelques exemples et contre-exemples de langages sans étoile.
- $A^* = A^* \setminus \varnothing$ et est donc un langage sans étoile.
- $A^*aA^*bA^*$ est sans-étoile.
- $\{\varepsilon\} = A^* \setminus \bigcup_{a \in A} A^*aA^*$ est sans étoile.
- $(ab)^+ \in \mathcal{E}$ car il s'écrit aussi $(ab)^+ = (aA^* \cap A^*b) \setminus A^*(aa + bb)A^*$.
- $(ab)^* \in \mathcal{E}$ car il s'écrit $(ab)^* = (ab)^+ + \varepsilon$.

– $(aa)^*$ et $(aa)^+$ ne sont pas sans étoile.

Le fait que le langage $(aa)^*$ ne soit effectivement pas sans étoile n'est pas évident *a priori*. Il est facile de montrer qu'un langage est sans étoile en donnant explicitement une expression sans étoile pour ce langage. Par contre, il est plus ardu de prouver qu'un langage n'est pas sans étoile. La suite de cette partie est consacrée à une caractérisation algébrique des langages sans étoile qui permet facilement de prouver qu'un langage donné n'est pas sans étoile.

Définition 1.143 (Groupe contenu dans un monoïde)**.** On dit qu'un groupe G est *contenu* dans un monoïde M si :

1. $G \subseteq M$
2. $\forall (g, g') \in G^2, g._G g' = g._M g'$

Un monoïde M est *apériodique* s'il ne contient que des groupes triviaux, c'est-à-dire réduits à un seul élément.

Lorsqu'un groupe G est contenu dans un monoïde M, l'élément neutre de G ne coïncide par nécessairement avec l'élément neutre de M ($1_G \neq 1_M$).

Les résultats suivants montrent que les monoïdes apériodiques sont à l'opposé des groupes. Soit x un élément d'un monoïde M. On considère l'ensemble $\{x^k \mid k \geq 0\}$ des puissances de x qui est en fait le sous-monoïde engendré par x. Si M est fini, il existe deux entiers $l < k$ tels que $x^k = x^l$. Si k est en outre choisi le plus petit possible, les éléments $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ sont distincts et on a le diagramme suivant, communément appelé *poêle à frire*.

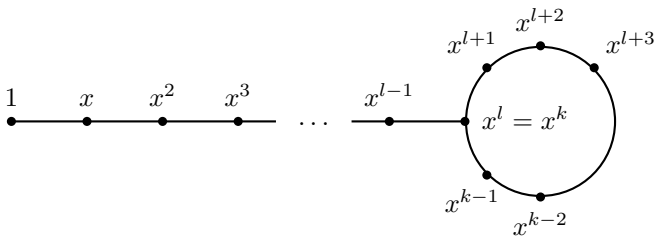


FIG. 1.26 – Diagramme de la poêle à frire

Si k est le plus petit entier pour lequel il existe l tel que $x^k = x^l$, les entiers k et l sont uniques. On note alors $l_x = l$ et $p_x = k - l$. Le lemme suivant caractérise les groupes et les monoïdes apériodiques parmi les monoïdes finis.

Lemme 1.144. *Pour un monoïde fini M, les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *M est un groupe.*
2. *Pour tout $x \in M$, on a $l_x = 0$ et donc $x^{p_x} = 1$.*
3. *Il existe un entier ω tel que $x^\omega = 1$ pour tout $x \in M$.*

Pour un monoïde fini M, les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *M est apériodique.*
2. *Pour tout $x \in M$, on a $p_x = 1$ et donc $x^{l_x+1} = x^{l_x}$.*
3. *Il existe un entier ω tel que $x^{\omega+1} = x^\omega$ pour tout $x \in M$.*

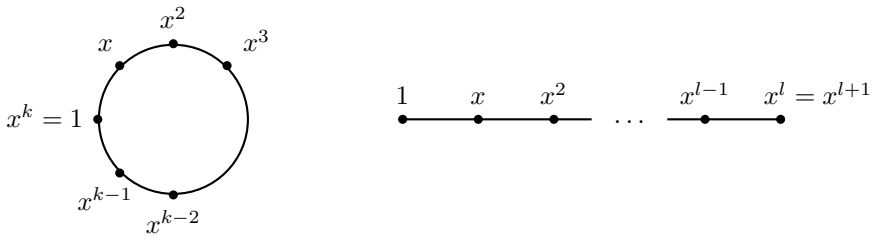


FIG. 1.27 – Cas des groupes et des monoïdes apériodiques

L'énoncé de ce lemme se traduit en termes imagés de la manière suivante. Dans un groupe, la poêle à frire est donc *sans manche* alors qu'au contraire, elle est *réduite au manche* dans un monoïde apériodique.

Preuve. Le cas des groupes n'est pas utilisé dans la suite. La preuve est laissée à titre d'exercice.

Pour le cas des monoïdes apériodiques, la preuve de $(1 \Rightarrow 2)$ découle de la remarque suivante. L'ensemble $\{x^{l_x}, x^{l_x+1}, \ldots, x^{l_x+p_x-1}\}$ est un monoïde isomorphe à $\mathbb{Z}/p_x\mathbb{Z}$. Par contre, il n'est pas un sous-monoïde de M si $l_x > 0$. Son élément neutre est x^m où m est l'unique entier entre l_x et $l_x + p_x - 1$ tel que $m \equiv 0 \mod p_x$. Si M est apériodique, on a donc nécessairement $p_x = 1$.

La preuve de $(2 \Rightarrow 3)$ est obtenue en posant $\omega = \max\{l_x \mid x \in M\}$.

$(1 \Rightarrow 3)$ Si G est un groupe contenu dans M, on a l'égalité $g^\omega = g^{\omega+1}$. Cette égalité implique immédiatement que g est l'identité de G et que le groupe G est trivial. □

Exemple 1.145. Le monoïde syntaxique du langage $(aa)^+$ est constitué des trois éléments $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ avec la relation $\alpha^3 = \alpha$. Le sous-ensemble $\{\alpha, \alpha^2\}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le théorème suivant caractérise en terme de monoïde syntaxique les langages sans étoile. Il permet en particulier de décider effectivement si un langage donné est sans étoile et de calculer explicitement une expression sans étoile si c'est possible.

Théorème 1.146 (Schützenberger 1965)**.** *Pour tout langage rationnel L, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le langage L est sans étoile.*
2. *Le monoïde syntaxique $M(L)$ de L est apériodique.*
3. *Le langage L est reconnu par un monoïde apériodique.*

Le monoïde syntaxique du langage $(aa)^*$ est le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui n'est bien sûr pas apériodique. Le théorème précédent montre donc que ce langage n'est pas sans étoile.

On peut remarquer qu'il suffit qu'un langage soit reconnu par un monoïde apériodique pour que son monoïde syntaxique soit apériodique. On vérifie sans difficulté qu'un monoïde qui divise un monoïde apériodique est encore apériodique. La preuve du théorème se décompose en les sept lemmes techniques suivants.

Le lemme suivant traduit directement en terme de langages le résultat du lemme 1.144.

Lemme 1.147. *Le monoïde syntaxique d'un langage rationnel L est apériodique si et seulement si il existe un entier ω tel que*

$$\forall x, y, z \in A^* \quad xy^\omega z \in L \iff xy^{\omega+1}z \in L.$$

Pour un langage tel que $M(L)$ apériodique, on appelle *indice* et on note $i(L)$ le plus petit entier ω tel que $\forall x, y, z \in A^*\ xy^\omega z \in L \Leftrightarrow xy^{\omega+1}z \in L$.

Lemme 1.148. *Pour tous langages $K, L \subseteq A^*$ rationnels, on a*

$$\begin{aligned} i(\{a\}) &= 1 \\ i(K+L) &\leq \max(i(K), i(L)) \\ i(KL) &\leq i(K) + i(L) + 1 \\ i(A^* \setminus K) &= i(K) \end{aligned}$$

Le lemme précédent permet de montrer par récurrence sur (la taille de) l'expression rationnelle sans étoile que le monoïde syntaxique d'un langage sans étoile est apériodique. La réciproque est plus technique.

Dans un monoïde apériodique, l'élément neutre est le seul élément inversible puisque l'ensemble des éléments inversibles est un groupe. Le lemme suivant raffine cette remarque.

Lemme 1.149 (Simplification)**.** *Soient p, m et q trois éléments d'un monoïde apériodique fini. L'égalité $m = pmq$ implique les deux égalités $m = pm = mq$.*

Une conséquence directe du lemme est que l'élément neutre est le seul élément inversible à droite (ou à gauche). Si on a $mp = 1_M$, alors on a aussi $mpm = m$ et $mp = m$ d'après le lemme.

Preuve. D'après le lemme 1.144, il existe un entier ω tel que $s^\omega = s^{\omega+1}$ pour tout élément s du monoïde. On écrit alors les égalités

$$m = pmq = p^\omega mq^\omega = p^\omega mq^{\omega+1} = mq$$

et on procède pareillement pour $m = pm$. □

Le lemme précédent permet de montrer le lemme suivant.

Lemme 1.150. *Pour tout élément m d'un monoïde apériodique fini M, on a l'égalité*

$$\{m\} = (mM \cap Mm) \setminus J \qquad \text{où} \quad J = \{x \in M \mid m \notin MxM\}.$$

Preuve. Tout d'abord m appartient à $mM \cap Mm$ mais il n'appartient pas à J puisque $m \in MmM$. On en déduit l'inclusion $\{m\} \subseteq (mM \cap Mm) \setminus J$ qui est vraie même si M n'est pas apériodique.

On montre maintenant l'inclusion inverse. Soit maintenant m' un élément de $(mM \cap Mm) \setminus J$. Puisque $m' \in mM \cap Mm$, il existe deux éléments p et q de M tels que $m' = mp = qm$. Puisque m' n'appartient pas à J, il existe aussi deux éléments s et r de M tels que $m = sm'r$. En combinant $m' = mp$ et $m = sm'r$, on obtient $m = smpr$ qui donne $m = mpr$ par le lemme de simplification et donc $m = m'r$. En combinant cette dernière égalité avec $m' = qm$, on obtient $m' = qm'r$ et donc $m' = m'r$ par le lemme de simplification. □

Lemme 1.151. *Soit $\mu : A^* \to M$ un morphisme dans un monoïde apériodique fini M et soit $m \neq 1_M$ un élément de M différent de l'élément neutre. On a alors l'égalité*

$$\mu^{-1}(m) = (UA^* \cap A^*V) \setminus (A^*WA^*)$$

où les trois ensembles $U, V, W \subset A^*$ de mots sont donnés par

$$U = \bigcup_{\substack{n\mu(a)M = mM \\ n \notin mM}} \mu^{-1}(n)a, \qquad V = \bigcup_{\substack{Mm = M\mu(a)n \\ n \notin Mm}} a\mu^{-1}(n)$$

et

$$W = \{a \mid m \notin M\mu(a)M\} \cup \left(\bigcup_{\substack{m \in M\mu(a)nM \cap Mn\mu(b)M \\ m \notin M\mu(a)n\mu(b)M}} a\mu^{-1}(n)b \right).$$

Preuve. Puisque $m \neq 1_M$, les deux ensembles mM et Mm ne contiennent pas l'élément neutre 1_M d'après le lemme de simplification.

D'après le lemme précédent, un mot w vérifie $\mu(w) = m$ si et seulement si $\mu(w) \in mM \cap Mm$ et $m \in M\mu(w)M$.

On commence par montrer que $\mu(w) \in mM$ si et seulement si w se factorise uav tel que $n = \mu(u)$ vérifie $n \notin mM$ et $n\mu(a)M = mM$. L'appartenance $\mu(w) \in Mm$ se traite de manière symétrique. Soit u le plus long préfixe de w tel que $\mu(u) \notin mM$. Ce mot u existe puisque le mot vide est un préfixe de w et $\mu(\varepsilon) = 1_M$ n'appartient pas mM. Ce mot u est par définition différent de w. Le mot w se factorise $w = uav$ tel que $n = \mu(u)$ vérifie $n \notin mM$ et $n\mu(a)M = mM$.

Soit w un mot tel que $m \notin M\mu(w)M$. On montre que w se factorise soit $w = uav$ où $m \notin M\mu(a)M$ soit $w = uavbt$ tel que $n = \mu(v)$ vérifie $m \in M\mu(a)nM \cap Mn\mu(b)M$ et $m \notin M\mu(a)n\mu(b)M$. Soit v' un plus petit facteur de w tel que $m \notin M\mu(v')M$. Un tel mot existe car $m \notin M\mu(w)M$. Si v' est réduit à une lettre a, on a $w = uav$ où $m \notin M\mu(a)M$. Si v' est de longueur au moins 2, v' s'écrit $v' = avb$ avec les propriétés requises. □

Pour tout m, on pose $r(m) = |MmM|$. La preuve que $\mu^{-1}(m)$ est un langage sans étoile est faite par récurrence sur $|M| - r(m)$:

– si $r(m) = |M|$, alors $m = 1_M$ et on a

$$\mu^{-1}(1_M) = \{a \mid \mu(a) = 1_M\}^* = A^* \setminus A^*\{a \mid \mu(a) \neq 1_M\}A^*$$

– sinon, on écrit $\mu^{-1}(m) = (UA^* \cap A^*V) \setminus A^*WA^*$ grâce au lemme précédent. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux langages U, V et W.

Pour que cette preuve fonctionne, il reste à prouver les résultats suivants qui assure que les valeurs de n utilisées dans les définitions de U, V et W du lemme précédent vérifient bien $r(n) > r(m)$ et que l'hypothèse de récurrence peut être appliquée.

Lemme 1.152. *Pour tous éléments m et n d'un monoïde apériodique fini M, on a l'implication*

$$\left.\begin{array}{l} m \in nM \\ n \notin mM \end{array}\right\} \implies r(n) > r(m).$$

Preuve. De la relation $m \in nM$, on tire l'inclusion $MmM \subset MnM$. Pour montrer que cette inclusion est stricte, on montre que $n \notin MmM$. Puisque $m \in nM$, il existe un élément p tel que $np = m$. Si on suppose par l'absurde que $n \in MmM$, il existe deux éléments s et r tels que $n = smr$. En combinant ces deux égalités, on déduit que $n = snpr$ et donc $n = npr$ par le lemme de simplification. Ceci conduit à $n = mr$ qui contredit $n \notin mM$. Ceci prouve l'inégalité $r(n) > r(m)$. □

Lemme 1.153. *Pour tous éléments m, n, α et β d'un monoïde apériodique fini M, on a l'implication*

$$\left.\begin{array}{l} m \in M\alpha nM \cap Mn\beta M \\ m \notin M\alpha n\beta M \end{array}\right\} \implies r(n) > r(m).$$

Preuve. De la relation $m \in M\alpha nM$, on tire l'inclusion $MmM \subset MnM$. Pour montrer que cette inclusion est stricte, on montre que $n \notin MmM$. Puisque $m \in M\alpha nM \cap Mn\beta M$, il existe quatre éléments p, q, p' et q' tels que $m = p\alpha nq = p'n\beta q'$. Si on suppose par l'absurde que $n \in MmM$, il existe deux éléments s et r tels que $n = smr$. En combinant cette dernière égalité avec $m = p'n\beta q'$, on obtient $n = sp'n\beta q'r$ et donc $n = n\beta q'r$ par le lemme de simplification. En substituant dans $m = p\alpha nq$, on obtient $m = p\alpha n\beta q'r$ qui contredit $m \notin M\alpha n\beta M$. Ceci prouve l'inégalité $r(n) > r(m)$. □

On pourra consulter [Pin84] pour un exposé plus complet.

Exemple 1.154. Prenons $L = (ab)^*$ et considérons $M = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha, 0\}$. On a $M\alpha M = \{0, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta, \alpha\}$, ainsi :
- $\mu^{-1}(1) = \varepsilon$
- $\mu^{-1}(a) = (ab^*)a = (aA^* \cap A^*a) \setminus A^*(aa + bb)A^*$
  (en prenant $U = a, V = a, W = aa + bb$).

Exercice 1.155. Donner une expression sans étoile pour le langage $(ab + ba)^*$.

Solution. On a vu que les langages $(ab)^*$ et $(ab)^+$ sont sans étoile. On a alors la formule suivante

$$(ab+ba)^* = (ab)^*+(ba)^*+\big[((ab)^+b + (ba)^+a)A^* \cap A^*(a(ab)^+ + b(ba)^+)\big]\setminus A^*(a(ab)^*aa+b(ba)^*bb)A^*$$

1.13 Compléments

1.13.1 Conjecture de Černý

On s'intéresse ici à un problème ouvert connu sous le nom de conjecture de Černý. Pour un état p d'un automate déterministe $\mathcal{A}$ et un mot w, on note $p \cdot w$ l'unique état q, s'il existe, tel qu'il y ait un chemin dans $\mathcal{A}$ de p à q étiqueté par w. Un automate $\mathcal{A}$ est dit *synchronisant* s'il existe un mot w tel que $p \cdot w$ est égal à un état constant q pour tout état p de $\mathcal{A}$. La lecture du mot w ramène l'automate dans l'état q quelque soit l'état de départ. Le mot w est alors dit *synchronisant* pour $\mathcal{A}$.

Une question naturelle est de savoir la longueur minimale d'un mot synchronisant d'un automate à n états. La conjecture de Černý énonce qu'un tel

mot est de longueur au plus $(n-1)^2$. Cette borne ne peut être améliorée. Pour tout entier n, il existe un automate synchronisant $\mathcal{C}_n$ dont le mot synchronisant le plus court est de longueur $(n-1)^2$. La meilleure borne connue pour l'instant est $(n-1)^3/6$ même si la conjecture a déjà été prouvée pour des familles particulières d'automates.

L'automate $\mathcal{C}_n$ est défini de la manière suivante. Son ensemble d'états est $Q_n = \{0, \dots, n-1\}$. La lettre a laisse invariant tous les états sauf l'état 0 qui est envoyé sur 1. La lettre b effectue une permutation circulaire des états.

$$q \cdot a = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ q & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad q \cdot b = \begin{cases} q+1 & \text{si } q < n \\ 0 & \text{si } q = n \end{cases}$$

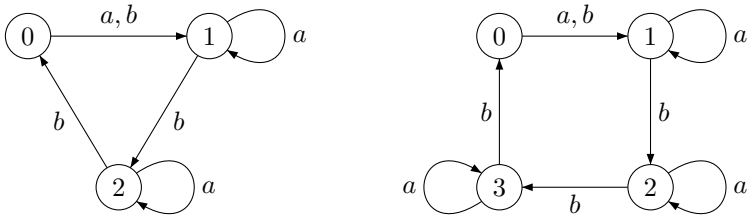


FIG. 1.28 – Les automates $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$

Exemple 1.156. Les automates $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ de la figure 1.28 sont synchronisants. Ils sont effectivement synchronisés par les mots ab^2a et ab^3ab^3a de longueur 4 et 9. Il est un plus délicat de prouver que ce sont les mots synchronisants les plus courts de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. On montre de même que le mot synchronisant le plus court de $\mathcal{C}_n$ est le mot $(ab^{n-1})^{n-2}a$ de longueur $(n-1)^2$.

1.13.2 Rationnels d'un monoïde quelconque

Jusqu'à maintenant, on a uniquement étudié les parties des monoïdes libres. La définition d'une partie rationnelle s'étend à n'importe quel monoïde. Il est intéressant de considérer d'autre monoïdes comme les monoïdes $A^* \times B^*$ ou plus généralement $A_1^* \times \cdots \times A_k^*$, les monoïdes commutatifs libres ou le groupe libre.

Les opérations rationnelles s'étendent de manière évidente aux parties d'un monoïde quelconque. Pour des parties K et L d'un monoïde M, le produit KL et l'étoile K^* sont définies de la manière suivante.

$$KL = \{kl \mid k \in K \text{ et } l \in L\} \quad \text{et} \quad K^* = \{k_1 \cdots k_n \mid k_1, \dots, k_n \in K\}.$$

L'étoile K^* est en fait le plus petit sous-monoïde de M contenant K et il est appelée le sous-monoïde *engendré* par K. La notation comporte une certaine ambiguïté puisque K^* peut noter le monoïde libre sur l'alphabet K où le sous-monoïde engendré par K dans M. Cette confusion est sans conséquence dans la mesure où on identifie très souvent une suite finie $k_1, \dots, k_n$ avec son produit $k_1 \cdots k_n$ dans M. L'application qui envoie toute suite $k_1, \dots, k_n$ sur $k_1 \cdots k_n$ est d'ailleurs un morphisme du monoïde libre K^* dans le monoïde M.

Définition 1.157. Soit M un monoïde. La famille notée $\operatorname{Rat} M$ des *parties rationnelles* est la plus petite famille de parties de M telle que

– $\varnothing \in \operatorname{Rat} M$ et $\{m\} \in \operatorname{Rat} M$ pour tout élément m de M ;

– Rat M est close pour les opérations rationnelles (l'union, le produit et l'étoile).

Dans le cas où le monoïde M est finiment engendré, on peut se contenter, dans la définition précédente, de supposer que les singletons $\{m_1\}, \ldots, \{m_n\}$ sont rationnels où $\{m_1, \ldots, m_n\}$ est une partie génératrice de M.

Un automate sur un monoïde M est un automate dont les étiquettes des transitions sont des éléments de M. Plus formellement, un automate $\mathcal{A}$ sur M est un quintuplet (Q, M, E, I, F) où Q est un ensemble fini d'états et E est un sous-ensemble de $Q \times M \times Q$. L'*étiquette* d'un chemin

$$q_0 \xrightarrow{m_1} q_1 \xrightarrow{m_2} \cdots \xrightarrow{m_n} q_n$$

est le produit $m_1 \cdots m_n$ dans M des étiquettes des transitions qui constituent le chemin. Le *comportement* d'un automate est l'ensemble des étiquettes des chemins acceptants (c'est-à-dire commençant dans un état initial et se terminant dans un état final). Le théorème de Kleene s'étend facilement à un monoïde quelconque. La preuve faite dans le cas d'un monoïde libre reste valide.

Théorème 1.158. *Une partie d'un monoïde M est rationnelle si et seulement si elle est le comportement d'un automate sur M.*

La construction du groupe libre ainsi que ses parties rationnelles sont décrites à la section 2.7.3 (p. 106).

Pour illustrer ces notions, on va donner quelques exemples dans le cas d'un monoïde $A^* \times B^*$ pour deux alphabets A et B. Une partie rationnelle de $A^* \times B^*$ est aussi appelée une *relation rationnelle* ou encore une *transduction rationnelle*. Un élément de $A^* \times B^*$ est une paire (u, v) de mots sur A et B qui est souvent notée $u|v$ en particulier pour les étiquettes des automates.

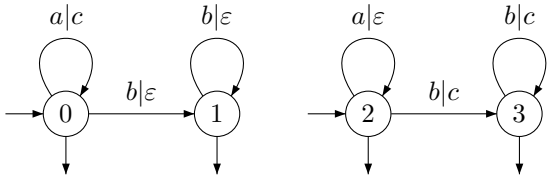


FIG. 1.29 – Un transducteur pour $(a, c)^*(b, \varepsilon)^* + (a, \varepsilon)^*(b, c)^*$

Exemple 1.159. La partie rationnelle $(a, c)^*(b, \varepsilon)^* + (a, \varepsilon)^*(b, c)^*$ du monoïde $\{a, b\}^* \times \{c\}^*$ est le comportement du transducteur de la figure 1.29.

Exemple 1.160. L'automate de l'addition donné à la figure 3.12 (p. 151) est en fait un transducteur dont le comportement est la partie du monoïde $\{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^*$ constituée des triplets (u, v, w) tels que la valeur binaire de w est égale à la somme des valeurs binaires de u et v.

Une partie K d'un monoïde M est dite *reconnaissable* s'il existe un morphisme μ de M dans un monoïde fini N et une partie P de N tels que $K = \mu^{-1}(P)$. L'ensemble des parties reconnaissables de M est notée $\mathrm{Rec}\, M$. Il découle directement de la définition que la famille des parties reconnaissables est close pour les opérations booléennes (union, intersection et complémentation). Un monoïde est dit *finiment engendré* s'il est égal au sous-monoïde engendré par une de ses parties finies.

Proposition 1.161. *Si M est finiment engendré, alors* $\mathrm{Rec}\, M \subseteq \mathrm{Rat}\, M$.

Les deux familles $\mathrm{Rec}\, M$ et $\mathrm{Rat}\, M$ coïncident lorsque M est un monoïde libre mais l'inclusion de la proposition précédente peut être stricte si M n'est pas libre. Si M est un monoïde de la forme $A^* \times B^*$, les parties reconnaissables sont les unions finies d'ensembles de la forme $K \times L$ où K et L sont respectivement des parties rationnelles de A^* et B^*. La diagonale $\Delta = \{(w, w) \mid w \in A^*\} = \{(a, a) \mid a \in A\}^*$ est une partie rationnelle de $A^* \times A^*$ qui n'est pas reconnaissable.

Preuve. Soit A un ensemble fini qui engendre M et soit μ un morphisme de M dans un monoïde fini N tel que $K = \mu^{-1}(P)$ pour une partie $P \subseteq N$. On construit l'automate $\mathcal{A}$ sur M égal à $(N, A, E, \{1_N\}, P)$ dont l'ensemble des transitions est $E = \{(n, a, n\mu(a)) \mid a \in A \text{ et } n \in N\}$. Il est facile de vérifier que pour tout m de M, il existe un chemin d'étiquette m de 1_N à $\mu(m)$. □

Proposition 1.162. *Soit M un monoïde. Si K est une partie reconnaissable et L une partie rationnelle de M, alors $K \cap L$ est une partie rationnelle.*

Preuve. Soit μ un morphisme de M dans un monoïde fini N tel que $K = \mu^{-1}(P)$ pour une partie $P \subseteq N$. Soit $\mathcal{A} = (Q, M, E, I, F)$ un automate sur M dont le comportement est L. On construit un automate $\mathcal{A}'$ dont le comportement est $K \cap L$. L'ensemble des états est $Q \times N$, les états initiaux sont ceux de $I \times \{1_N\}$ et les états finaux sont ceux de $F \times P$. Les transitions sont les triplets de la forme $((p, n), m, (q, n\mu(m))$ où (p, m, q) est une transition de $\mathcal{A}$. □

Chapitre 2

Langages algébriques

Les langages algébriques, aussi appelés langages *hors contexte* (*context-free* en anglais) constituent le deuxième niveau de la hiérarchie de Chomsky. Il furent initialement introduits pour modéliser les langues naturelles. Cette approche a été relativement abandonnée même si des grammaires locales sont encore utilisées pour décrire des constructions grammaticales. Par contre, ce modèle s'est avéré particulièrement adapté pour décrire la syntaxe des langages de programmation. D'un point de vue plus pratique, des outils tels `yacc` ou `bison` permettent de construire automatiquement un analyseur syntaxique à partir d'une grammaire qui satisfait quelques hypothèses supplémentaires.

Une première partie de ce chapitre traite des grammaires qui permettent d'engendrer ces langages algébriques. Une seconde partie est consacrée aux automates à pile qui acceptent les langages algébriques. Ces automates étendent les automates finis en utilisant une mémoire externe sous la forme d'une pile. Les liens avec les systèmes d'équations sont également abordés et utilisés pour prouver le théorème de Parikh. Pour tout ce chapitre, on se reportera à [Aut87] ou à [ABB97].

Les problèmes de décidabilité et de complexité concernant les langages algébriques sont abordés dans les deux chapitres suivants. Il sera en particulier montré que l'appartenance d'un mot à un langage algébrique peut être décidée en temps polynomial alors que l'égalité de deux langages algébriques est indécidable.

L'utilisation des grammaires pour construire des analyseurs syntaxiques n'est pas abordée dans ce chapitre. Pour ces aspects plus pratiques, il est préferable de consulter des ouvrages spécialisés comme [ASU86].

2.1 Grammaires algébriques

2.1.1 Définitions et exemples

Une grammaire algébrique est en quelque sorte un système de réécriture qui engendre un ensemble de mots à partir d'un axiome. Afin de bien distinguer les lettres des mots engendrés des lettres intermédiares, l'alphabet est partagé en lettres terminales et en lettres non terminales appelées variables. Seules les variables peuvent subir une réécriture.

Définition 2.1 (Grammaire algébrique)**.** Une *grammaire algébrique* G est un triplet (A, V, P) où A et V sont des alphabets finis et disjoints et où P est une partie finie de $V \times (A \cup V)^*$. Les symboles de A sont appelés *terminaux* et ceux de V sont appelés *non terminaux* ou *variables*. Les éléments de P sont appelés *règles*. Chaque règle est une paire (X, u) où X est une variable et u est un mot sur l'alphabet $A + V$.

Les grammaires définies ici sont appelées algébriques pour les distinguer de grammaires plus générales qui sont abordées au chapitre suivant (cf. définitions 3.51 et 3.52 p. 144). Le terme *algébrique* sera justifié en montrant que les langages engendrés par les grammaires sont solutions de systèmes d'équations polynomiales (cf. proposition 2.25 p. 78). Comme toutes les grammaires considérées dans ce chapitre sont algébriques, elles seront simplement appelées grammaires dans le reste de ce chapitre.

On note $X \to u$ lorsque $(X, u) \in P$ est une règle de la grammaire. Par extension, si $(X, u_1), \ldots, (X, u_n)$ sont des règles, on écrit $X \to u_1 + \cdots + u_n$. Les éléments X et u d'une règle $X \to u$ sont respectivement appelés *membre gauche* et *membre droit* de la règle.

Exemple 2.2. Soit la grammaire $G = (A, V, P)$ définie par

$$A = \{a, b\}, \quad V = \{S\}, \quad P = \{S \to aSb + \varepsilon\}$$

Cette grammaire a deux lettres terminales a et b, une seule variable S et deux règles (S, aSb) et (S, ε). On verra que le langage engendré par cette grammaire est $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Lorsqu'une grammaire est donnée de manière explicite, on se contente souvent de donner les règles. Les variables de la grammaire sont alors implicitement les symboles qui apparaissent comme membre gauche des règles et toutes les autres lettres sont implicitement des lettres terminales. Pour la grammaire donnée ci-dessus, on aurait pu simplement écrire $P = \{S \to aSb + \varepsilon\}$.

Définition 2.3 (Dérivation)**.** Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire et soient u et v deux mots sur $A + V$. On dit que u se *dérive* en (ou *produit*) v et on note $u \to v$ lorsque il existe $\alpha, \beta \in (A + V)^*$ et $X \in V$ tels que :

$$u = \alpha X \beta, v = \alpha w \beta \text{ et } (X \to w) \in P$$

La dérivation est dite *gauche* (respectivement *droite*) si α (respectivement β) appartient à A^*. Ceci signifie que c'est la variable la plus à gauche (respectivement à droite) qui est réécrite.

Pour $k = 0$, on note $u \xrightarrow{k} v$ si $u = v$ et pour $k \geq 1$, on note $u \xrightarrow{k} v$ s'il existe des mots $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ tels que $u \to u_1 \to \cdots \to u_{k-1} \to v$. Plus généralement, on notera $u \xrightarrow{*} v$ s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $u \xrightarrow{k} v$. La relation $\xrightarrow{*}$ est donc la clôture réflexive et transitive de la relation $\to$.

Exemple 2.4. Soit G la grammaire donnée à l'exemple 2.2. La variable S peut se dériver en le mot aSb qui se dérive à nouveau en $aaSbb$, qui se dérive encore en $aaaSbbb$ qui se dérive finalement en a^3b^3 : $S \xrightarrow{*} a^3b^3$. Il est facile de voir que les mots $w \in A^*$ tels que $S \xrightarrow{*} w$ sont justement les mots de la forme $a^n b^n$ pour $n \geq 0$.

Les langages algébriques sont aussi appelés langages hors contexte parce que lors d'une dérivation, le remplacement de la variable X par w dans le mot $u = \alpha X \beta$ est indépendant des contextes α et β. Il existe aussi des grammaires contextuelles (cf. section 3.7.2) dont les membres gauches de règle ne sont plus simplement des variables mais des mots qui permettent de spécifier le contexte de remplacement d'une variable.

Définition 2.5 (Langage engendré)**.** Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire et soit u un mot sur $(A + V)^*$. On note respectivement $\widehat{L_G}(u)$ et $L_G(u)$ les langages $\{v \in (A + V)^* \mid u \xrightarrow{*} v\}$ et $\widehat{L_G}(u) \cap A^*$

Dans une grammaire G, une variable S_0 appelée *axiome* est parfois distinguée. Le *langage engendré* par la grammaire est alors implicitement le langage $L_G(S_0)$.

Définition 2.6 (Langage algébrique)**.** Un langage est dit *algébrique* s'il peut être engendré par une grammaire, c'est-à-dire s'il est égal $L_G(S)$ pour une variable S d'une grammaire G.

Exemple 2.7. Soit G la grammaire donnée à l'exemple 2.2. Le langage $L_G(S)$ est égal à $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ qui est donc un langage algébrique.

Grâce au lemme fondamental 2.11 et à la clôture des langages algébriques par produit (cf. proposition 2.51), on constate que $L_G(u)$ est encore algébrique pour tout mot $u \in (A + V)^*$. La notation L_G peut être étendue aux langages en posant $L_G(K) = \bigcup_{u \in K} L_G(u)$ pour $K \subset (A + V)^*$. La clôture des langages algébriques par substitution algébrique (cf. proposition 2.53) montre que $L_G(K)$ reste algébrique quand K est algébrique.

Exemple 2.8. Quelques exemples de grammaires et de langages algébriques.

1. Le langage a^*b est engendré par la grammaire $S \to aS + b$. Il sera montré que tous les langages rationnels sont algébriques.
2. Grammaire
$$\begin{cases} A = \{a, b, c\} \\ S \to AS + \varepsilon \\ A \to AB + a \\ B \to BC + b \\ C \to CA + c \end{cases}$$
3. Langage de Dyck sur n paires de parenthèses.
$$\begin{cases} A_n = \{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\} \\ S \to ST + \varepsilon \\ T \to a_1 S \bar{a}_1 + \cdots + a_n S \bar{a}_n \end{cases}$$
Les langages $D_n = L_G(T)$ et $D_n^* = L_G(S)$ sont respectivement appelés *langage de Dyck primitif* et *langage de Dyck*. On vérifie que D_n^* est l'ensemble des mots qui se réduisent au mot vide en appliquant les réductions de la forme $a_i \bar{a}_i \to \varepsilon$.
4. *Langage de Luckasiewicz*
$$S \to aSS + \bar{a}$$
Le langage Ł $= L_G(S)$ est l'ensemble des mots w tels que $|w|_{\bar{a}} = |w|_a + 1$ et $|u|_{\bar{a}} \leq |u|_a$ pour tout préfixe (propre) u de w. On a l'égalité Ł $= D_1^* \bar{a}$.

5. *Langage de Goldstine*

$$L = \{a^{n_0}ba^{n_1}b\cdots a^{n_k}b \mid k \geq 0 \text{ et } \exists\, j \geq 0, n_j \neq j\}$$

Le langage L est égal à $L_G(S)$ où la grammaire G est constituée des règles suivantes.

$$\begin{aligned} T_0 &\to aT_0 + \varepsilon \\ T_1 &\to T_0 b \\ T_2 &\to T_1T_2 + \varepsilon \\ T_3 &\to T_1T_3a + T_1T_2 + aT_0 \\ S &\to T_3bT_2 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $L_G(T_0) = a^*$, $L_G(T_1) = a^*b$, $L_G(T_2) = (a^*b)^*$, $L_G(T_3) = \{a^{n_0}ba^{n_1}b\cdots a^{n_k} \mid k \geq 0 \text{ et } n_k \neq k\}$ et $L_G(S) = L$.

Exercice 2.9. Montrer que l'ensemble des palindromes écrits sur un alphabet A est un langage algébrique. Montrer que le complémentaire de ce langage est aussi algébrique.

Solution. Pour simplifier, on suppose que l'alphabet est $A = \{a, b\}$. L'ensemble des palindromes sur cet alphabet est engendré par la grammaire $S \to aSa + bSb + a + b + \varepsilon$. Le complémentaire est engendré par la grammaire $S \to aSa + bSb + aTb + bTa,\ \ T \to aTa + aTb + bTa + bTb + a + b + \varepsilon$.

Exercice 2.10. Soit A un alphabet. Montrer que le langage

$$L = \{ww' \mid w, w' \in A^*, w \neq w' \text{ et } |w| = |w'|\}$$

est algébrique.

Le résultat de cet exercice est à comparer avec ceux de l'exercice 2.49. Les langages L et L_3 semblent très similaires bien que L soit algébrique et L_3 ne le soit pas.

Solution. On suppose pour simplifier que A est l'alphabet $\{a, b\}$. La preuve se généralise sans problème à un alphebet ayant plus de deux lettres. Un mot x appartient L si et seulement si il se factorise $x = uawbv$ ou $x = ubwav$ avec $|w| = |u| + |v|$. Le mot w peut à nouveau être factorisé $w = u'v'$ avec $|u'| = |u|$ et $|v'| = |v|$. On en déduit la grammaire G telle que $L = L_G(S)$.

$$\begin{cases} S \to S_aS_b + S_bS_a \\ S_a \to aS_aa + aS_ab + bS_aa + bS_ab + a \\ S_b \to aS_ba + aS_bb + bS_ba + bS_bb + b \end{cases}$$

Le lemme suivant énonce un résultat très simple mais il permet de formaliser beaucoup de preuves en raisonnant sur la longueur des dérivations. Il établit que les dérivations partant d'un mot $u = u_1u_2$ se décomposent en des dérivations partant de u_1 et des dérivations partant de u_2 et que ces deux types de dérivations sont indépendantes.

Lemme 2.11 (Fondamental)**.** *Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire et soit u et v deux mots sur $(A + V)^*$. On suppose que u se factorise $u = u_1u_2$. Il existe une dérivation $u \xrightarrow{k} v$ de longueur k si et seulement si v se factorise $v = v_1v_2$ et s'il existe deux dérivations $u_1 \xrightarrow{k_1} v_1$ et $u_2 \xrightarrow{k_2} v_2$ où $k = k_1 + k_2$.*

Une manière un peu moins précise d'énoncer le lemme fondamental est d'écrire que pour tous mots u et v sur $(A+V)^*$, on a l'égalité

$$\widehat{L_G}(uv) = \widehat{L_G}(u)\widehat{L_G}(v).$$

Preuve. Il est aisé de combiner les dérivations $u_1 \xrightarrow{k_1} v_1$ et $u_2 \xrightarrow{k_2} v_2$ pour obtenir une dérivation $u_1u_2 \xrightarrow{k} v_1v_2$ de longueur $k_1 + k_2$. La réciproque se montre par induction sur k. □

2.1.2 Grammaires réduites

Les manipulations sur les grammaires algébriques sont souvent facilitées par des règles d'une forme particulière. Il existe plusieurs formes normales de grammaires plus ou moins élaborées. Nous commençons par quelques formes normales très faciles à obtenir. Nous insistons sur le côté calculatoire pour bien montrer que ces formes normales peuvent être effectivement calculées.

La notion de grammaire réduite est l'analogue pour les grammaires de la notion d'automate émondé. De manière intuitive, une grammaire est réduite si elle ne contient pas de variable trivialement inutile.

Définition 2.12 (Grammaire réduite)**.** Une grammaire $G = (A, V, P)$ est dite *réduite* pour $S_0 \in V$ si

1. pour tout $S \in V$, $L_G(S) \neq \varnothing$,
2. pour tout $S \in V$, il existe $u, v \in (A+V)^*$ tels que $S_0 \xrightarrow{*} uSv$.

La première condition signifie que toute variable peut produire un mot et la seconde condition signifie que toute variable peut être atteinte à partir de la variable S_0.

Proposition 2.13 (Réduction)**.** *Pour toute grammaire $G = (A, V, P)$ et toute variable $S_0 \in V$, il existe une grammaire G' réduite pour T telle que $L_G(S_0) = L_{G'}(T)$.*

Preuve. Pour réduire, on applique successivement les deux étapes suivantes. Il est à noter que l'ordre des étapes est important.

La première étape consiste à supprimer des variables S telles que $L_G(S) = \varnothing$. On définit par récurrence une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles de symboles de $A+V$ par

$$\begin{aligned} U_0 &= A, \\ U_{n+1} &= U_n \cup \{S \in V \mid S \to w \text{ et } w \in U_n^*\} \quad \text{pour } n \geq 0. \end{aligned}$$

Puisque l'ensemble $A+V$ est fini et que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante, celle-ci est constante à partir d'un certain rang. Soit U l'ensemble $\bigcup_{n\geq 0} U_n$. On prouve par récurrence sur la longueur d'une plus petite dérivation que $U \cap V$ est l'ensemble $\{S \mid L_G(S) \neq \varnothing\}$. On supprime ainsi les variables qui ne sont pas dans $U \cap V$.

La seconde étape consiste à supprimer les variables inaccessibles à partir de l'axiome S_0. On définit par récurrence une suite $(W_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles de variables par

$$\begin{aligned} W_0 &= \{S_0\}, \\ W_{n+1} &= W_n \cup \{S \in V \mid \exists\, S' \in W_n, S' \to uSv \text{ avec } u, v \in (A+V)^*\}. \end{aligned}$$

Puisque V est fini et que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est croissante, celle-ci est constante à partir d'un certain rang. On montre que l'ensemble $W = \bigcup_{n\geq 0} W_n$ est égal à l'ensemble $\{S \mid S_0 \xrightarrow{*} uSv \text{ avec } u, v \in A^*\}$ en utilisant le fait que $L_G(S)$ est non vide pour toute variable S. Ainsi, W ne garde que les variables accessibles depuis S_0. □

2.1.3 Grammaires propres

Nous continuons de mettre les grammaires sous des formes plus faciles à manipuler en éliminant certaines règles souvent gênantes.

Définition 2.14 (Grammaire propre)**.** Une grammaire $G = (A, V, P)$ est *propre* si elle ne contient aucune règle de la forme $S \to \varepsilon$ ou de la forme $S \to S'$ pour $S, S' \in V$.

Exemple 2.15. la grammaire $G = \{S \to aSb{+}\varepsilon\}$ n'est pas propre puisque $S \to \varepsilon$. Par contre, la grammaire $G' = \{S \to aSb + ab\}$ est propre et elle engendre les mêmes mots à l'exception du mot vide.

La proposition suivante établit que toute grammaire peut être rendue propre en perdant éventuellement le mot vide.

Proposition 2.16. *Pour toute grammaire $G = (A, V, P)$ et tout $S \in V$, il existe une grammaire propre $G' = (A, V', P')$ et $S' \in V'$ telle que $L_{G'}(S') = L_G(S) \setminus \{\varepsilon\}$.*

La preuve de la proposition donne une construction effective d'une grammaire propre. Elle utilise la notion de substitution qui est maintenant définie.

Définition 2.17 (Substitution)**.** Soient A et B deux alphabets. Une *substitution* de A^* dans B^* est un morphisme $\sigma : A^* \to \mathfrak{P}(B^*)$ où $\mathfrak{P}(B^*)$ est muni du produit des langages.

Preuve. En utilisant la proposition précédente, on peut supposer que la grammaire G est réduite. La construction se décompose en les deux étapes suivantes. L'ordre des étapes a de nouveau son importance.

La première étape consiste à supprimer les règles de la forme $S \to \varepsilon$. On commence par calculer l'ensemble $U = \{S \mid S \xrightarrow{*} \varepsilon\}$ des variables qui produisent le mot vide. On définit par récurrence la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles de variables par

$$\begin{aligned} U_0 &= \{S \mid S \to \varepsilon\}, \\ U_{n+1} &= U_n \cup \{S \mid S \to w \text{ et } w \in U_n^*\}. \end{aligned}$$

La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang. On montre par récurrence que $U = \bigcup_{n\geq 0} U_n$ est l'ensemble $\{S \mid S \xrightarrow{*} \varepsilon\}$ des variables qui produisent le mot vide. On introduit la substitution σ de $(A + V)^*$ dans $(A + V)^*$ par

$$\sigma(a) = a \quad \text{pour } a \in A$$

$$\sigma(S) = \begin{cases} S + \varepsilon & \text{si } S \xrightarrow{*} \varepsilon \\ S & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } S \in V.$$

La première étape consiste alors à procéder aux deux transformations suivantes sur la grammaire G. L'idée intuitive est de remplacer par le mot vide dans les membres droits de règles les variables qui produisent le mot vide.

1. Supprimer les règles $S \to \varepsilon$.
2. Ajouter toutes les règles $S \to u$ où $S \to w$ est une règle et $u \in \sigma(w)$.

On montre par récurrence sur la longueur des dérivations que dans la nouvelle grammaire, chaque variable engendre les même mots au mot vide près.

La seconde étape consiste à supprimer les règles de la forme $S \to S'$ où S et S' sont deux variables. Puisqu'aucune variable ne produit le mot vide, on a une dérivation $S \xrightarrow{*} S'$ si et seulement si il existe des variables $S_1, \ldots, S_n$ telles que $S_1 = S$, $S_n = S'$ et $S_i \to S_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. La relation $\xrightarrow{*}$ restreinte aux variables est donc la clôture transitive et réflexive de la relation $\to$ restreinte aux variables.

La seconde étape consiste alors à procéder aux deux transformations suivantes sur la grammaire G. L'idée intuitive est de remplacer par une seule dérivation une suite de dérivations $S_i \to S_{i+1}$ suivie d'une dérivation $S_n \to w$ où $w \notin V$.

1. Supprimer les règles $S \to S'$.
2. Ajouter les règles $S \to w$ où $S \xrightarrow{*} S'$, et $S' \to w$ est une règle avec $w \notin V$.

On vérifie sans difficulté que la grammaire obtenue est propre et qu'elle engendre le même langage.

Une autre méthode consiste à d'abord quotienter l'ensemble V par la relation d'équivalence $\equiv$ définie par

$$S \equiv S' \overset{\text{def}}{\iff} (S \xrightarrow{*} S' \text{ et } S' \xrightarrow{*} S).$$

La grammaire obtenue engendre le même langage car $S \equiv S'$ implique que $L_G(S) = L_G(S')$. La relation $\xrightarrow{*}$ devient alors un ordre sur le quotient. On supprime alors les règles $S \to S'$ où S est maximal pour cet ordre en ajoutant les règles $S' \to w$ pour chaque règle $S \to w$. Le processus est itéré avec les nouvelles variables devenues maximales pour l'ordre $\xrightarrow{*}$. □

Exemple 2.18. La grammaire $\{S \to aS\bar{a}S + \varepsilon\}$ est transformée en la grammaire $\{S \to aS\bar{a}S + aS\bar{a} + a\bar{a}S + a\bar{a}\}$ par la première étape de la preuve.

Exercice 2.19. Montrer qu'il existe un algorithme pour déterminer pour une grammaire G et pour une variable S de G si le langage $L_G(S)$ est infini ou non.

Solution. On suppose la grammaire $G = (A, V, P)$ propre. On construit alors le graphe H sont l'ensemble des sommets est V et l'ensemble des arêtes est l'ensemble des paires (S, T) telles qu'il existe une règle $S \to w$ avec $w = uTv$ et $u, v \in (A + V)^*$ dans G. Il n'est pas difficile de voir que $L_G(S)$ est infini si et seulement si il existe un cycle dans H qui soit accessible à partir de S.

2.1.4 Forme normale quadratique

Nous terminons par la forme normale quadratique appelée aussi forme normale de Chomsky. Celle-ci pemet en autre de savoir si un mot est engendré par une grammaire.

Définition 2.20 (Forme normale quadratique)**.** Une grammaire est en *forme normale quadratique* si toutes ses règles sont d'une des formes suivantes :
- $S \to S_1 S_2$ où $S_1, S_2 \in V$
- $S \to a$ où $a \in A$

Il faut remarquer qu'une grammaire en forme quadratique est nécessairement propre. En particulier, elle ne peut pas engendrer le mot vide.

Proposition 2.21 (Forme normale quadratique)**.** *Pour toute grammaire $G = (A, V, P)$ et tout $S \in V$, il existe une grammaire en forme normale quadratique $G' = (A, V', P')$ et $S' \in V'$ telles que $L_{G'}(S') = L_G(S) \setminus \{\varepsilon\}$.*

Preuve. Grâce à la proposition 2.16, on peut supposer que la grammaire G est propre. Ensuite, la construction se décompose à nouveau en deux étapes.

La première étape consiste à se ramener à une grammaire où tous les membres droits de règles sont soit une lettre terminale soit un mot formé uniquement de variables, c'est-à dire d'une des formes suivantes.

- $S \to a$ où $a \in A$
- $S \to S_1 S_2 \cdots S_n$ où $S_1, \ldots, S_n \in V$

Soit $V' = \{V_a \mid a \in A\}$ un ensemble de nouvelles variables en bijection avec A. Soit G' la grammaire $(A, V \cup V', P')$ où P' est l'ensemble $\{V_a \to a \mid a \in A\} \cup \{S \to \sigma(w) \mid S \to w \in P\}$ et où σ est la substitution définie par $\sigma(S) = S$ pour $S \in V$ et $\sigma(a) = V_a$ pour $a \in A$.

Dans la seconde étape, les règles $S \to S_1 \cdots S_n$ avec $n > 2$ sont supprimées et remplacées par d'autres nouvelles règles. Dans ce but, on introduit les nouvelles variables $S'_1, \ldots, S'_{n-1}$ et on remplace $S \to S_1 \cdots S_n$ par les n règles suivantes.

$$\begin{cases} S \to S_1 S'_2 \\ S'_i \to S_i S'_{i+1} \text{ pour } 2 \leq i < n-1 \\ S'_{n-1} \to S_{n-1} S_n \end{cases}$$

□

Une conséquence de la forme normale de Chomsky est qu'il existe un algorithme pour savoir si un mot donné est engendré par une grammaire également donnée. On a déjà vu qu'il est possible de savoir si une grammaire engendre le mot vide. Dans une grammaire en forme quadratique, chaque dérivation remplace une variable par une lettre terminale ou augmente le nombre de d'occurrences de variables dans le mot. Il s'ensuit qu'une dérivation d'une variable à un mot w formé de lettres terminales est de longueur au plus $2|w|$. Pour savoir si une grammaire G engendre un mot w non vide, on remplace d'abord la grammaire G par une grammaire équivalente G' en forme normale quadratique puis on examine toutes les dérivations de longueur au plus $2|w|$ de G'. Cet algorithme est n'est pas très efficace car le nombre de dérivations est exponentiel. La transformation d'une grammaire quelconque en une grammaire en forme normale quadratique peut aussi radicalement changer la taille de la grammaire. On verra qu'il existe un algorithme en temps polynomial pour savoir si un mot est engendré par une grammaire (cf. p. 169).

2.2 Systèmes d'équations

On va voir que les langages algébriques sont les solutions des systèmes polynomiaux, ce qui justifie la terminologie. On utilisera cette approche pour montrer le théorème de Parikh qui établit que tout langage algébrique est commutativement équivalent à un langage rationnel.

2.2.1 Substitutions

À une grammaire, on peut associer un système d'équations en langages. Soit par exemple la grammaire $G = (A, V, P)$ avec $A = \{a, b\}$, $V = \{X_1, X_2\}$ et P donné par les règles suivantes :

$$\begin{cases} X_1 \longrightarrow X_1X_2 + \varepsilon \\ X_2 \longrightarrow aX_2 + b. \end{cases}$$

On associe à cette grammaire le système

$$\begin{cases} L_1 = L_1L_2 + \varepsilon \\ L_2 = aL_2 + b \end{cases}$$

en les langages L_1 et L_2 sur A.

On introduit quelques notations pratiques qui aident à formaliser ceci. Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire dont l'ensemble des variables est $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ et soit $L = (L_1, \ldots, L_n)$ un n-uplet de langages sur A. On définit successivement des opérations de substitution par

$$\begin{aligned} \varepsilon(L) &= \{\varepsilon\} \\ a(L) &= \{a\} \text{ pour } a \in A \\ X_i(L) &= L_i \\ xy(L) &= x(L)y(L) \text{ pour } x, y \in (A + V)^* \\ K(L) &= \bigcup_{w \in K} w(L) \text{ pour } K \subset (A + V)^* \end{aligned}$$

On notera la cohérence dans le cas particulier $L = (X_1, \ldots, X_n)$ avec la notation $\alpha(X_1, \ldots, X_n)$ marquant une simple dépendance en $X_1, \ldots, X_n$.

Le point important est de voir qu'on l'on procède bel est bien à une substitution des X_i par les L_i correspondants.

2.2.2 Système d'équations associé à une grammaire

Définition 2.22. Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire où $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Le système associé à G est formé par les n équations

$$L_i = \sum_{X_i \longrightarrow w} w(L) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

en les variables $L_1, \ldots, L_n$.

Notation 2.23. On notera également

$$L_G := (L_G(X_1), \ldots, L_G(X_n)).$$

La proposition suivante est essentiellement une reformulation du lemme fondamental 2.11 (p. 72).

Proposition 2.24. *Pour tout mot $w \in (A + V)^*$, on a*

$$L_G(w) = w(L_G).$$

Preuve. Le résultat est déjà vrai sur les symboles de base ε, a et X_i :

$$\begin{aligned} L_G(\varepsilon) &= \varepsilon = \varepsilon(L_G) \\ L_G(a) &= a = a(L_G) \\ L_G(X_i) &= X_i(L_G). \end{aligned}$$

On écrit $w = w_1 \dots w_n$ où $w_1, \dots, w_n$ sont les lettres de w et on applique les règles de substitution données ci-dessus.

$$\begin{aligned} L_G(w) &= L_G(w_1 \dots w_n) \\ &= L_G(w_1) \dots L_G(w_n) \\ &= w_1(L_G) \dots w_n(L_G) \\ &= w_1 \dots w_n(L_G) \\ &= w(L_G). \end{aligned}$$

□

Voyons à présent le lien entre solutions du système associé et langages engendrés par les X_i.

2.2.3 Existence d'une solution pour $\mathcal{S}(G)$

Proposition 2.25 (Minimalité des langages engendrés)**.** *Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire avec $V = \{X_1, \dots, X_n\}$. Alors L_G est la solution minimale (pour l'inclusion composante par composante) du système $\mathcal{S}(G)$ associé à G.*

Lemme 2.26. *Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire et soit L une solution du système $\mathcal{S}(G)$. Si les deux mots w et w' sur $(A + V)^*$ vérifient $w \xrightarrow{*} w'$, alors $w(L) \supset w'(L)$.*

Preuve. Il suffit de montrer le résultat pour une seule dérivation. Le cas général se prouve par récurrence sur la longueur de la dérivation. Supposons que $w = uX_iv \to uzv = w'$ où $X_i \to z$ est une règle de la grammaire. Puisque L est solution de $\mathcal{S}(G)$, on a l'égalité $L_i = \sum_{X_i \longrightarrow \gamma} \gamma(L)$ et donc l'inclusion $L_i \supset z(L)$. Il en découle que $w(L) \supset w'(L)$. □

On peut maintenant procéder à la preuve de la proposition.

Preuve.
- L_G est bien une solution de $\mathcal{S}(G)$:

$$\begin{aligned} L_G(X_i) &= \sum_{X_i \longrightarrow \alpha} L_G(\alpha) \\ &= \sum_{X_i \longrightarrow \alpha} \alpha(L_G) \end{aligned}$$

  d'après la proposition 2.24.
- Par ailleurs, soit $L = (L_1, \dots, L_n)$ une solution de $\mathcal{S}(G)$. Pour tout mot $w \in L_G(X_i)$, on a par définition une dérivation $X_i \xrightarrow{*} w$ et par le lemme précédent l'inclusion $w(L) \subset X_i(L)$. Comme $w \in A^*$, on $w(L) = w$ et donc $w \in L_i$. Ceci prouve l'inclusion $L_G(X_i) \subset L_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

□

La proposition précédente justifie a posteriori la terminologie des langages algébriques. Il sont les solutions minimales des systèmes d'équations polynomiales.

Bien que la proposition nous donne toujours l'existence d'une solution de $\mathcal{S}(G)$, l'unicité est généralement fausse. Considérer par exemple la grammaire $X \to XX$ dont le système associé est l'équation $L = LL$. Une solution est $L_G(X) = \varnothing$, mais tous les langages de la forme L^* pour $L \subset A^*$ sont également solutions.

La proposition suivante donne des conditions pour avoir l'unicité.

2.2.4 Unicité des solutions propres

Définition 2.27 (Solution propre)**.** Une solution L de $\mathcal{S}(G)$ est dite *propre* si tous les L_i sont propres, c'est-à-dire ne contiennent pas le mot vide ε.

Proposition 2.28 (Unicité des solutions propres)**.** *Soit G une grammaire propre. Alors L_G est l'unique solution* propre *de $\mathcal{S}(G)$.*

Preuve. Puisque G est propre, L_G est propre, et la proposition précédente nous dit que L_G est une solution de $\mathcal{S}(G)$. Ainsi L_G est une solution propre.

Pour un entier l, on introduit la relation $\overset{l}{\sim}$ qui capture le fait que deux langages coïncident pour les mots de longueur inférieure à l. Pour deux langages K et K' et un entier l, on note $K \overset{l}{\sim} K'$ si l'égalité

$$\{w \in K \mid |w| \leq l\} = \{w \in K' \mid |w| \leq l\},$$

est vérifiée. Cette notation est étendue aux n-uplets composante par composante. Soient $L = (L_1, \ldots, L_n)$ et $L' = (L'_1, \ldots, L'_n)$ deux solutions propres de G. On va montrer par récurrence sur l que $L \overset{l}{\sim} L'$ pour tout entier $l \geq 0$ ce qui prouve que $L = L'$.

Pour $1 \leq i \leq n$, on introduit le langage fini $S_i = \{w \mid X_i \to w\}$ de sorte que le système $\mathcal{S}(G)$ s'écrit maintenant

$$L_i = S_i(L) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Comme L et L' sont propres, aucune de leurs composantes ne contient le mot vide et on a $L \overset{0}{\sim} L'$.

Supposons $L \overset{l}{\sim} L'$ pour $l \geq 0$ et montrons $L \overset{l+1}{\sim} L'$, c'est-à-dire

$$L_i \overset{l+1}{\sim} L'_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

ou encore

$$S_i(L) \overset{l+1}{\sim} S_i(L') \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Soit donc $1 \leq i \leq n$ fixé, et soit $w \in S_i$ (c'est-à-dire un mot tel que $X_i \to w$), que l'on écrit $w = w_1 \ldots w_p$ où chaque w_j est soit une lettre de A, soit une variable $X_k \in V$. L'entier p est non nul car la grammaire G est propre.

Soit ensuite $u \in w(L)$ de longueur inférieure à $l + 1$. Il se décompose $u = u_1 \ldots u_p$ où $u_j = w_j$ si w_j appartient à A et $u_j \in L_k$ si $w_j = X_k$. Comme la solution est propre, chaque mot u_j est non vide. Il s'ensuit que chaque mot u_j vérifie $|u_j| \leq l$. Sinon on aurait $p = 1$ et la grammaire G contiendrait une règle $X_i \to X_k$. Ceci est exclu car la grammaire G est propre.

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $u_j \in L'_k$ si $w_j = X_k$ et que u appartient aussi à $w(L')$. On a montré l'inclusion $L_i \subseteq L'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Les inclusions inverses sont aussi vérifiées par symétrie. Ceci montre que $L \overset{l+1}{\sim} L'$ et termine la preuve que $L = L'$. □

2.2.5 Théorème de Parikh

On montre ici que tout langage algébrique est commutativement équivalent à un langage rationnel.

Définition 2.29. Deux mots w et w' sont dits *anagrammes* s'il existe n lettres $a_1, \ldots, a_n$ et une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $w = a_1 \ldots a_n$ et $w' = a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)}$. L'ensemble des anagrammes d'un mot w est noté $\overline{w}$.

Pour un langage L, on appelle *image commutative* et on note $\overline{L}$ l'ensemble $\{\overline{w} \mid w \in L\}$ des classes des mots de L. Deux langages L et M sont dits *commutativement équivalents* si $\overline{L} = \overline{M}$. Pour tous langages L et M, les deux égalités suivantes sont bien sûr vérifiées.

$$\overline{L + M} = \overline{L} + \overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{LM} = \overline{ML}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de Parikh.

Théorème 2.30 (Parikh)**.** *Tout langage algébrique L est commutativement équivalent à un langage rationnel R ($\overline{L} = \overline{R}$).*

Une conséquence du théorème est que sur un alphabet unaire, c'est-à-dire avec une seule lettre, tous les langages algébriques sont rationnels. Par contre, dès que l'alphabet contient deux lettres, il existe des langages algébriques commutatifs (c'est-à-dire clos par passage à un anagramme) qui ne sont pas rationnels. Un exemple est le langage $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ des mots ayant d'occurrences de a que d'occurrences de b.

Les grandes étapes de la preuve sont les suivantes. On associe à une grammaire un système d'équations en commutatif et on montre que les langages engendrés par une grammaire propre sont l'unique solution du système. On montre de manière indépendante que tout système en commutatif admet aussi une solution rationnelle. Une autre preuve plus élémentaire se trouve en [Koz97, p. 201].

L'exemple suivant illustre l'énoncé du théorème.

Exemple 2.31. Au langage algébrique $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, on peut par exemple associer le langage rationnel $R = (ab)^*$ tel que $\overline{L} = \overline{R}$.

2.2.6 Systèmes d'équations en commutatifs

Nous montrons ici que des langages algébriques engendrés par une grammaire propre sont la solution unique du système commutatif associé à la grammaire.

Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire dont l'ensemble des variables est $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ et soit $L = (L_1, \ldots, L_n)$ un n-uplet de langages sur A. Soient u et v deux mots sur l'alphabet $A + V$. Si $\overline{u} = \overline{v}$ alors $\overline{u(L)} = \overline{v(L)}$. Cette propriété s'étend aisément aux langages. Si les deux langages J et K sur $A + V$ vérifient $\overline{J} = \overline{K}$ alors l'égalité $\overline{J(L)} = \overline{K(L)}$ est vérifiée.

Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire dont on suppose par commodité que l'ensemble des variables est $\{X_1, \ldots, X_n\}$. On associe à cette grammaire un système d'équations $\overline{\mathcal{S}(G)}$ obtenu en considérant le système $\mathcal{S}(G)$ pour les langages de la forme $\overline{K}$. Une solution de $\overline{\mathcal{S}(G)}$ est donc un un n-uplet $L = (L_1, \ldots, L_n)$ de langages tel que

$$\overline{L}_i = \sum_{X_i \longrightarrow w} \overline{w(L)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Il s'agit d'établir la proposition suivante, ou plutôt de la réétablir dans le cas commutatif.

Proposition 2.32 (Unicité des solutions propres en commutatif)**.** *Soit G une grammaire propre. Alors $\overline{L_G}$ est l'unique solution* propre *de $\overline{\mathcal{S}(G)}$.*

La proposition précédente contient un léger abus de langage. Conformément à la définition, c'est L_G et non pas $\overline{L_G}$ qui est la solution de $\overline{\mathcal{S}(G)}$. On a employé $\overline{L_G}$ pour insister sur le fait que l'unicité doit être entendue à image commutative près. Ceci signifie que si L est une solution de $\overline{\mathcal{S}(G)}$, alors $\overline{L_G} = \overline{L}$.

Preuve. La preuve de la proposition 2.28 peut être reprise *mutatis mutandis*. En effet l'argument essentiel de cette preuve est argument de longueur qui reste inchangé dans le cas commutatif. □

2.2.7 Solutions rationnelles des systèmes commutatifs

Nous montrons ici que tout système d'équations en commutatif associé à une grammaire admet une solution rationnelle. Pour cela, on considère des grammaires généralisées où l'ensemble des productions de chaque variable n'est plus un ensemble fini mais un ensemble rationnel de mots.

Définition 2.33. Une *grammaire étendue* G est un triplet (A, V, P) où A et V sont des alphabets finis et disjoints et où P est une partie de $V \times (A + V)^*$ telle que pour tout $X \in V$, l'ensemble $\{w \mid (X, w) \in P\}$ est rationnel.

Les notions de dérivation et de mot engendré se généralisent aux grammaires étendues. Il est facile de voir que l'ensemble des mots engendrés par une grammaire étendue est algébrique. Il suffit pour cela de rajouter des variables (autant que d'états) qui simulent chacun des automates acceptant les langages rationnels $\{w \mid (X, w) \in P\}$.

Théorème 2.34 (Solutions rationnelles)**.** *Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire étendue où $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Il existe des langages rationnels $R_1, \ldots, R_n$ sur A tels que $(\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_n})$ soit solution de $\overline{\mathcal{S}(G)}$.*

On commence par un lemme.

Lemme 2.35. *Soit K un langage sur $A + \{X\}$ et soit L et M deux langages sur A. Alors l'égalité $\overline{K(L^*M)L^*} = \overline{K(M)L^*}$ est vérifiée.*

Preuve. Soit u un mot de K. En regroupant les occurrences de la variable X à la fin, on obtient $\overline{u} = \overline{wX^n}$ où w est un mot sur A et où n est le nombre d'occurrences de X dans u. On vérifie alors facilement que l'égalité $\overline{u(L^*M)L^*} = \overline{u(M)L^*}$. On obtient le résultat du lemme en sommant les égalités précédentes sur tous les éléments de K. □

On procède maintenant à la preuve du théorème.

Preuve. La preuve du théorème se fait par récurrence sur le nombre n de variables de la grammaire étendue G.

Commençons par une grammaire $G = (A, \{X\}, P)$ ayant seule variable X. Les règles de G sont notées $S \to S(X)$ où $S(X)$ est une expression rationnelle sur l'alphabet $(A + \{X\})^*$. Une solution du système $\overline{\mathcal{S}(G)}$ est un langage L tel que $\overline{L} = \overline{S(L)}$.

On isole dans $S(X)$ les mots ayant au moins une occurrence de X et les mots ayant aucune occurrence de X. On pose donc $P(X) = S(X) \cap (A+\{X\})^* X (A+\{X\})^*$ et $T = S(X) \cap A^*$. Les deux langages $P(X)$ (on note $P(X)$ plutôt que P pour insister sur le fait que les mots de P contiennent des occurrences de la variable X) et T sont deux langages rationnels puisque la classe des langages rationnels est close par intersection.

Comme tous les mots de $P(X)$ contiennent au moins une occurrence de X, on peut écrire modulo la commutativité

$$\overline{P(X)} = \overline{Q(X)X}$$

où $Q(X)$ peut être choisi rationnel. Il suffit de prendre pour $Q(X)$ l'ensemble des mots de $P(X)$ où la première occurrence de X a été supprimée.

Le système $\overline{\mathcal{S}(G)}$ s'écrit alors

$$\overline{L} = \overline{Q(L)L + T}.$$

On va vérifier que le langage rationnel $R = Q(T)^*T$ est effectivement une solution du système $\overline{\mathcal{S}(G)}$.

$$\begin{aligned}
\overline{Q(R)R + T} &= \overline{Q(Q(T)^*T)Q(T)^*T + T} \\
&= \overline{Q(T)Q(T)^*T + T} && \text{par le lemme précédent} \\
&= \overline{Q(T)^*T} && Q(T)^* = Q(T)Q(T)^* + \varepsilon \\
&= \overline{R}.
\end{aligned}$$

Ceci termine le cas où la grammaire a une seule variable.

Soit n un entier positif. On considère maintenant une grammaire étendue G ayant $n+1$ variables $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Les règles de G s'écrivent

$$X_i \longrightarrow S_i(X_0, \ldots, X_n) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

où chaque S_i est un langage rationnel sur $A + X$ avec $X = \{X_0, \ldots, X_n\}$. Par commodité, on note X' l'ensemble X privé de la variable X_0, c'est-a-dire l'ensemble $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

On introduit la grammaire G_0 obtenue en considérant les variables $X_1, \ldots, X_n$ comme des lettres terminales et en ne prenant que les règles associées à X_0 dans G. Plus formellement, la grammaire G_0 est donnée par

$$G_0 = (A + X', \{X_0\}, \{X_0 \to S_0(X_0, X')\}).$$

Comme la grammaire G_0 a une seule variable, on utilise le cas précédent pour obtenir une solution $R_0(X')$ du système $\overline{\mathcal{S}(G_0)}$ qui vérifie donc l'égalité suivante.

$$\overline{R_0(X')} = \overline{S_0(R_0(X'), X')} \tag{2.1}$$

On introduit la grammaire étendue G' en remplaçant, dans les autres règles, X_0 par la solution $R_0(X')$ de $\overline{\mathcal{S}(G_0)}$. Plus formellement, la grammaire G' est donnée par

$$G' = (A, X', \{X_i \to S_i(R_0(X'), X') \mid 1 \leq i \leq n\}).$$

Il faut remarquer que la grammaire G' est étendue même si la grammaire G ne l'est pas. En effet, la variable X_0 est substituée par un langage rationnel. Ceci explique la nécessité de considérer des grammaires étendues pour la preuve du théorème.

Puisque G' a n variables, l'hypothèse de récurrence peut être appliquée. Il existe n langages rationnels $R_1, \ldots, R_n$ sur A qui forment une solution $R' = (R_1, \ldots, R_n)$ du système $\overline{\mathcal{S}(G')}$. Ils vérifient donc les égalités

$$\overline{R_i} = \overline{S_i(R_0(R'), R')} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Il reste à vérifier que le $n+1$-uplet $R = (R_0(R'), R_1, \ldots, R_n)$ constitue effectivement une solution du système $\overline{\mathcal{S}(G)}$ de la grammaire initiale G. En substituant X' par R' dans l'équation (2.1), on obtient une équation qui complète les n équations ci-dessus pour montrer que le $n+1$-uplet R est bien une solution rationnelle de $\overline{\mathcal{S}(G)}$. Ceci termine la preuve du théorème. □

Preuve du théorème de Parikh

Soit L un langage algébrique. Il existe une grammaire $G = (A, V, P)$ où $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ telle que $L = L_G(X_1)$. Si L est propre, on peut supposer G propre. D'après la proposition 2.32, $\overline{L_G}$ est l'unique solution propre du système $\overline{\mathcal{S}(G)}$. D'après le théorème 2.34, ce même système admet une solution rationnelle $R = (R_1, \ldots, R_n)$. En combinant les deux résultats, on conclut que $\overline{L} = \overline{R_1}$.

Si L n'est pas propre, on applique le résultat précédent au langage $L' = L \setminus \{\varepsilon\}$ qui est propre et aussi algébrique. On obtient un langage rationnel R' tel que $\overline{L'} = \overline{R'}$. Le langage $R = R' + \varepsilon$ vérifie alors l'égalité $\overline{L} = \overline{R}$ souhaitée.

2.3 Arbres de dérivation

Dans une dérivation, les règles qui s'appliquent à des variables différentes peuvent être appliquées de manière indépendante et donc dans un ordre quelconque. Ceci conduit à avoir plusieurs dérivations différentes même lorsqu'il y a essentiellement qu'une seule façon d'obtenir un mot. Les arbres de dérivation permettent de capturer cette notion d'ambiguïté des grammaires. Ils permettent aussi de formaliser un lemme d'itération.

Définition 2.36 (Arbre de dérivation)**.** Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire. Un *arbre de dérivation* est un arbre fini étiqueté par $A \cup V \cup \{\varepsilon\}$ vérifiant la propriété suivante. Si S est l'étiquette d'un nœud interne et si $a_1, \ldots, a_n$ sont les étiquettes de ses fils alors $S \to a_1 \cdots a_n$ est une règle de G. La *frontière* d'un arbre de dérivation est le mot obtenu par concaténation des étiquettes des feuilles de gauche à droite. Si la frontière contient au moins une variable, l'arbre est un *arbre de dérivation partielle*

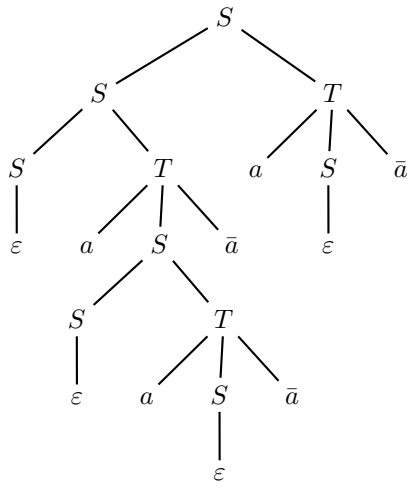


FIG. 2.1 – Arbre de dérivation

Exemple 2.37. Soit la grammaire définie par les règles $\{S \to ST + \varepsilon, T \to aS\bar{a}\}$. La figure 2.1 exhibe un arbre de dérivation pour cette grammaire. La frontière de cet arbre est le mot $aa\bar{a}\bar{a}a\bar{a}$.

Proposition 2.38. *Le langage $L_G(S)$ (resp. $\widehat{L_G}(S)$) est l'ensemble des mots $w \in A^*$ (resp. $(A+V)^*$) tels qu'il existe un arbre de dérivation (resp. partielle) ayant S à la racine et dont la frontière est w.*

Preuve. La preuve est immédiate dans la mesure où un arbre de dérivation est simplement une autre façon de visualisé une dérivation. Une preuve formelle peut être faite par récurrence sur la longueur de la dérivation. □

2.3.1 Ambiguïté

La notion d'ambiguïté est l'analogue pour les grammaires du non déterminisme des automates. De manière intuitive, une grammaire est non ambiguë, si elle engendre chaque mot dune façon au plus. Contrairement au cas des automates, toute grammaire n'est pas équivalente à une grammaire non ambiguë. Certains langages algébriques ne sont engendrés que par des grammaires ambiguës.

Définition 2.39 (Grammaire ambiguë)**.** Une grammaire G est dite *ambiguë* s'il existe un mot ayant au moins deux arbres de dérivation distincts étiqueté à la racine par la même variable S.

La définition suivante est justifiée par l'existence de langages algébriques uniquement engendrés par des grammaires ambiguës.

Définition 2.40 (Langage ambigu)**.** Un langage algébrique est dit *non ambigu* s'il existe au moins une grammaire non ambiguë qui l'engendre. Sinon, il est dit *inhéremment ambigu* pour signifier que toute grammaire qui l'engendre est ambiguë.

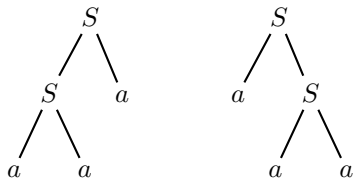


FIG. 2.2 – Deux arbres de dérivation pour aaa

Exemple 2.41. La grammaire $S \to SS + a$ est ambiguë car le mot aaa a deux arbres de dérivations (cf. figure 2.2), Par contre, le langage engendré $L_G(S) = a^+$ est non ambigu car il est également engendré par la grammaire $S \to aS + a$ qui est non ambiguë.

Les propositions 2.48 et 2.50 établissent qu'il existe des langages algébriques inhéremment ambigus.

2.3.2 Lemme d'itération

Le but de cette partie est d'établir un analogue du lemme de l'étoile pour les langages algébriques. Pour cette raison, ce lemme dû à Ogden est aussi appelé *lemme d'itération*. Il permet de montrer que certains langages ne sont pas algébriques ou que certains langages algébriques sont inhérement ambigus. On commence par un lemme purement combinatoire sur les arbres.

Soit un arbre où certaines feuilles sont *distinguées*. On dit que :

- un nœud est *distingué* lorsque le sous-arbre dont il est racine contient des feuilles distinguées.
- un nœud est *spécial* lorsqu'il a au moins deux fils distingués.

Par définition, un nœud spécial est aussi distingué. Le parent d'un nœud distingué est encore distingué. En particulier, la racine de l'arbre est distinguée dès que l'arbre a au moins une feuille distinguée. Rappelons qu'un arbre est dit de *degré* m si chaque nœud a au plus m fils. Le lemme suivant établit un lien entre le nombre de feuilles distinguées et le nombre de nœuds spéciaux qui se trouvent sur une même branche.

Lemme 2.42. *Soit t un arbre de degré m avec k feuilles distinguées. Si chaque branche contient au plus r nœuds spéciaux, alors $k \leq m^r$.*

Preuve. Pour deux nœuds x et x' d'un arbre, on appelle *plus petit ancêtre commun* le nœuds z où les deux chemins de x et de x' à la racine se rejoignent. Les nœuds x et x' sont deux descendants de z mais ils ne sont pas descendants d'un même fils de z. Si x et x' sont deux feuilles distinguées, leur plus petit ancêtre commun est donc un nœud spécial.

On montre le résultat par récurrence sur r. Si $r = 0$, il n'y a aucun nœud spécial dans l'arbre. Il y a donc au plus une seule feuille distinguée. S'il y avait deux feuilles distinguées, leur plus petit ancêtre commun serait spécial.

On suppose maintenant que $r \geq 1$. Soit x un nœud spécial n'ayant pas de descendant spécial autre que lui-même. En appliquant le résultat pour $r = 0$ aux sous-arbres enracinés en les fils de x, on obtient que chacun de ces sous-arbres contient au plus une seule feuille distinguée. Comme x a au plus m fils, le sous-arbre enraciné en x a au plus m feuilles distinguées. On considère l'arbre obtenu

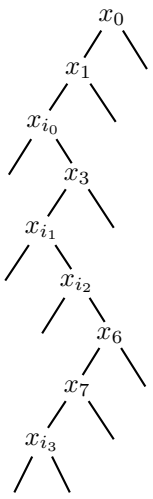


FIG. 2.3 – La branche B avec $i_0 = 2$, $i_1 = 4$, $i_2 = 5$ et $i_3 = 8$

en remplaçant chaque sous-arbre enraciné en un nœud spécial sans descendant spécial par une seule feuille distinguée. Le nombre de nœuds spéciaux sur chaque branche a diminué d'une unité. Par hypothèse de récurrence, l'arbre obtenu a au plus m^{r-1} feuilles distinguées. Comme chacune de ces nouvelles feuilles a remplacé un sous-arbre avec au plus m feuilles distinguées dans l'arbre initial, on obtient le résultat. □

Le résultat suivant est traditionnellement appelé lemme d'Ogden. Ce lemme n'est pas exempt de défaut. Il n'est pas facile à énoncer, la preuve est loin d'être triviale et surtout, il est assez délicat à utiliser. Il faut cependant s'en contenter car il est presque le seul outil dont on dispose pour montrer qu'un langage n'est pas algébrique.

Lemme 2.43 (d'Ogden)**.** *Pour toute grammaire $G = (A, V, P)$ et toute variable $S \in V$, il existe un entier K tel que tout mot $f \in \widehat{L_G}(S)$ ayant au moins K lettres distinguées se factorise en $f = \alpha u \beta v \gamma$, où $\alpha, u, \beta, v, \gamma \in (A + V)^*$, avec :*

1. *$S \xrightarrow{*} \alpha T \gamma$ et $T \xrightarrow{*} uTv + \beta$.*
2. *soit α, u, β, soit β, v, γ contiennent des lettres distinguées.*
3. *$u\beta v$ contient moins de K lettres distinguées.*

Les conditions du lemme montrent que les tous les mots de la forme $\alpha u^n \beta v^n \gamma$ pour $n \geq 0$ appartiennent au langage $\widehat{L_G}(S)$. Un telle paire (u, v) est appelée une *paire itérante*.

Preuve. Soit m la longueur maximale des membres droits des règles. Puisque f appartient à $\widehat{L_G}(S)$, il existe arbre de dérivation t dont la racine est étiquetée par S et dont la frontière est le mot f. Par définition de m, l'arbre t est de degré m. Les feuilles distinguées de t sont celles étiquetées par les lettres distinguées de f.

On pose $r = 2|V|+2$ et $K = m^r+1$. Comme l'arbre t a K feuilles distinguées, il a, d'après le lemme précédent, au moins une branche B ayant au moins $r + 1$

nœuds spéciaux $x_0, \ldots, x_r$. Chaque nœud x_i a par définition au moins deux fils distingués dont l'un est sur la branche B. Le nœud x_i est dit *gauche* (respectivement *droit*) s'il a un autre fils distingué à gauche (respectivement à droite) de la branche B. Il peut être simultanément gauche et droit : il est alors arbitrairement considéré comme gauche. Parmi les $r+1 = 2|V|+3$ nœuds $x_0, \ldots, x_r$, au moins $|V|+2$ d'entre eux sont tous gauches ou tous droits. On pose alors $k = |V|+1$. Par symétrie, on suppose qu'il existe des indices $0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq r$ tels que les nœuds $x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}$ soient gauches (cf. figure 2.3 pour un exemple). Comme k est supérieur au nombre de variables, deux nœuds x_{j_1} et x_{j_2} parmi les nœuds $x_{i_1}, \ldots x_{i_k}$ sont nécessairement étiquetés par la même variable T.

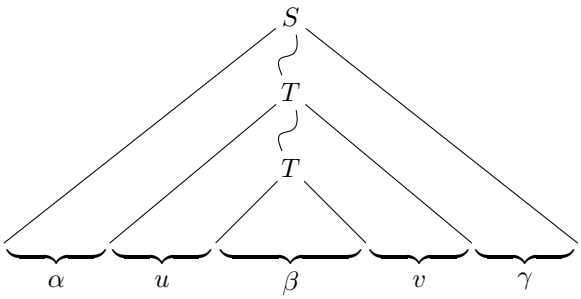


FIG. 2.4 – Découpage d'un mot par le lemme d'Ogden

Le mot est alors découpé comme le suggère la figure 2.4. Le fait que le nœud x_{i_0} soit gauche garantit que α contienne des lettres distinguées. De même, les nœuds x_{j_1} et x_{j_2} garantissent respectivement que u et β contiennent des lettres distinguées. Si $u\beta v$ contient plus de K lettres distinguées, on recommence le raisonnement avec le sous-arbre de dérivation engendrant ce mot. □

Dans le cas où toutes les lettres de f sont marquées, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.44 (Théorème de Bar-Hillel, Perles, Shamir)**.** *Pour tout langage algébrique L, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout mot $f \in L$, si $|f| \geq N$ alors on peut trouver une factorisation $f = \alpha u \beta v \gamma$ tel que $|uv| > 0$, $|u\beta v| < N$ et $\alpha u^n \beta v^n \gamma \in L$ pour tout $n \geq 0$.*

2.3.3 Applications du lemme d'itération

Dans cette partie, on applique le lemme d'itération pour montrer que certains langages classiques ne sont pas algébriques et que certains langages algébriques sont inhéremment ambigus.

Proposition 2.45. *Le langage $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas algébrique.*

Preuve. Le corollaire précédent suffit pour prouver que le langage L n'est pas algébrique. Soit N l'entier fourni par le corollaire. On considère le mot $f_1 = a^N b^N c^N \in L$ qui se factorise $f_1 = \alpha u \beta v \gamma$ tel que $f_n = \alpha u^n \beta v^n \gamma \in L$ pour tout $n \geq 0$. Chacun des mots u et v ne contient qu'une seule des lettres a, b ou c. Sinon le mot f_2 n'appartient pas à $a^*b^*c^* \supset L$. Il en découle que f_2 ne peut pas appartenir à L car les nombres d'occurrences de a, b et c ne sont plus égaux. □

La proposition précédente a pour corollaire immédiat.

Corollaire 2.46. *La classe des langages algébriques n'est close ni par intersection ni par complémentation.*

Preuve. Le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ est l'intersection des deux langages algébriques $\{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$ et $\{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$. □

Proposition 2.47. *Le langage $L = \{a^m b^n c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$ n'est pas algébrique.*

Preuve. Supposons qu'il existe une grammaire G telle que $L = L_G(S)$. Soit k l'entier fourni par le lemme d'itération. On applique le resultat au mot $f = a^k b^k c^k d^k$ où les k lettres distinguées sont les lettres b. D'après le lemme d'itération, il existe des dérivations

$$S \xrightarrow{*} a^k b^{k_1} T d^{k_2} \qquad T \xrightarrow{*} b^i T d^i \qquad T \xrightarrow{*} b^{k'_1} c^k d^{k'_2}$$

avec les relations $k = k_1 + i + k'_1 = k_2 + i + k'_2$. On applique à nouveau le lemme d'iteration au mot $a^k b^{k_1} T d^{k_2}$ où les k lettres distinguées sont les lettres a. On obtient immédiatement une contradiction car la paire itérante obtenue contient des lettres a mais aucune lettre d. □

Proposition 2.48. *Le langage $L = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\} \cup \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ est inhéremment ambigu.*

Preuve. Chacun des langages $\{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$ et $\{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ est bien sûr algébrique et le langage L est donc aussi algébrique. Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire telle que $L = L_G(S_0)$. On montre que la grammaire G est ambiguë en montrant qu'un mot de la forme $a^n b^n c^n$ a au moins deux arbres de dérivation.

Soit k l'entier fourni par le lemme d'itération. On applique le résultat au mot $f_1 = a^k b^k c^{k+k!}$ où les k lettres distinguées sont les b. D'après le lemme d'itération, il existe des dérivations

$$S_0 \xrightarrow{*} \alpha S \gamma \xrightarrow{*} \alpha u S v \gamma \xrightarrow{*} \alpha u \beta v \gamma = f_1$$

Les conditions impliquent que $u = a^i$ et $v = b^i$ pour un entier $0 \leq i \leq k$. En itérant $k!/i$ fois la dérivations $S \xrightarrow{*} uSv$ on obtient un arbre de dérivation pour le mot $f = a^{k+k!} b^{k+k!} c^{k+k!}$. Cet arbre contient un sous-arbre dont la frontière ne contient que des lettres a et b dont au moins $k! - k$ lettres b.

En appliquant le même procédé au mot $f_2 = a^{k+k!} b^k c^k$, on obtient un autre arbre de dérivation pour le même mot f. Cet arbre contient un sous-arbre dont la frontière ne contient que des lettres b et c dont au moins $k! - k$ lettres b. Cet arbre est donc différent du premier arbre trouvé. □

Exercice 2.49. Soit A un alphabet et $\#$ une nouvelle lettre n'appartenant pas à A. Montrer que les trois langages

$$L_1 = \{w\#w' \mid w, w' \in A^* \text{ et } w \neq w'\}$$
$$L_2 = \{w\#w' \mid w, w' \in A^* \text{ et } w = w'\}$$
$$L_3 = \{w\#w' \mid w, w' \in A^*, w \neq w' \text{ et } |w| = |w'|\}$$

sont pas algébriques.

2.3.4 Ambiguïté inhérente

Il est souvent difficile de montrer qu'un langage algébrique donné est inhéremment ambigu. Lorsque le lemme d'itération n'est pas adapté, une autre méthode consiste à utiliser la fonction génératrice du langage L définie par

$$f_L(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad \text{où} \quad a_n = |L \cap A^n|.$$

Si le langage est non ambigu, la fonction $f_L(z)$ est algébrique car elle est solution du système commutatif associé à une grammaire non ambiguë qui engendre L. En utilisant cette méthode, on peut par exemple montrer le théorème suivant (cf. exemple 2.8 p. 71 pour la définition du langage de Goldstine).

Proposition 2.50 (Flageolet)**.** *Le langage de Goldstine est inhéremment ambigu.*

Preuve. Nous donnons juste une idée de la preuve qui fait appel à des éléments d'analyse pour lesquels nous renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés. Un mot n'est pas dans le langage de Goldstine soit parce qu'il se termine par la lettre a soit parce qu'il est de la forme $baba^2ba^3b\cdots a^nb$ pour $n \geq 0$. Ceci montre que la fonction génératrice du langage de Goldstine est égale à $(1-z)/(1-2z) - g(z)$ où la fonction $g(z)$ est égale à

$$g(z) = z + z^3 + z^6 + \cdots = \sum_{n\geq 1} z^{n(n+1)/2}.$$

Une fonction de la forme $\sum_{n\geq 0} z^{c_n}$ où la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ vérifie $\sup(c_{n+1}-c_n) = \infty$ converge sur le bord de son disque de convergence. La fonction g admet donc une infinité de singularités et ne peut être algébrique comme f_L. □

2.4 Propriétés de clôture

Cette partie est consacrée à quelques propriétés de clôture classiques des langages algébriques. Nous montrons que la classe des langages algébriques est close pour les opérations rationnelles, les substitutions et les morphismes inverses et l'intersection avec un langage rationnel. Cette différentes propriétés permettent d'aborder le théorème de Chomsky-Schützenberger qui établit que les langages de Dyck sont en quelque sorte les langages algébriques génériques. Tout langage algébrique est l'image par un morphisme d'une intersection d'un langage de Dyck avec un langage rationnel.

2.4.1 Opérations rationnelles

On commence par les opérations rationnelles qui montrent que les langages algébriques généralisent les langages rationnels.

Proposition 2.51 (Opérations rationnelles)**.** *Les langages algébriques sont clos par union, concaténation et étoile.*

Preuve. Soient $G = (A, V, P)$ et $G' = (A, V', P')$ deux grammaires telles que $L = L_G(S)$ et $L' = L_{G'}(S')$. On suppose sans perte de généralité que $V \cap V' = \varnothing$.

- Le langage $L + L'$ est égal à $L_{G_1}(S_0)$ où la grammaire G_1 est égale à $(A, \{S_0\} \cup V \cup V', \{S_0 \to S + S'\} \cup P \cup P')$
- Le langage LL' est égal à $L_{G_2}(S_0)$ où la grammaire G_2 est égale à $(A, \{S_0\} \cup V \cup V', \{S_0 \to SS'\} \cup P \cup P')$
- Le langage L^* est égal à $L_{G_3}(S_0)$ où la grammaire G_3 est égale à $(A, \{S_0\} \cup V, \{S_0 \to SS_0 + \varepsilon\} \cup P)$

□

Le corollaire suivant découle directement de la proposition précédente.

Corollaire 2.52. *Les langages rationnels sont aussi algébriques.*

Pour obtenir directement le corollaire, on peut également construire une grammaire qui engendre le langage $L(\mathcal{A})$ des mots acceptés par un automate normalisé $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, \{f\})$. La grammaire $G = (A, Q, P)$ où l'ensemble des règles est $P = \{p \to aq \mid p \xrightarrow{a} q \in E\} \cup \{f \to \varepsilon\}$ vérifie que $L_G(i) = L(\mathcal{A})$. Réciproquement, une grammaire dont toutes les règles sont de la forme $S \to aT$ pour $a \in A$ et $S, T \in V$ engendre un langage rationnel.

2.4.2 Substitution algébrique

On rappelle qu'une substitution de A^* dans B^* est un morphisme de A^* dans $\mathfrak{P}(B^*)$. Une substitution σ est dite *algébrique* si $\sigma(a)$ est un langage algébrique pour toute lettre a de A. Les morphismes sont bien sûr un cas particulier de substitution algébrique.

Proposition 2.53 (Substitution algébrique)**.** *Si $L \subseteq A^*$ est un langage algébrique et σ une substitution algébrique de A^* dans B^*, alors le langage $\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$ est aussi algébrique.*

Preuve. Soient $G = (A, V, P)$ une grammaire pour $L = L_G(S)$ et $\sigma : A \to \mathfrak{P}(B^*)$, une substitution algébrique telle que pour tout $a \in A$, $G_a = (B, V_a, P_a)$ est une grammaire telle que $\sigma(a) = L_{G_a}(S_a)$.

On considère alors la grammaire $G' = (B, V \cup \bigcup_a V_a, P' \cup \bigcup_a P_a)$ où $P' = \{S \to \rho(w) \mid S \to w \in P\}$ où le morphisme ρ est défini par $\rho(S) = S$ pour tout $S \in V$, et $\rho(a) = S_a$ pour tout $a \in A$. Cette grammaire engendre $\sigma(L)$. □

Le résultat de la proposition précédente s'applique en particulier aux morphismes. L'image par une morphisme d'un langage algébrique est encore un langage algébrique.

2.4.3 Intersection avec un rationnel

On montre dans cette partie que l'intersection d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est encore un langage algébrique.

Proposition 2.54 (Intersection avec un rationnel)**.** *Si L est un langage algébrique et K un langage rationnel, alors $K \cap L$ est algébrique.*

L'intersection de deux langages algébriques n'est pas algébrique en général comme cela a été vu au corollaire 2.46 (p. 88).

Preuve. Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire telle que $L = L_G(T)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que G est en forme normale quadratique. Cette condition n'est pas indispensable à la preuve mais simplifie les notations.

Méthode des automates Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, \{f\})$ un automate normalisé acceptant le langage K. Le langage $K \cap L$ est engendré par la grammaire $G' = (A, V', P')$ définie de la façon suivante.

$$\begin{aligned} V' &= \{S_{pq} \mid S \in V \text{ et } p, q \in Q\}, \\ P' &= \{S_{pq} \to a \mid S \to a \in P \text{ et } p \xrightarrow{a} q \in E\}, \\ &\quad \cup \{S_{pq} \to R_{pr}T_{rq} \mid r \in Q \text{ et } S \to RT \in P\}. \end{aligned}$$

Le langage $K \cap L$ algébrique car il est égal à $L_{G'}(T_{if})$.

Méthode des monoïdes Soit $\mu : A^* \to M$ un morphisme de A^* dans un monoïde M fini tel que $K = \mu^{-1}(H)$ où H est une partie de M. Le langage $K \cap L$ est engendré par la grammaire $G' = (A, V', P')$ définie de la façon suivante.

$$\begin{aligned} V' &= \{S_m \mid S \in V \text{ et } m \in M\}, \\ P' &= \{S_m \to a \mid S \to a \in P \text{ et } m = \mu(a)\}, \\ &\quad \cup \{S_m \to R_{m_1}T_{m_2} \mid S \to RT \in P \text{ et } m = m_1m_2\}. \end{aligned}$$

Le langage $K \cap L$ est algébrique car il égal à l'union $\bigcup_{m \in H} L_{G'}(T_m)$.

□

2.4.4 Morphisme inverse

On montre dans cette partie que l'image inverse par un morphisme d'un langage algébrique est encore algébrique. Le résultat n'est pas immédiat pour la raison suivante. Tout mot w d'un langage algébrique a une factorisation $w = w_1 \cdots w_m$ induite par un arbre de dérivation. Si le mot w est aussi l'image par un morphisme μ d'un mot $u = a_1 \cdots a_n$, il a une autre factorisation $w = w'_1 \cdots w'_n$ où $w'_i = \mu(a_i)$. Ces deux factorisations ne coïncident pas a priori. La preuve du résultat s'appuie sur une décomposition astucieuse d'un morphisme inverse avec des morphisme alphabétiques. Cette décomposition est en soi un résultat intéressant. On commence par la définition d'un morphisme alphabétique.

Définition 2.55 (Morphisme alphabétique)**.** Un morphisme $\sigma : A^* \to B^*$ est dit *alphabétique* (resp. *strictement alphabétique*) si pour tout $a \in A$, $|\sigma(a)| \leq 1$ (resp. $|\sigma(a)| = 1$).

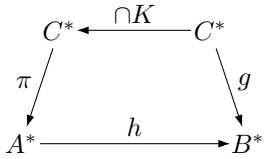


FIG. 2.5 – Factorisation d'un morphisme

Lemme 2.56 (Factorisation d'un morphisme)**.** *Pour tout morphisme $h : A^* \to B^*$, il existe deux morphismes alphabétiques $g : C^* \to B^*$ et $\pi : C^* \to A^*$ et un langage rationnel $K \subseteq C^*$ tel que $h^{-1}(w) = \pi(g^{-1}(w) \cap K)$ pour tout mot $w \in B^*$.*

Preuve. On définit l'alphabet C et les deux parties C_0 et C_1 de C par

$$C = \{(a,i) \mid a \in A \text{ et } 0 \leq i \leq |h(a)|\}$$
$$C_0 = \{(a,0) \mid a \in A\} \qquad C_1 = \{(a,|h(a)|) \mid a \in A\}$$

puis les langages rationnels locaux W et K de C^* par

$$W = C^2 \setminus (\{(a,i)(a,i+1) \mid a \in A \text{ et } 0 \leq i < |h(a)|\} \cup C_1C_0)$$
$$K = (C_0C^* \cap C^*C_1) \setminus C^*WC^*$$

Les mots de K sont les mots de la forme $u_1 \cdots u_n$ où chaque mot u_i pour $1 \leq i \leq n$ est un mot de la forme $(a_i,0)(a_i,1)\cdots(a_i,|h(a_i)|)$ pour une lettre a_i de A.

On définit finalement les deux morphismes $g : C^* \to B^*$ et $\pi : C^* \to A^*$ par

$$g(a,i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i = 0 \\ h(a)[i] & \text{si } i \geq 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \pi(a,i) = \begin{cases} a & \text{si } i = 0 \\ \varepsilon & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

où $h(a)[i]$ est une notation pour la i-ième lettre du mot $h(a)$. □

Proposition 2.57 (Morphisme inverse)**.** *Si $h : A^* \to B^*$ est un morphisme et $L \subseteq B^*$ est un langage algébrique, alors $h^{-1}(L)$ est aussi algébrique.*

Preuve. Montrons d'abord la propriété lorsque h est alphabétique. Soit $G = (B, V, P)$ une grammaire et S_0 une variable telles que $L = L_G(S_0)$.

Puisque le morphisme h est alphabétique, l'alphabet A se partitionne en les deux parties A_0 et A_1 définies par $A_0 = \{a \in A \mid h(a) = \varepsilon\}$ et $A_1 = \{a \in A \mid h(a) \in B\}$. Le morphisme h est étendu à $(A+V)^*$ en posant $h(S) = S$ pour toute variable $S \in V$.

On définit la grammaire $G' = (A, V, P_0 \cup P_1)$ où les ensembles de règles P_0 et P_1 sont respectivement donnés par

$$P_0 = \{T \to \sum_{a \in A_0} aT + \varepsilon\},$$
$$P_1 = \{S \to Tu_1T \cdots Tu_nT \mid u_i \in (V \cup A_1)^*, S \to h(u_1 \cdots u_n) \in P\}.$$

On vérifie que la grammaire G' engendre le langage $h^{-1}(L)$. Ensuite, pour étendre ce résultat à un morphisme h quelconque, il suffit d'appliquer le lemme précédent. L'intersection avec le rationnel K découle de la propriété précédente. □

2.4.5 Théorème de Chomsky-Schützenberger

Le théorème suivant établit que les langages de Dyck (cf. exemple 2.8 p. 71 pour la définition) sont des langages algébriques *génériques*. Ils sont générateurs du *cône* des langages algébriques. On peut consulter [Aut87] pour une preuve plus détaillée de ce théorème.

Théorème 2.58 (Chomsky-Schützenberger)**.** *Un langage L est algébrique si et seulement si $L = \varphi(D_n^* \cap K)$ pour un entier n, un langage rationnel K et un certain morphisme φ alphabétique.*

Preuve. La condition est suffisante grâce aux propriétés de clôture des langages algébriques.

Réciproquement, soit $G = (A, V, P)$ une grammaire telle que $L = L_G(S_0)$ pour $S_0 \in V$. D'après la proposition 2.21, on peut supposer que G en forme normale quadratique. Les règles de G sont donc de la forme $S \to S_1S_2$ pour $S_1, S_2 \in V$ ou de la forme $S \to a$ pour $a \in A$. Pour chaque règle r du premier type, on introduit six nouveaux symboles a_r, b_r, c_r, $\bar{a}_r$, $\bar{b}_r$ et $\bar{c}_r$. Pour chaque règle r du second type, on introduit deux nouveaux symboles a_r et $\bar{a}_r$. Soit A' l'ensemble de toutes les nouvelles lettres introduites :

$$A' = \{a_r, b_r, c_r, \bar{a}_r, \bar{b}_r, \bar{c}_r \mid r = S \to S_1S_2\} \cup \{a_r, \bar{a}_r \mid r = S \to a\}.$$

Soit D_n le langage de Dyck sur l'alphabet de parenthèses A'. L'entier n est donc égal à trois fois le nombre de règles de la forme $S \to S_1S_2$ plus le nombre de règles de la forme $S \to a$. On définit alors la grammaire $G' = (A', V, P')$ où les règles de G' sont en correspondance avec les règles de G. Pour chaque règle r de G, il existe une règle r' de G' définie de la manière suivante.

- Si r est la règle $S \to S_1S_2$, alors r' est la règle $S \to a_r b_r S_1 \bar{b}_r c_r S_2 \bar{c}_r \bar{a}_r$.
- Si r est la règle $S \to a$, alors r' est la règle $S \to a_r \bar{a}_r$.

On définit finalement le morphisme $\varphi : A'^* \to A^*$ de la façon suivante. Si r est une règle de la forme $S \to S_1S_2$, on pose φ par $\varphi(a_r) = \varphi(b_r) = \varphi(c_r) = \varphi(\bar{a}_r) = \varphi(\bar{b}_r) = \varphi(\bar{c}_r) = \varepsilon$. Si r est une règle de la forme $S \to a$, on pose $\varphi(a_r) = a$ et $\varphi(\bar{a}_r) = \varepsilon$.

Les définitions des règles de G' et du morphisme φ impliquent immédiatement que $L = L_G(S_0) = \varphi(L_{G'}(S_0))$. L'inclusion $L_{G'}(S_0) \subseteq D_n^*$ découle directement de la forme particulière des règles de G'. Il reste maintenant à définir un langage rationnel K tel que $L_{G'}(S_0) = D_n^* \cap K$.

On va définir un langage local K qui exprime les contraintes entre les paires de lettres consécutives de A' dans $L_{G'}(S_0)$. Soit A'_0 l'ensemble des lettres a_r où r est une règle ayant S_0 pour membre gauche. Soit K le langage local $K = A'_0A'^* \setminus A'^*WA'^*$ où l'ensemble W est défini par

$$\begin{aligned} A'^2 \setminus W = {} & \{a_r b_r, \bar{b}_r c_r, \bar{c}_r \bar{a}_r \mid r = S \to S_1S_2\} \\ & \cup \{a_r \bar{a}_r \mid r = S \to a\} \\ & \cup \{b_r a_t, \bar{a}_t \bar{b}_r \mid r = S \to S_1S_2 \text{ et } t = S_1 \to \ldots\} \\ & \cup \{c_r a_t, \bar{a}_t \bar{c}_r \mid r = S \to S_1S_2 \text{ et } t = S_2 \to \ldots\}. \end{aligned}$$

L'inclusion $L_{G'}(S_0) \subset D_n^* \cap K$ découle directement du choix du langage K. L'inclusion inverse est un peu fastidieuse. Elle se montre par récurrence sur la longueur du mot. □

Pour un entier n, on note A_n l'alphabet $\{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ ayant n paires de parenthèses.

Lemme 2.59. *Pour tout entier n, il existe un morphisme $\psi : A_n^* \to A_2^*$ tel que $D_n^* = \psi^{-1}(D_2^*)$.*

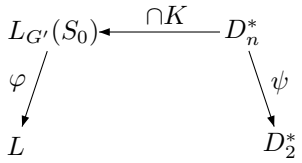


FIG. 2.6 – Théorème de Chomsky-Schützenberger

Preuve. Il est facile de vérifier que le morphisme ψ défini par $\psi(a_k) = a_1 a_2^k a_1$ et $\psi(\bar{a}_k) = \bar{a}_1 \bar{a}_2^k \bar{a}_1$ pour $1 \leq k \leq n$ convient parfaitement. □

D'après le lemme précédent, le théorème de Chomsky-Schützenberger établit que tout langage algébrique L s'écrit $L = \varphi(\psi^{-1}(D_2^*) \cap K)$ pour des morphismes φ et ψ et pour un langage rationnel K (cf. figure 2.6). Une transformation de la forme $X \mapsto \varphi(\psi^{-1}(X) \cap K)$ s'appelle une *transduction rationnelle*. Ces transformations sont en fait très naturelles. Elles peuvent en effet être réalisées de manière équivalentes par des automates à deux bandes (une pour l'entrée et une pour la sortie) appelés transducteurs (cf. théorème 1.158 p. 67).

2.5 Forme normale de Greibach

La forme normale de Greibach est une forme particulière de grammaire. Toute grammaire est équivalente à une grammaire en forme normale de Greibach mais la preuve n'est pas triviale, contrairement à la forme normale quadratique. Cette forme normale permet en particulier de montrer que les ε-transitions ne sont pas nécessaires dans les automates à pile.

Définition 2.60 (Forme normale de Greibach)**.** Une grammaire $G = (A, V, P)$ est en *forme normale de Greibach* si chacune de ses règles est de la forme $S \to w$ où w appartient à AV^*. Si de plus chaque w appartient à $A + AV + AV^2$, la grammaire est en *forme normale de Greibach quadratique*.

Les règles de la forme $S \to w$ où w appartient à AV ne peuvent pas être supprimées même si leur rôle se limite essentiellement à engendrer les mots de longueur 2.

Proposition 2.61 (Forme normale de Greibach)**.** *Toute grammaire propre est équivalente à une grammaire en forme normale de Greibach quadratique.*

La preuve initiale de Greibach donnait seulement une grammaire en forme normale non quadratique. Nous allons d'abord présenter une première preuve plus élémentaire qui donne une grammaire en forme normale de Greibach. Nous donnons ensuite la preuve due à Rosenkrantz qui est plus concise et donne en plus une grammaire en forme normale quadratique. Le théorème peut encore être raffiné en introduisant des formes normales bilatères où les membres droits des règles appartiennent à $A + AA + AVA + AVVA$. La preuve de ce résultat dû à Hotz est cependant plus difficile.

Preuve élémentaire. Il suffit de trouver une grammaire avec des règles de la forme $S \to w$ où $w \in A(A + V)^*$. On se ramène alors à une grammaire en forme normale de Greibach en introduisant une nouvelle variable T_a avec la

règle $T \to a$ pour chaque lettre terminale a et remplaçant chaque occurrence de a par T_a.

Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire où on suppose que $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$. On pose $G_0 = G$ et on définit par récurrence une suite $G_0, \ldots, G_n$ de grammaires telles que dans chaque grammaire G_i les variables $X_1, \ldots, X_i$ n'apparaissent pas en tête des membres droits de règles. On suppose avoir construit la grammaire G_{i-1} et on construit la grammaire G_i par les deux étapes suivantes.

1. On commence par supprimer X_i en tête des productions de X_i. Soient

$$X_i \to X_i u_1 + \cdots + X_i u_k + w_1 + \cdots + w_p$$

les règles de G_{i-1} ayant X_i comme membre gauche où les mots $w_1, \ldots, w_p$ ne commencent pas par la variable X_i. Par hypothèse de récurrence, les mots $w_1, \ldots, w_p$ ne commencent pas une variable X_j pour $1 \leq j \leq i-1$. On introduit une nouvelle variable X_i' et on remplace les règles précédentes par les nouvelles règles

$$X_i \to w_1 X_i' + \cdots + w_p X_i' + w_1 + \cdots + w_p$$
$$X_i' \to u_1 X_i' + \cdots + u_k X_i' + u_1 + \cdots + u_k.$$

2. La transformation précédente a pu faire apparaître des variables X_j (pour $1 \leq j \leq i$) en tête des mots u_l. En outre, la variable X_i peut être la première lettre de membres droits d'autres règles. Toutes ces occurrences des variables X_j (pour $1 \leq j \leq i$) en tête de membres droits sont supprimées en remplaçant chaque règle $S \to X_j v$ par toutes les règles $S \to uv$ où u parcourt les productions de la variable X_j.

□

Exemple 2.62. En appliquant l'algorithme de la preuve précédente à la grammaire $G = G_0$, on obtient successivement les grammaires G_1, G_2 et G_3.

$$G_0 \begin{cases} A \to AB + a \\ B \to BC + b \\ C \to CA + c \end{cases} \qquad G_1 \begin{cases} A \to aA' + a \\ A' \to BA' + B \\ B \to BC + b \\ C \to CA + c \end{cases}$$

$$G_2 \begin{cases} A \to aA' + a \\ A' \to bB'A' + bA' + bB' + b \\ B \to bB' + b \\ B' \to CB' + C \\ C \to CA + c \end{cases} \qquad G_3 \begin{cases} A \to aA' + a \\ A' \to bB'A' + bA' + bB' + b \\ B \to bB' + b \\ B' \to cC'B' + cB' + cC' + c \\ C \to cC' + c \\ C' \to aA'C' + aC' + aA' + a \end{cases}$$

Autre preuve (Rosenkrantz). Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire où l'ensemble des variables est $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que G est forme normale quadratique. Cette hypothèse est uniquement nécessaire pour que la grammaire en forme normale de Greibach qui est obtenue soit aussi quadratique. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit le langage P_i par $P_i = \{w \mid X_i \to w\}$. Les règles de G s'écrivent alors $X_i \to P_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On introduit le vecteur $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et le vecteur $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ de sorte que les règles s'écrivent

$$\vec{X} \to \vec{P}.$$

On introduit la matrice $R = (R_{ij})$ de dimensions $n \times n$ où chaque entrée R_{ij} est définie par $R_{ij} = X_i^{-1} P_j$. On définit aussi le vecteur $\vec{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ où $S_i = P_i \cap AV^*$. Les règles de la grammaire s'écrivent alors sous forme matricielle de la manière suivante

$$\vec{X} \to \vec{X}R + \vec{S}.$$

Par analogie avec le système $X = XR + S$ dont la solution est SR^*, on introduit la matrice $Y = (Y_{ij})$ où chaque entrée Y_{ij} est une nouvelle variable. On introduit aussi la grammaire G' dont les règles sont données par

$$\begin{aligned} X &\to SY \\ Y &\to RY + I \end{aligned}$$

où I est la matrice ayant ε sur la diagonale et $\varnothing$ partout ailleurs. La grammaire G' est équivalente à la grammaire G. Comme G est en forme normale quadratique, chaque entrée R_{ij} est une somme de variables de V. En utilisant $X \to SY$, on définit finalement la matrice $R' = (R'_{ij})$ où chaque entrée R'_{ij} est donnée par la formule

$$R'_{ij} = \sum_{X_k \in R_{ij}} (SY)_k.$$

La grammaire G'' dont les règles sont données par

$$\begin{aligned} X &\to SY \\ Y &\to R'Y + I \end{aligned}$$

est encore équivalente à la grammaire G. On supprime les ε-règles de G'' pour obtenir une grammaire en forme normale de Greibach quadratique équivalente à G. □

2.6 Automates à pile

Les automates à pile sont une extension des automates finis. Outre un contrôle par un nombre fini d'états, ils possèdent une mémoire auxiliaire. Celle-ci est organisée sous la forme d'une pile contenant des symboles. Il est seulement possible d'empiler ou de dépiler des symboles. Seul le symbole en sommet de la pile est visible du contrôle. Les transitions effectuées ne dépendent que de l'état interne, du symbole au sommet de la pile et aussi du mot lu. Les langages acceptés par ces automates sont exactement les langages algébriques.

2.6.1 Définitions et exemples

Comme un automate fini, un automate à pile a un ensemble fini Q d'états. Il y a un alphabet A sur lequel sont écrits les mots d'entrée ainsi qu'un alphabet de pile qui contient tous les symboles qui peuvent être mis dans la pile. La transition effectuée par l'automate dépend de l'état de contrôle, de la lettre lue dans le mot d'entrée et du symbole au sommet de la pile. Chaque transition remplace le symbole au sommet de la pile par un mot éventuellement vide sur l'alphabet de pile. Ce dernier cas correspond à un dépilement. Effectuer une transition fait passer à la lettre suivante du mot d'entrée qui est donc lu séquentiellement de gauche à droite. On introduit aussi des ε-transitions qui ne lisent aucune lettre

du mot d'entrée. Ces transitions ne sont pas absolument nécessaires dans le cas des automates non déterministes. Il est possible de les supprimer même si ce n'est pas immédiat. Par contre, ces ε-transitions sont indispensables pour les automates déterministes.

Définition 2.63 (Automate à pile)**.** Un *automate à pile* est constitué d'un alphabet d'entrée A, d'un alphabet de pile Z dont un symbole initial $z_0 \in Z$, d'un ensemble fini d'états Q dont un état initial q_0 et de transitions de la forme $q, z \xrightarrow{y} q', h$ avec $q, q' \in Q$, $y \in A \cup \{\varepsilon\}$, $z \in Z$ et $h \in Z^*$. Le mot y qui est une lettre ou le mot vide est l'*étiquette* de la transition.

L'état initial q_0 est l'état de contrôle dans lequel se trouve l'automate à pile au début d'un calcul. Tout au long d'un calcul, la pile de l'automate n'est jamais vide. Le calcul se bloque dès que la pile devient vide. Le symbole de pile initial z_0 est le symbole qui est mis dans la pile avant de commencer tout calcul.

Une configuration d'un automate est un état instantané de l'automate qui comprend l'état de contrôle et le contenu de la pile. Le contenu de la pile est vu comme un mot sur l'alphabet de pile. On appelle *configuration* une paire (q, h) de $Q \times Z^*$. La configuration initiale est (q_0, z_0) où q_0 et z_0 sont respectivement l'état initial et le symbole de pile initial. La notion de calcul pour un automate à pile est l'équivalent d'un chemin pour un automate fini. Il est constitué d'une suite d'étapes de calcul consistant à effectuer une transition de l'automate.

Définition 2.64 (Calcul d'un automate à pile)**.** Une *étape de calcul* est une paire de configurations (C, C') notée $C \xrightarrow{y} C'$ telles que $C = (p, zw)$, $C' = (q, hw)$ et $p, z \xrightarrow{y} q, h$ est une transition de l'automate. Un *calcul* de l'automate est une suite d'étapes de calcul consécutives :

$$C_0 \xrightarrow{y_1} C_1 \xrightarrow{y_2} \cdots \xrightarrow{y_n} C_n.$$

Le mot $y_1 \cdots y_n$ est l'*étiquette* du calcul.

Effectuer une transition $p, z \xrightarrow{y} q, h$ d'un automate à pile consiste à passer de l'état p à l'état q, à lire le mot y et à remplacer le symbole z du sommet de pile par le mot h. Une transition est impossible dès que la pile est vide et le calcul se bloque. La transition peut soit dépiler si h est vide, soit remplacer le symbole de sommet de pile si h est de longueur 1, soit empiler si h est de longueur au moins 2. On parle d'ε-transition lorsque y est le mot vide.

On utilise la même notation pour une transition et une étape de calcul dans la mesure où une transition $p, z \xrightarrow{y} q, h$ peut être vue comme une étape de calcul de la configuration (p, z) à la configuration (q, h).

Dans la définition précédente, le contenu de la pile est écrit de haut en bas. Le sommet de pile se situe donc à gauche du mot de pile. Certains ouvrages utilisent la convention inverse où le sommet de pile se situe à droite. Aucune des conventions n'est parfaite et n'évite de passer au mot miroir dans certaines preuves. La convention adoptée dans cet ouvrage simplifie la preuve d'équivalence entre grammaires et automates à pile (cf. théorème 2.69). Par contre, la preuve en complément que l'ensemble des contenus forme un langage rationnel (cf. théorème 2.81) nécessite un passage au mot miroir.

2.6.2 Différents modes d'acceptation

Il reste à définir les configurations finales qui déterminent les calculs acceptants et par conséquent les mots acceptés par l'automate. Il existe plusieurs modes d'acceptation pour définir ces configurations finales. Les principaux modes utilisés sont les suivants. Ils sont tous équivalents pour les automates non déterministes. Pour les automates déterministes, le mode d'acceptation par pile vide est plus faible car le langage accepté est nécessairement un code préfixe.

pile vide : les configurations finales sont toutes les configurations de la forme (q, ε) où la pile est vide.

état final : les configurations finales sont toutes les configurations de la forme (q, w) où l'état q appartient à un sous-ensemble F d'états distingués de Q et où le contenu de la pile est quelconque.

sommet de pile : les configurations finales sont les configurations (q, zw) où le sommet de pile z appartient à un sous-ensemble Z_0 de symboles de pile distingués de Z.

combinaison : toute combinaison des trois premiers.

Un mot f est *accepté* par un automate à pile s'il existe un calcul d'étiquette f de la configuration initiale (q_0, z_0) à une configuration finale.

Exemple 2.65. Soit l'automate à pile défini sur les alphabets d'entrée et de pile $A = \{a, b\}$ et $Z = \{z\}$ avec les états $Q = \{q_0, q_1\}$ et comportant les trois transitions suivantes :

$$q_0, z \xrightarrow{a} q_0, zzz \qquad q_0, z \xrightarrow{\varepsilon} q_1, \varepsilon \qquad q_1, z \xrightarrow{b} q_1, \varepsilon.$$

Un calcul valide pour cet automate est par exemple

$$q_0, z \xrightarrow{a} q_0, zzz \xrightarrow{\varepsilon} q_1, zz \xrightarrow{b} q_1, z \xrightarrow{b} q_1, \varepsilon.$$

Si on choisit un arrêt par pile vide, cet automate accepte le langage $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$. Si on choisit l'arrêt par état final avec l'ensemble $F = \{q_1\}$, il accepte le langage $L_2 = \{a^n b^p \mid 0 \leq p \leq 2n\}$.

Exemple 2.66. Soit l'automate à pile défini sur les alphabets d'entrée et de pile $A = \{a, b\}$ et $Z = \{A, B\}$ avec $z_0 = A$ comme symbole de pile initial. Il possède les états $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ et comporte les transitions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
q_0, A \xrightarrow{a} q_1, A & & q_2, A \xrightarrow{a} q_2, \varepsilon \\
q_0, A \xrightarrow{b} q_1, B & & q_2, B \xrightarrow{b} q_2, \varepsilon \\
q_1, A \xrightarrow{a} q_1, AA & q_1, A \xrightarrow{b} q_2, BA & q_1, A \xrightarrow{a} q_2, A \\
q_1, B \xrightarrow{a} q_1, AB & q_1, B \xrightarrow{b} q_2, BB & q_1, B \xrightarrow{a} q_2, B \\
q_1, A \xrightarrow{b} q_1, BA & q_1, A \xrightarrow{a} q_2, AA & q_1, A \xrightarrow{b} q_2, A \\
q_1, B \xrightarrow{b} q_1, BB & q_1, B \xrightarrow{a} q_2, AB & q_1, B \xrightarrow{b} q_2, B
\end{array}$$

Cet automate à pile accepte par pile vide l'ensemble des palindromes non vides (cf. exemple 2.8 p. 71). Il fonctionne de la façon suivante. Dans la première moitié du mot, l'automate empile les lettres lues. Dans la seconde moitié du mot, il vérifie que les lues lues coïncident avec les lettres dépilées. Plus précisément, les deux transitions de q_0 à q_1 remplacent le symbole de pile initial par la lettre lue.

Tant que l'automate est dans l'état q_1, il empile la lettre lue. Le passage de q_1 à q_2 se fait soit en empilant la lettre lue pour un palinfrome de longueur paire soit en l'ignorant pour un palindrome de longueur impaire. Dans l'état q_2, l'automate dépile et vérifie que les lettres coïncident. Cet automate n'a aucun moyen de déterminer la moitié du mot. Il est donc essentiel qu'il soit non déterministe.

Proposition 2.67 (Équivalence des modes d'acceptation)**.** *Les différents modes d'acceptation sont équivalents dans la mesure où ils permettent tous d'accepter exactement les mêmes langages (les langages algébriques).*

Un des problème des automates à pile est que le calcul se bloque dès que la pile devient vide. Cette difficulté peut être contournée en utilisant des automates à fond de pile testable qui peuvent tester si le somment de pile est le dernier symbole dans la pile. Un automate est dit *à fond de pile testable* si son alphabet de pile est partitionné $Z = Z_0 \uplus Z_1$ de sorte que le contenu de la pile de toute configuration accessible a un symbole de Z_0 au fond de la pile et des symboles de Z_1 au dessus, c'est-à-dire est dans $\varepsilon + Z_1^* Z_0$. Lorsque l'automate voit un sommet de pile de Z_0 il sait que celui-ci est le dernier symbole de la pile.

Il est possible de transformer un automate à pile quelconque en un automate à fond de pile testable. Pour cela, il faut doubler la taille de l'alphabet de pile en introduisant une copie $\bar{z}$ de chaque lettre z de Z. On pose alors $Z_0 = \{\bar{z} \mid z \in Z\}$ et $Z_1 = Z$. Chaque transition $p, z \xrightarrow{y} q, h$ donne alors les deux transitions $p, z \xrightarrow{y} q, h$ et $p, \bar{z} \xrightarrow{y} q, h'\bar{z}'$ si $h = h'z'$ avec $h' \in Z^*$ et $z' \in Z$. La première transition est utilisée lorsque la pile contient au moins deux symboles et la seconde lorsque $\bar{z}$ est l'unique symbole dans la pile.

Preuve. Nous montrons uniquement l'équivalence entre les acceptations par pile vide et par état d'acceptation. Les autres preuves sont similaires.

Soit un automate qui accepte par pile vide. On suppose qu'il est à fond de pile testable avec une partition $Z = Z_0 \uplus Z_1$ des symboles de pile. On ajoute un nouvel état q_+ qui devient l'unique état final. Ensuite, chaque transition $q, z \xrightarrow{y} q', \varepsilon$ avec $z \in Z_0$ qui vide la pile est remplacée par une transition $q, z \xrightarrow{y} q_+, \varepsilon$ qui fait passer dans l'état final.

Soit un automate qui accepte par état d'acceptation. On suppose encore qu'il est à fond de pile testable avec une partition $Z = Z_0 \uplus Z_1$ des symboles de pile. Il faut faire attention que certains calculs peuvent se bloquer en vidant la pile. On ajoute deux nouveaux états q_- et q_+ et des transitions $q_+, z \xrightarrow{\varepsilon} q_+, \varepsilon$ pour $z \in Z$ qui permettent de vider la pile dès que l'état q_+ est atteint. Pour chaque transition $q, z \xrightarrow{y} q', h$ où q' est final, on ajoute une transition $q, z \xrightarrow{y} q_+, \varepsilon$ permettant d'atteindre l'état q_+. Toute transition $q, z \xrightarrow{y} q', \varepsilon$ avec $z \in Z_0$ qui vide la pile sans atteindre un état final est remplacée par une transition $q, z \xrightarrow{y} q_-, z$ qui fait passer dans q_- sans vider la pile. □

Exercice 2.68. Donner un automate à pile qui accepte le langage de Dyck D_n^* (cf. exemple 2.8 p. 71 pour la définition)

Solution. On construit un automate à pile $\mathcal{A}$ qui accepte le langage de Dyck par état d'acceptation. L'automate $\mathcal{A}$ a deux états q_0 et q_1. L'état q_0 est initial et l'état q_1 est final. L'alphabet de pile est $Z = \{z_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ où z_0 est le

symbole de pile initial. L'ensemble E des transitions est donné ci-dessous.

$$\begin{aligned} E = &\{q_0, z \xrightarrow{a_i} q_0, \bar{a}_i z \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } z \in Z\}, \\ &\cup \{q_0, \bar{a}_i \xrightarrow{\bar{a}_i} q_0, \varepsilon \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ &\cup \{q_0, z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1, \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Cet automate fonctionne de la façon suivante. Si l'automate lit a_i, la lettre $\bar{a}_i$ est empilé quelque soit le symbole de haut de pile. Si l'automate lit $\bar{a}_i$, le symbole de haut de pile doit être $\bar{a}_i$ et celui-ci est dépilé. Cet automate accepte aussi le langage de Dyck par pile vide.

2.6.3 Équivalence avec les grammaires

On montre dans cette partie que les automates à pile sont équivalents aux grammaires dans le sens où les langages acceptés par les automates à pile sont exactement les langages engendrés par les grammaires.

Théorème 2.69 (Équivalence grammaires/automates à pile)**.** *Un langage $L \subseteq A^*$ est algébrique si et seulement si il existe un automate à pile qui accepte L.*

Preuve. On commence par montrer que pour toute grammaire G, il existe un automate à pile qui accepte les mots engendrés par G. Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire telle que $L = L_G(S_0)$. On suppose que toute règle de G est soit de la forme $S \to w$ avec $w \in V^*$, soit de la forme $S \to a$ avec $a \in A$. Il suffit pour cela d'introduire une nouvelle variable V_a pour chaque lettre a de A. Cette transformation est identique à la première étape de la mise en forme normale quadratique (cf. la preuve de la proposition 2.21).

On construit un automate à pile sur l'alphabet d'entrée A. Son alphabet de pile est l'ensemble V des variables de G. Il a un unique état q_0. Il possède une transition pour chaque règle de G. Son ensemble de transitions est donné par

$$\{q_0, S \xrightarrow{a} q_0, \varepsilon \mid S \to a \in P\} \cup \{q_0, S \xrightarrow{\varepsilon} q_0, h \mid S \to h \in P\}.$$

Pour les règles du premier ensemble, une lettre de l'entrée est lue et un symbole de pile est dépilé. Pour les règles du second ensemble, aucune lettre de l'entrée n'est lue et un ou plusieurs symboles de piles sont empilés. Il est facile de vérifier que cet automate simule les dérivations gauches de la grammaire.

Lorsque la grammaire est en forme normale de Greibach, l'automate équivalent peut être construit sans utiliser d'ε-transition. On suppose que toute règle de S est de la forme $S \to aw$ où $a \in A$ et $w \in V^*$. L'ensemble des transitions de l'automate est alors donné par

$$\{q_0, S \xrightarrow{a} q_0, w \mid S \to aw \in P\}.$$

Pour la réciproque, on utilise la méthode des triplets de Ginsburg. Soit un langage L accepté par un automate à pile $\mathcal{A}$ acceptant par pile vide. Pour simplifier les notations, on suppose que chaque transition de l'automate empile au plus deux symboles. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il suffit de décomposer les transitions qui empilent plus de symboles en plusieurs transitions. Il faut alors ajouter quelques états intermédiaires. On note q_0 et z_0 l'état initial et le symbole de pile initial de l'automate $\mathcal{A}$.

Soient q et q' deux états et z un symbole de pile de l'automate. On note $L_{q,q',z}$ l'ensemble des mots f tels qu'il existe un calcul d'étiquette f de la configuration (q,z) à la configuration (q',ε). Ceci signifie que l'automate peut partir de l'état q avec juste le symbole z dans pile, lire entièrement le mot f et arriver dans l'état q' avec la pile vide. Si un tel calcul est possible, il y a aussi un calcul d'étiquette f de la configuration (q,zw) à la configuration (q',w), pour tout mot w sur l'alphabet de pile. On a alors les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} L &= \bigcup_{q'\in Q} L_{q_0,q',z_0} \\ L_{q,q',z} &= \{y \mid q,z \xrightarrow{y} q',\varepsilon\} \\ &\cup \bigcup_{q,z\xrightarrow{y}q_1,z_1} yL_{q_1,q',z_1} \\ &\cup \bigcup_{q,z\xrightarrow{y}q_1,z_1z_2} yL_{q_1,q_2,z_1}L_{q_2,q',z_2} \end{aligned}$$

La première égalité traduit simplement que l'automate $\mathcal{A}$ accepte le langage L par pile vide et que l'état initial et le symbole de pile initial sont respectivement q_0 et z_0. La seconde égalité s'obtient en analysant le début du calcul de (q,z) à (q',ε). Si la première transition dépile z, le calcul s'arrête immédiatement et le mot f est égal à l'étiquette y de la transition. Si la première transition remplace z par z_1, il faut alors un calcul qui dépile z_1. Si la première transition remplace z par z_1z_2, il alors un calcul qui dépile d'abord z_1 puis z_2.

Ces égalités se traduisent directement en une grammaire ayant pour variables les triplets de le forme (q,q',z). Il est à remarquer que si l'automate ne possède pas d'ε-transition, alors la grammaire obtenue est en forme normale de Greibach. □

Il faut remarquer que la traduction d'une grammaire en un automate donne un automate ayant un seul état. Ceci montre que tout automate à pile est en fait équivalent à un automate à pile ayant un seul état. Si de plus la grammaire est en forme normale de Greibach, l'automate n'a pas d'ε-transition. Ceci montre que tout automate à pile est équivalent à un automate à pile sans ε-transition.

Exemple 2.70. La contruction d'un automate à partir de la grammaire $\{S \to aSa+bSb+a+b+\varepsilon\}$ pour engendrer les palindromes donne l'automate suivant. Cet automate a comme alphabet de pile $Z = \{S,A,B\}$ avec $z_0 = S$ comme symbole de pile initial. Cet automate a un seul état q et ses transitions sont les suivantes.

$$\begin{array}{llll} q,S \xrightarrow{\varepsilon} q,ASA & q,S \xrightarrow{\varepsilon} q,A & q,S \xrightarrow{\varepsilon} q,\varepsilon & q,A \xrightarrow{a} q,\varepsilon \\ q,S \xrightarrow{\varepsilon} q,BSB & q,S \xrightarrow{\varepsilon} q,B & & q,B \xrightarrow{b} q,\varepsilon \end{array}$$

Cet automate est à comparer avec l'automate de l'exemple 2.66.

Exemple 2.71. La méthode des triplets appliquée à l'automate de l'exemple 2.65, donne la grammaire $\{R \to aRRR, S \to aRRS + aRST + aSTT + \varepsilon, T \to b\}$

où les variables R, S, et T correspondent aux triplets (q_0, q_0, z), (q_0, q_1, z) et (q_1, q_1, z). Après réduction et substitution de T par b, on obtient la grammaire $\{S \to aSbb + \varepsilon\}$ qui engendre bien le langage $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$.

2.6.4 Automates à pile déterministes

La définition d'un automate à pile déterministe est technique même si l'idée intuitive est relativement simple. L'intuition est qu'à chaque étape de calcul, il n'y a qu'une seule transition possible. Ceci signifie deux choses. D'une part, si une ε-transition est possible, aucune autre transition n'est possible. D'autre part, pour chaque lettre de l'alphabet d'entrée, une seule transition au plus est possible.

Définition 2.72. Un automate à pile (Q, A, Z, E, q_0, z_0) est *déterministe* si pour toute paire (p, z) de $Q \times Z$,

- soit il existe une unique transition de la forme $p, z \xrightarrow{\varepsilon} q, h$ et il n'existe aucune transition de la forme $p, z \xrightarrow{a} q, h$ pour $a \in A$,
- soit il n'existe pas de transition de la forme $p, z \xrightarrow{\varepsilon} q, h$ et pour chaque lettre $a \in A$, il existe au plus une transition de la forme $p, z \xrightarrow{a} q, h$.

Exemple 2.73. L'automate de l'exemple 2.65 n'est pas déterministe. Pour la paire (q_0, z), cet automate possède une ε-transition $q_0, z \xrightarrow{\varepsilon} q_1, \varepsilon$ et une transition $q_0, z \xrightarrow{a} q_0, zzz$. Le langage $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ est accepté par pile vide par l'automate à pile déterministe ayant les états $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ et comportant les quatre transitions suivantes :

$$q_0, z \xrightarrow{a} q_1, zz \qquad q_1, z \xrightarrow{a} q_1, zzz \qquad q_1, z \xrightarrow{b} q_2, \varepsilon \qquad q_2, z \xrightarrow{b} q_2, \varepsilon.$$

Dans le cas des automates à pile déterministes, les différents modes d'acceptation ne sont plus équivalents. L'acceptation par pile vide permet seulement d'accepter des langages préfixes, c'est-à-dire des langages tels que deux mots du langage ne sont jamais préfixe l'un de l'autre.

Un langage algébrique est dit *déterministe* s'il est accepté par un automate à pile déterministe. L'intérêt de cette classe de langages est sa clôture par complémentation qui montre par ailleurs que cette classe est une sous-classe stricte des langages algébriques (cf. corollaire 2.46 p. 88).

Proposition 2.74. *Le complémentaire d'un langage algébrique déterministe est un langage algébrique déterministe.*

Preuve. La preuve de ce théorème n'est pas très difficile mais elle recèle quelques difficultés techniques que nous allons expliciter et résoudre.

La première difficulté est que l'automate n'est pas nécessairement complet. Il peut se bloquer au cours de la lecture d'un mot pour deux raisons. D'une part, il peut arriver qu'aucune transition ne puisse être effectuée. Il faut alors ajouter des transitions qui conduisent à un nouvel état puits. L'automate peut aussi se bloquer car la pile se vide avant la lecture complète du mot. Il faut alors transformer l'automate en un automate à fond de pile testable puis remplacer les transitions qui vident las pile par des transitions qui conduisent à l'état puits.

La seconde difficulté est que le calcul sur un mot d'entrée n'est pas unique bien que l'automate soit déterministe. Après la lecture de la dernière lettre du mot d'entrée, l'automate peut poursuivre le calcul en utilisant des ε-transitions. □

Une autre propriété importante des langages déterministe est la suivante.

Proposition 2.75. *Tout langage algébrique déterministe est non ambigu.*

Preuve. La construction par les triplets de Ginsburg d'une grammaire équivalente à automate produit une grammaire non ambiguë si l'automate de départ est déterministe. En effet, les arbres de dérivation de cette grammaire sont en correspondance avec les calculs de l'automate. Il s'ensuit que si l'automate est déterministe, la grammaire est non ambiguë. □

La réciproque de la proposition précédente est fausse comme le montre l'exemple suivant. Cet exemple montre également que la classe des langages déterministes n'est pas fermée pour l'union.

Exemple 2.76. Le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ est non ambigu. Par contre, il n'est pas déterministe. Même si l'idée intuitive de ce fait est relativement claire, la preuve en est particulièrement technique.

2.7 Compléments

Cette partie est consacrée à quelques compléments sur le groupe libre et les contenus de pile des automates. Dans les deux cas, l'approche est basée sur des réécritures. On commence donc par rappeler quelques résultats très classiques de réécriture.

2.7.1 Réécriture

On rappelle dans cette partie quelques résultats sur la terminaison et la confluence des relations qui seront utilisés par la suite. Pour une relation binaire notée $\to$, on note $\xrightarrow{*}$ la clôture réflexive et transitive de la relation $\to$. On dit qu'un élément x *se réduit* en y si $x \xrightarrow{*} y$.

Un élément x est dit *irréductible* ou *en forme normale* s'il n'existe pas d'élément y tel que $x \to y$. Une relation est *noethérienne* s'il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots$. L'intérêt des relations noethériennes est que tout élément se réduit en un élément en forme normale.

Proposition 2.77. *Si la relation $\to$ est noethérienne, tout élément se réduit en un élément en forme normale.*

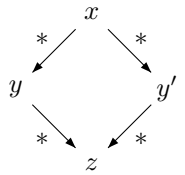


FIG. 2.7 – Propriété de confluence

Une relation $\to$ est *confluente* si pour tous éléments x, y et y' tels que $x \xrightarrow{*} y$ et $x \xrightarrow{*} y'$, il existe un élément z tel que $y \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z$. Cette propriété est représentée par la figure 2.7. Elle aussi appelée propriété diamant. La confluence

est parfois appelée propriété de Church-Rosser par référence à la confluence de la β-réduction du λ-calcul qui a été prouvée par Church et Rosser. L'intérêt principal de la confluence est qu'elle garantit l'unicité de la forme normale.

Proposition 2.78. *Si la relation $\to$ est confluente, tout élément se réduit en au plus un élément en forme normale.*

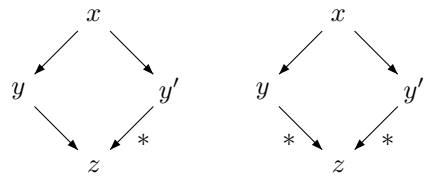


FIG. 2.8 – Confluences forte et locale

La confluence est souvent difficile à vérifier. Pour contourner cette difficulté, on introduit deux propriétés plus faciles à vérifier. Une relation $\to$ est *fortement confluente* si pour tous éléments x, y et y' tels que $x \to y$ et $x \to y'$, il existe un élément z tel que $y = z$ ou $y \to z$ et $y' \xrightarrow{*} z$. Une relation $\to$ est *localement confluente* si pour tous éléments x, y et y' tels que $x \to y$ et $x \to y'$, il existe un élément z tel que $y \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z$. Les propriétés de confluence forte et de confluence locale sont représentées à la figure 2.8. La terminologie est cohérente car la confluence forte implique bien la confluence.

Proposition 2.79. *Toute relation fortement confluente est confluente.*

Preuve. Soient trois éléments x, y et y' tels que $x \xrightarrow{*} y$ et $x \xrightarrow{*} y'$. Par définition, il existe deux suites $y_0, \ldots, y_m$ et $y'_0, \ldots, y'_n$ d'éléments telles que $y_0 = y'_0 = x$, $y_m = y$, $y'_n = y'$, $y_i \to y_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et $y'_i \to y'_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On montre l'existence de z tel que $y \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z$ par récurrence sur n. Si $n = 0$, le résultat est trivial puisque $y' = x$ et que $z = y$ convient. On suppose maintenant que $n \geq 1$. On définit par récurrence une suite d'éléments $z_0, \ldots, z_m$ de la manière suivante. On pose $z_0 = y'_1$. On suppose avoir défini z_i tel que $y_i \to z_i$. On applique alors la confluente locale pour trouver z_{i+1} tel que $y_{i+1} \to z_{i+1}$ et $z_i \xrightarrow{*} z_{i+1}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à y'_1 puisque y'_1 se réduit en $n-1$ étapes à y' et en certain nombre d'étapes à z_m On trouve alors z tel que $z_m \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z$ et donc tel que $y \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z$. □

FIG. 2.9 – Relation localement confluente mais non confluente

La confluence locale n'implique pas la confluence dans le cas général. La relation représentée à la figure 2.9 est localement confluente mais elle n'est pas confluente. Par contre, elle n'est pas noethérienne puisque qu'on a la suite de réductions $x \to x' \to x \to \cdots$. Le résultat suivant est souvent appelé lemme de Newman.

Proposition 2.80 (Newman)**.** *Toute relation noethérienne et localement confluente est confluente.*

La confluence d'une relation de réécriture est souvent une façon d'obtenir une forme normale unique. Dans ce cas, la réécriture doit aussi être noethérienne pour assurer l'existence de la forme normale. L'hypothèse du lemme précédent est alors naturelle et peu contraignante.

Preuve. Soit une relation $\rightarrow$ noethérienne et localement confluente. Puisque $\rightarrow$ est noethérienne, tout élément se réduit à au moins un élément en forme normale. On va montrer que tout élément se réduit en fait à un seul élément en forme normale. Cela suffit pour prouver la confluence de la relation $\rightarrow$. Si les trois éléments x, y, et y' vérifient $x \xrightarrow{*} y$ et $x \xrightarrow{*} y'$, il existe des éléments z et z' en forme normale tels que $y \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z'$. On déduit des relations $x \xrightarrow{*} z$ et $z \xrightarrow{*} z'$ que $z = z'$.

Supposons qu'il existe deux éléments en forme normale z et z' tels que $x \xrightarrow{*} z$ et $x \xrightarrow{*} z'$. On construit par récurrence une suite d'éléments $(x_n)_{n\geq 0}$ tels que $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots$. On pose $x_0 = x$ et on suppose avoir défini x_i tel qu'il existe deux éléments z_i et z'_i en forme normale tels que $x_i \xrightarrow{*} z_i$ et $x_i \xrightarrow{*} z'_i$. Il existe alors des éléments y et y' tels que $x_i \rightarrow y \xrightarrow{*} z_i$ et $x_i \rightarrow y' \xrightarrow{*} z'_i$. Si $y = y$', on choisit $x_{i+1} = y$. Sinon, on applique la confluence locale pour trouver z en forme normale tel que $y \xrightarrow{*} z$ et $y' \xrightarrow{*} z$. Si $z \neq z_i$, on choisit $x_{i+1} = y$, $z_{i+1} = z'_{i+1}$ et $z'_{i+1} = z$. Sinon on choisit $x_{i+1} = y'$, $z_{i+1} = z$ et $z'_{i+1} = z'_i$. □

2.7.2 Contenus de pile

Nous allons utiliser les résultats sur les relations confluentes pour montrer que les contenus de pile des configurations accessibles d'un automate à pile forment un langage rationnel. Soit un automate à pile (cf. définition 2.63) d'alphabet d'entrée A, d'alphabet de pile Z, d'état initial q_0 et de symbole de pile initial z_0. On définit le langage H de la manière suivante.

$$H = \{h \in Z^* \mid \exists f \in A^* \ \exists q \in Q \ \ (q_0, z_0) \xrightarrow{f} (q, h)\}$$

Théorème 2.81. *Pour tout automate à pile, le langage H est rationnel.*

Monoïde polycyclique

Soit A_n l'alphabet $\{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$. On définit la relation $\rightarrow$ sur A_n^* de la manière suivante. Deux mots w et w' vérifient $w \rightarrow w'$ s'il existe deux mots u et v sur A_n et un indice i tel que $w = ua_i\bar{a}_iv$ et $w' = uv$. La relation $\rightarrow$ est noethérienne puisque $w \rightarrow w'$ implique $|w|' = |w| - 2$. On vérifie aussi facilement qu'elle est fortement confluente et donc confluente d'après la proposition 2.79. On note $\rho(w)$ l'unique mot irréductible tel que $w \xrightarrow{*} \rho(w)$. On définit alors la relation d'équivalence $\sim$ sur A_n^* par $w \sim w'$ si $\rho(w) = \rho(w')$. Cette relation est en fait une congruence sur A_n^*. Le *monoïde polycyclique* engendré par A_n est alors le monoïde quotient $A_n^*/\sim$.

Le lemme suivant établit un lien entre le monoïde polycyclique et le langage de Dyck (cf. exemple 2.8 p. 71).

Lemme 2.82. *Le langage $\{w \mid \rho(w) = \varepsilon\}$ est égal au langage de Dyck D_n^* sur n paires de parenthèses.*

Preuve. On montre par récurrence sur la longueur de la dérivation que tout mot de langage se réduit au mot vide. Inversement, on montre par récurrence sur la longueur de la réduction que tout mot qui se réduit au mot vide est dans le langage de Dyck. □

On définit la substitution σ de A_n^* dans A_n^* par $\sigma(a) = D_n^* a D_n^*$ pour toute lettre a de A_n. Le lemme suivant établit la propriété clé de cette substitution.

Lemme 2.83. *Pour tout mot $w \in A_n^*$, on a $\sigma(w) = \{w' \mid w' \xrightarrow{*} w\}$.*

Preuve. Pour tout mot $w = w_1 \cdots w_k$, on a $\sigma(w) = D_n^* w_1 D_n^* w_2 \cdots D_n^* w_k D_n^*$. Il est alors évident d'après le lemme précédent que tout mot w' de $\sigma(w)$ vérifie $w' \xrightarrow{*} w$. Inversement, on prouve par récurrence sur la longueur de la réduction de w' à w que tout mot qui vérifie $w' \xrightarrow{*} w$ est dans $\sigma(w)$. □

Corollaire 2.84. *Pour tout langage rationnel K de A_n^*, le langage $\rho(K) = \{\rho(w) \mid w \in K\}$ est rationnel.*

Preuve. Le langage $L = \{w' \mid \exists w \in K \quad w \xrightarrow{*} w'\}$ est égal à $\sigma^{-1}(K)$ est il est donc rationnel d'après la proposition 1.140. Le langage $\rho(K)$ est égal à $L \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_n^* a_i \bar{a}_i A_n^*$ est il est donc aussi rationnel. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 2.81.

Preuve du théorème 2.81. Pour un mot $w = w_1 \cdots w_n$, on note $\tilde{w}$ le mot miroir $w_n \cdots w_1$ obtenu en renversant le mot w. On montre que le langage miroir $\tilde{H} = \{\tilde{h} \mid h \in H\}$ est rationnel, ce qui implique immédiatement que H est aussi rationnel.

Soit $\mathcal{A}$ un automate à pile. Quitte à renommer les symboles de pile, on suppose que l'alphabet de pile de $\mathcal{A}$ est $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit E l'ensemble des transitions de $\mathcal{A}$. On définit un morphisme μ de E^* dans A_n^* en posant $\mu(\tau) = \bar{z}\tilde{h}$ pour toute transition τ égale à $q, z \xrightarrow{y} q', h$. Deux transitions τ et τ' de $\mathcal{A}$ sont dites consécutives si l'état d'arrivée de τ est l'état de départ de τ'. Il faut bien noter que deux transitions consécutives ne peuvent pas nécessairement être enchaînées dans un calcul. En effet, le dernier symbole de pile empilé par τ n'est pas le même que le symbole de pile dépilé par τ'. Le fait qu'elles puissent être enchaînées dépend même du contenu de pile dans le cas où le mot empilé par τ est vide. On note K l'ensemble des suites consécutives de transitions de $\mathcal{A}$. Cet ensemble est bien sûr rationnel. On a alors l'égalité

$$\tilde{H} = \rho(z_0 \mu(K)) \cap \{a_1, \ldots, a_n\}^*$$

qui montre, grâce au corollaire précédent, que $\tilde{H}$ est rationnel. □

2.7.3 Groupe libre

Soit A_n l'alphabet $\{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$. La fonction $a \mapsto \bar{a}$ est étendue à tout A_n en posant $\bar{\bar{a}}_i = a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Elle devient alors une involution sur A_n.

On définit la relation $\to$ sur A_n^* de la manière suivante. Deux mots w et w' vérifient $w \to w'$ s'il existe deux mots u et v sur A_n et une lettre a de A_n tel que $w = ua\bar{a}v$ et $w' = uv$. La relation $\to$ est noethérienne puisque $w \to w'$ implique $|w|' = |w| - 2$. On vérifie aussi facilement qu'elle est fortement confluente et

donc confluente d'après la proposition 2.79. L'ensemble des mots irréductibles est $I = A_n^* \setminus A_n^*(\sum_{a\in A_n} a\bar{a})A_n^*$. On note $\rho(w)$ l'unique mot irréductible tel que $w \xrightarrow{*} \rho(w)$. On définit alors la relation d'équivalence $\sim$ sur A_n^* par $w \sim w'$ si $\rho(w) = \rho(w')$. Cette relation est en fait une congruence sur A_n^*. Le *groupe libre* engendré par A_n, noté $F(A_n)$, est alors le monoïde quotient $A_n^*/\sim$. Comme chaque classe d'équivalence de $\sim$ contient un seul mot irréductible, on peut identifier les éléments du $F(A_n)$ avec l'ensemble I des mots irréductibles sur A_n. Le produit dans $F(A_n)$ est alors défini par $u, v \mapsto \rho(uv)$ pour deux mots irréductibles u et v. Pour un élément x de $F(A_n)$, c'est-à-dire une classe de $\sim$, on note $\iota(x)$ l'unique mot de x qui est irréductible. L'application ι est l'*injection canonique* de $F(A_n)$ dans A_n^*. Pour un ensemble $X \subseteq F(A_n)$, on note également $\iota(X)$ l'ensemble $\{\iota(x) \mid x \in X\}$.

La terminologie est justifiée par la propriété suivante. Pour tout mot $w = w_1 \cdots w_k$, le mot w^{-1} égal à $\bar{w}_k \cdots \bar{w}_1$ est un inverse de w dans $A_n^*/\sim$. On vérifie en effet que $\rho(ww^{-1}) = \rho(w^{-1}w) = \varepsilon$. Le monoïde $A_n^*/\sim$ est en fait un groupe.

Le corollaire 2.84 reste vrai dans le cas de la réduction qui vient d'être introduite pour définir le groupe libre. Il en découle le résultat classique suivant.

Théorème 2.85 (Benois 1969)**.** *Une partie $X \subseteq F(A_n)$ est une partie rationnelle de $F(A_n)$ si et seulement si $\iota(X)$ est une partie rationnelle de A_n^*.*

Le corollaire suivant découle immédiatement du théorème de Benois.

Corollaire 2.86. *La famille des parties rationnelles de $F(A_n)$ est close pour les opération booléennes (union, intersection et complémentation).*

Les parties reconnaissables du groupe libre sont les unions finies de classes d'un sous-groupe d'indice fini. En effet, si μ est un morphisme de monoïde de $A_n^*/\sim$ dans un monoïde fini M, alors M est nécessairement un groupe et μ est en fait un morphisme de groupe.

Sous-groupes rationnels

Lorsque le monoïde sous-jacent est un groupe G, les sous-groupes rationnels de G jouent un rôle important car ils ont la caractérisation suivante.

Proposition 2.87. *Un sous-groupe H d'un groupe G est une partie rationnelle de G si et seulement si il est finiment engendré.*

Preuve. Si le sous-groupe H est engendré par l'ensemble fini $\{g_1, \ldots, g_k\}$, alors il est égal à l'étoile K^* de l'ensemble $K = \{g_1, \ldots, g_k, g_1^{-1}, \ldots, g_k^{-1}\}$ et il est donc rationnel.

Réciproquement, soit $\mathcal{A} = (Q, G, E, I, F)$ un automate qui accepte le sous-groupe H. Un chemin dans $\mathcal{A}$ est dit *simple* s'il ne repasse pas deux fois par le même état hormis peut-être pour l'état de départ et l'état d'arrivée qui peuvent coïncider. Un chemin est dit *presque simple* s'il se décompose $p \xrightarrow{u} q \xrightarrow{v} q \xrightarrow{w} r$ où les deux chemins $p \xrightarrow{u} q \xrightarrow{w} r$ et $q \xrightarrow{v} q$ sont simples. L'ensemble des calculs presque simples est fini puisqu'un tel chemin est de longueur au plus $2|Q|$. On note K l'ensemble fini des étiquettes des chemins réussis presque simples. On montre alors que H est engendré par K. Il est clair que $K \subseteq H$. Supposons par l'absurde que K n'engendre pas H et soit un chemin réussi c le plus court possible tel que son étiquette $h \in H$ n'est pas dans le sous-groupe engendré

par K. Puisque le chemin c n'est pas simple (car sinon $h \in K$), il se décompose $p \xrightarrow{u} q \xrightarrow{v} q \xrightarrow{w} r$ où le calcul $q \xrightarrow{v} q \xrightarrow{w} r$ est presque simple. Il existe alors un calcul $i \xrightarrow{u'} q$ tel que le calcul $i \xrightarrow{u'} q \xrightarrow{v} q \xrightarrow{w} r$ soit réussi et presque simple. On alors les égalités $h = uvw = gw(u'w)^{-1}u'vw$ qui montrent que h appartient au sous-groupe engendré par K. □

Dans le cas du groupe libre, la proposition précédente et le corollaire du théorème de Benoit permettent de retrouver un résultat très classique.

Théorème 2.88 (Howson)**.** *L'intersection de deux sous-groupes finiment engendrés d'un groupe libre $F(A_n)$ est encore un sous-groupe finiment engendré.*

Deuxième partie

Calculabilité et complexité

Chapitre 3

Calculabilité

L'objectif de ce chapitre est de définir la notion de calculable et de montrer que les réponses à certaines questions ne sont pas calculables. Cette notion va être introduite par l'intermédiaire des machines de Turing qui fournissent un modèle de calcul abstrait pas trop éloigné du fonctionnement d'un ordinateur. Il existe d'autres modèles de calcul comme les fonctions récursives ou le λ-calcul.

3.1 Préliminaires

Les graphes et la logique fournissent de nombreux problèmes intéressants qui vont être abordés tout au long des deux prochains chapitres. L'objectif de cette petite partie est de rappeler les définitions élémentaires et de fixer la terminologie.

3.1.1 Graphes

Le but de cette partie est de regrouper définitions de plusieurs notions concernant les graphes. Ces différentes notions sont utilisées tout au long de cet ouvrage. Le vocabulaire des graphes s'avère en effet très pratique pour énoncer certaines propriétés. Les automates qui sont un des objets centraux du premier chapitre sont très proches des graphes dans la mesure où il peuvent vus comme des graphes enrichis. Les graphes fournissent également beaucoup de problèmes fondamentaux dans le cadre de la calculabilité et de la complexité qui seront abordées aux troisième et quatrième chapitre.

On appelle *graphe orienté* un couple (V, E) où V est un ensemble quelconque de *sommets* et $E \subseteq V \times V$ est l'ensemble des *arêtes*. L'ensemble E est en fait une relation binaire sur l'ensemble des sommets. Un graphe est une façon commode de manipuler et visualiser une relation binaire. Un graphe peut aussi être vu comme un automate sans états initiaux et sans états finaux et dont les transitions n'ont pas d'étiquette. Une arête (u, v) est souvent notée $u \to v$ comme une transition d'automate. Les sommets u et v sont appelés *sommet de départ* et *sommet d'arrivée* de cette arête.

Exemple 3.1. Soit le graphe $G = (V, E)$ donné par $V = \{0, 1, 2, 3\}$ et $E = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 0), (3, 1)\}$. Ce graphe est représenté à la figure 3.1.

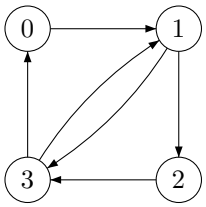


FIG. 3.1 – Un exemple de graphe à 4 sommets

Deux arêtes (u, v) et (u', v') sont dites *consécutives* si $v = u'$. Un *chemin* est une une suite d'arêtes consécutives qui est notée $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_n$. La *longueur* du chemin est pas définition le nombre d'arêtes de la suite. Les sommets v_0 et v_n sont appelés *sommet de départ* et *sommet d'arrivée* du chemin. Il est souvent pratique d'identifier une arête avec un chemin de longueur 1. De même, il est souvent commode de considérer que pour chaque sommet v, il existe un chemin de longueur 0 ayant v comme sommet de départ et d'arrivée. Un *cycle*, appelé aussi *circuit*, est un chemin dont le sommet de départ est égal au sommet d'arrivée. Un graphe est dit *acyclique* s'il ne contient pas de cycle autre que les cycles triviaux de longueur 0.

Un chemin est *hamiltonien* s'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe. On dit qu'un cycle est hamiltonien s'il passe une fois et une seule par chaque sommet à l'exception du sommet de départ qui est aussi le sommet d'arrivée. La longueur d'un cycle hamiltonien est le nombre de sommets du graphe. Le cycle $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0$ du graphe de la figure 3.1 est hamiltonien. Le problème de savoir si un graphe possède un chemin hamiltonien est un problème difficile comme nous le montrerons au dernier chapitre.

Un chemin est *eulérien* s'il utilise une fois et une seule chaque arête du graphe. La longueur d'un tel chemin est donc le nombre d'arête du graphe. Le cycle $0 \to 1 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0$ du graphe de la figure 3.1 est eulérien. Un graphe possède un cycle eulérien si et seulement si pour chaque sommet v, le nombre d'arête ayant v comme sommet d'arrivée est égal au nombre d'arête ayant v comme sommet de départ. Cette condition est évidemment nécessaire mais elle aussi s'avère suffisante de façon assez surprenante. Cette caractérisation due à Euler permet de vérifier en temps linéaire si un graphe donné possède un cycle eulérien. Malgré leur apparence superficielle, les deux problèmes de savoir si un graphe possède un chemin hamiltonien et un chemin eulérien sont en fait de difficultés très différentes.

Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est une sous-ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que pour tout sommets différents u et v de C, l'arête (u, v) appartient à E. Le sous-ensemble $\{1, 3\}$ est une clique du graphe de la figure 3.1.

Pour un graphe $G = (V, E)$, on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur V de la façon suivante. Deux sommets vérifient $v \sim v'$ s'il existe dans G un chemin de v à v' et un chemin de v' à v. Les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence sont appelées *composante fortement connexe* de G. Le graphe de la figure 3.1 possède une seule composante fortement connexe. Il existe un algorithme en temps linéaire qui calcule les composantes fortement connexes d'un graphe.

3.1.2 Logique propositionnelle

On rappelle ici quelques notions élémentaires de logique propositionnelle. Il s'agit juste de donner quelques définitions très simples et de fixer le vocabulaire et les notations.

Soit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ l'ensemble des valeurs booléennes. Trois opérations appelées *négation*, *et logique* et *ou logique* et notées $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ sont définies sur cet ensemble. La négation est une opération unaire. Elle associe à chaque valeur b de $\mathbb{B}$ la valeur $1 - b$. Les *et* et *ou* logiques sont des opérations binaires qui associent à deux valeurs b et b' de $\mathbb{B}$ les valeurs $\min(b, b')$ et $\max(b, b')$. Les tables de valeurs de ces trois opérations sont rappelées ci-dessous.

	$\neg$
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

On suppose fixé un ensemble $\mathcal{V}$ de variables. Les formules de la *logique propositionnelle* sont les formules construites à partir des variables et des constantes 0 et 1 avec la négation $\neg$ et les deux connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

Une *affectation* (des variables) est une application v de l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ qui donne à chaque variable x une *valeur de vérité* dans $\mathbb{B}$. Une affectation s'etend naturellement aux formules de la logique propositionnelle en posant $v(\neg\varphi) = \neg v(\varphi)$, $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \wedge v(\psi)$ et $v(\varphi) \vee \psi) = v(\varphi) \vee v(\psi)$. Une telle extension est en fait l'extension naturelle d'une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{B}$ à un morphisme d'algèbre de Boole de l'ensemble des formules dans $\mathbb{B}$.

On appelle littéral une formule égale à une variable x ou à la négation $\neg x$ d'une variable. Le littéral $\neg x$ est souvent notée $\bar{x}$. Pour un littéral l, on note $\bar{l}$ le littéral $\bar{x}$ si $l = x$ et le littéral x si $l = \bar{x}$. Une formule est dite en *forme normale conjonctive* si elle est une conjonction $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ où chaque formule φ_i est une disjonction $l_{i,1} \vee \cdots \vee l_{i,n_i}$ de littéraux. Les formules φ_i sont appelées les *clauses* de la formule φ. Les formules ayant au plus 2 ou 3 littéraux dans chaque clause jouent un rôle particulier en complexité. Il existe aussi une forme normale disjonctive obtenue en échangeant les rôles des conjonctions et disjonctions mais celle-ci n'est pas utilisée dans cet ouvrage.

Une formule φ est dite *satisfiable* s'il existe une affectation v des variables telle que $v(\varphi) = 1$.

3.2 Introduction

On commence par définir la notion de problème puis de codage qui permet de passer d'un problème à un langage. On introduit ensuite les machines de Turing qui nous serviront de modèle de calcul.

3.2.1 Notion de problème

On commence par définir un problème qui fixe un ensemble de questions appelées *instances du problème* ainsi que le sous-ensemble dse questions ayant une réponse positive. On s'intéresse à des problèmes de décisions. Ce sont par

définition les problèmes pour lesquels les réponses aux questions sont *oui* ou *non*.

Définition 3.2 (Problème de décision)**.** Un *problème de décision* est la donnée d'un ensemble E d'*instances* et d'un sous-ensemble $P \subseteq E$ des instances dites *positives* pour lesquelles la réponse est *oui*.

Exemple 3.3. On peut considérer les problèmes suivants :
- Nombres premiers : l'ensemble E des instances est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $P = \{n \mid n \text{ premier}\}$.
- Automates (acceptance) : $E = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ automate et } w \text{ mot}\}$, $P = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ accepte } w\}$.
- Graphes connexes : $E = \{G \mid G \text{ graphe fini}\}$, $P = \{G \mid G \text{ est connexe}\}$.
- Grammaires ambiguës : $E = \{G \mid G \text{ grammaire}\}$, $P = \{G \mid G \text{ ambiguë}\}$ ou encore $P' = \{G \mid L_G(S) \text{ ambigu}\}$.

3.2.2 Notion de codage

Les machines de Turing que nous allons introduire pour définir la notion de calculabilité sont semblables aux automates. Elles travaillent sur des mots d'un alphabet fixé. Pour que les instances d'un problème puissent être données en entrée à ces machines, il est indispensable que ces instances soient représentées par des mots. La même problématique se pose en programmation. Tous les objets manipulés par un programme doivent avoir une représentation interne dans l'ordinateur. Il s'agit donc d'avoir une représentation sous forme de mots des objets considérés.

La façon dont est donné un objet peut avoir une incidence sur la difficulté de répondre à une question sur cet objet. Un entier peut par exemple être fourni de plusieurs façons différentes. Il peu être donné par son écriture en base 10 mais il peut aussi être fourni par la liste de ses facteurs premiers écrits eux-mêmes en base 10. La question de savoir si cet entier est premier ou non est très différente selon la manière dont il est donné. Elle requiert un certain travail dans le premier cas alors qu'elle est relativement triviale dans le second cas.

Pour éviter ce genre de problème liés au codage, on impose que le codage soir naturel même si cette notion n'est pas formellement définie. C'est en fait une question de bon sens.

Définition 3.4 (Langage d'un problème)**.** Pour associer un langage à un problème, on utilise un *codage* qui est une fonction *naturelle* injective de E dans Σ^*. Le codage de $x \in E$ est noté $\langle x \rangle$. Le *langage* associé à un problème P est l'ensemble $L_P = \{\langle x \rangle \mid x \in P\}$ des codages des instances positives.

Exemple 3.5. Quelques exemples de codages.

Entiers. On peut prendre pour $\langle n \rangle$ l'écriture en base 10 ou en base 2 de n ou même l'écriture en base 1 où le codage de n est le mot 1^n sur l'alphabet $\Sigma = \{1\}$.

Graphes. On peut adopter le codage suivant sur l'alphabet Σ formés des chiffres 0 et 1 et des parenthèses (et) et de la virgule ','. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. On associe un numéro entre 0 et $|V| - 1$ à chaque sommet de V. Le codage $\langle v \rangle$ d'un sommet v est l'écriture binaire du numéro de v. Le codage $\langle V \rangle$ de l'ensemble V est formé par les codages

des sommets séparés par des virgules et entourés et par des parenthèses. Chaque arête (u, v) est codée par le mot $(\langle u\rangle, \langle v\rangle)$ sur Σ et le codage $\langle E\rangle$ est aussi formé par les codages des arêtes séparés par des virgules et entourés et par des parenthèses. Le codage du graphe G est finalement le mot $(\langle V\rangle, \langle E\rangle)$. Le codage du graphe de la figure 3.1 est le mot $((0, 1, 10, 11), ((0, 1), (1, 10), (1, 11), (10, 11), (11, 0), (11, 1), (11, 10)))$.

3.2.3 Machines de Turing

Introduction

Une *machine de Turing* se compose d'une partie de contrôle et d'une bande infinie sur laquelle se trouvent écrits des symboles. La partie de contrôle est constituée d'un nombre fini d'états possibles et de transitions qui régissent les calculs de la machine. Les symboles de la bandes sont lus et écrits par l'intermédiaire d'une *tête de lecture/écriture*. Dans la suite, cette tête est simplement appelée *tête de lecture* même si elle permet de lire et d'écrire.

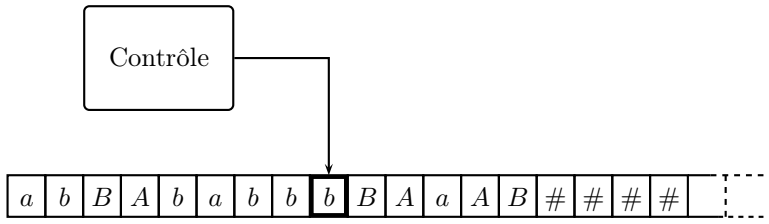


FIG. 3.2 – Machine de Turing

Les machines de Turing sont une abstraction des ordinateurs. La partie de contrôle représente le microprocesseur. Un élément essentiel est que le nombre d'états est *fini*. Ceci prend en compte que les microprocesseurs possèdent un nombre déterminé de registres d'une taille fixe et que le nombre de configurations possibles est fini. La bande représente la mémoire de l'ordinateur. Ceci comprend la mémoire centrale ainsi que les mémoires externes telles les disques durs. La tête de lecture représente la bus qui relie le microprocesseur à la mémoire. Contrairement à un ordinateur, la mémoire d'une machine de Turing est infinie. Ceci prend en compte qu'on peut ajouter des disques durs à un ordinateur de façon (presque) illimitée. Une autre différence entre une machine de Turing et un ordinateur est que l'ordinateur peut accéder à la mémoire de manière directe (appelée aussi aléatoire) alors que la tête de lecture de la machine de Turing se déplace que d'une position à chaque opération.

Le contrôle de la machine est constitué d'un nombre fini d'états $q_0, \ldots, q_n$. À chaque instant, la machine se trouve dans un de ces états. Au départ, la machine se trouve dans l'état q_0 qu'on appelle *état initial*. Le calcul d'une machine de Turing est formé d'une suite d'*étapes de calcul* qui sont effectuées par la machine. Chaque étape consiste à changer l'état de contrôle, écrire un symbole sous la tête de lecture et déplacer la tête de lecture. Les étapes de calcul possibles sont décrites par les transitions de la machine. Les transitions constituent en quelque sorte le programme de la machine.

Définition

Nous donnons maintenant la définition précise d'une machine de Turing. De manière formelle,

Définition 3.6. Une machine de Turing $\mathcal{M}$ est un septuplet $(Q, \Sigma, \Gamma, E, q_0, F, \#)$ où

- $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$ est un ensemble fini d'*états de contrôle*.
- Σ est l'*alphabet d'entrée*. C'est un ensemble *fini* de symboles qui ne contient pas le symbole blanc #. Cet alphabet est utilisé pour écrire la donnée initiale sur la bande.
- Γ est l'*alphabet de bande*. C'est un ensemble *fini* qui comprend tous les symboles qui peuvent être écrits sur la bande. Ceci inclut bien sûr l'alphabet d'entrée Σ et le symbole blanc #.
- E est un ensemble fini de *transitions* de la forme (p, a, q, b, x) où p et q sont des états, a et b sont des symboles de bande et x est un élément de $\{\triangleleft, \triangleright\}$. Une transition (p, a, q, b, x) est aussi notée $p, a \to q, b, x$.
- $q_0 \in Q$ est l'*état initial* dans lequel se trouve machine au début d'un calcul.
- F est l'ensemble des *états finaux* appelés aussi *états d'acceptation*.
- # est le *symbole blanc* qui, au départ, remplit toutes les positions de la bande autres que celles contenant la donnée initiale.

Une machine de Turing est *déterministe* si pour tout état p et tout symbole a, il existe au plus une transition de la forme $p, a \to q, b, x$. Lorsque la machine est déterministe, l'ensemble E de transitions est aussi appelé *fonction de transition* et est noté δ. La fonction δ associe à chaque paire (p, a) l'unique triplet (q, b, x), s'il existe, tel que $p, a \to q, b, x$ soit une transition. Lorsque la machine n'est pas déterministe, l'ensemble E peut encore être vu comme une fonction δ. Dans ce cas, la fonction δ associe à chaque paire (p, a) l'ensemble des triplets (q, b, x) tels que $p, a \to q, b, x$ soit une transition.

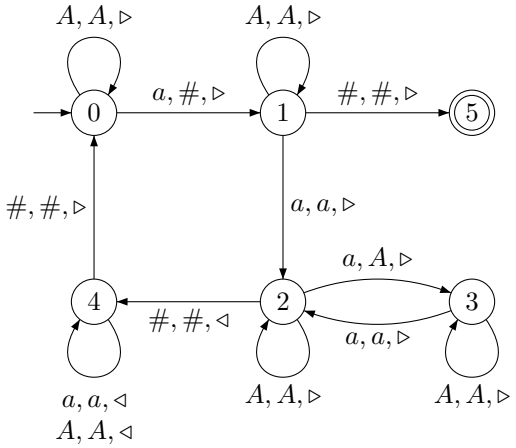


FIG. 3.3 – Un exemple de machine de Turing

Exemple 3.7. La machine représentée à la figure 3.3 accepte les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a\}$ dont la longueur est une puissance de 2. Le principe général de cette machine est de remplacer un symbole a sur 2 par A ou # par des parcours successifs de la bande. Elle accepte lorsqu'il ne reste plus qu'un seul a sur la bande.

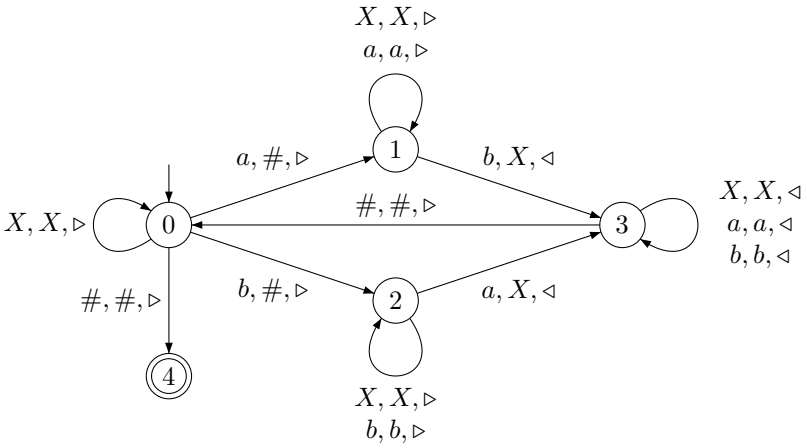


FIG. 3.4 – Un autre exemple de machine de Turing

Exemple 3.8. La machine représentée à la figure 3.4 accepte l'ensemble $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a et de b. Une machine à deux bandes est donnée pour ce langage à l'exemple 3.16.

Configurations et calculs

Le principe global de fonctionnement d'une machine de Turing est le suivant. Une entrée, c'est-à-dire un mot fini sur l'alphabet d'entrée, est écrit sur la bande de la machine. Le reste de la bande est rempli avec le symbole blanc. La tête de lecture est placée sur le premier symbole du mot d'entrée. Ensuite, la machine commence son calcul jusqu'à arriver éventuellement dans un état où elle accepte l'entrée.

Pour décrire le fonctionnement précis d'une machine de Turing, il est nécessaire d'introduire la notion de configuration. Une *configuration* d'une machine de Turing est l'état *global* de la machine à un instant donné. Elle comprend

1. l'état de contrôle qui est un élément de Q,
2. le contenu de la bande,
3. la position de la tête de lecture sur la bande.

Si la machine se trouve dans un état q, la configuration est écrite uqv où u est le contenu de la bande (strictement) à gauche de la tête de lecture et v est le contenu de la tête à droite de la tête de lecture (cf. la figure ci-dessous). Le symbole sous la tête de lecture est donc le premier symbole de v. Quand on décrit une configuration de la machine, les symboles blancs qui se trouvent dans la partie infinie à droite de la bande sont omis. Ceci permet de décrire une configuration de façon finie. Si par exemple, la machine de la figure 3.5 se trouve dans l'état q, sa configuration est $abBAbabbqbBAaAB$ parce que le contenu de

la bande avant la tête de lecture est $abBAbabb$ et que le contenu après la tête de lecture est $bBAaAB$ suivi de symboles blancs. Tous les symboles # à droite sont implicites et ne sont pas écrits.

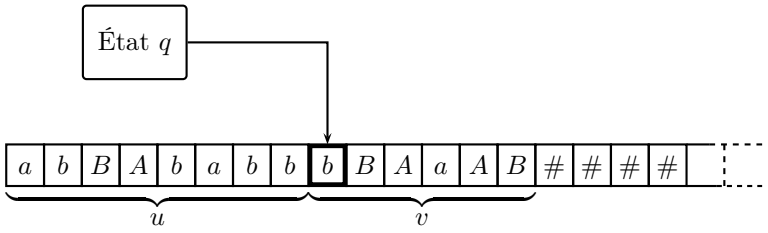


FIG. 3.5 – Configuration $abBAbabbqbBAaAB$

Au départ, la bande contient la donnée initiale et la tête de lecture se trouve sur la première position de la bande. La *configuration initiale* s'écrit donc q_0w où q_0 est l'état initial et w est la donnée initiale.

Un calcul d'une machine de Turing se décompose en étapes. Une étape d'un calcul consiste à passer d'une configuration à une autre configuration en appliquant une des transitions de l'ensemble E. Une étape de calcul comprend les trois actions suivantes :

1. changer l'état de contrôle,
2. écrire un symbole à la place du symbole sous la tête de lecture,
3. déplacer la tête de lecture d'une position vers la gauche ou la droite.

Une transition de la forme $p, a \to q, b, x$ peut uniquement être appliquée si la machine se trouve dans l'état p et si le symbole sous la tête de lecture est a. Après application de cette transition, la machine se trouve dans l'état q, le symbole a est remplacé sur la bande par b et la tête de lecture se déplace d'une position vers la gauche si $x = \triangleleft$ ou d'une position vers la droite si $x = \triangleright$.

Définition 3.9 (Étape de calcul)**.** Une *étape de calcul* est une paire de configuration (C, C') notée $C \to C'$ telle que :
- soit $C = ucpav$ et $C' = uqcbv$ et $p, a \to q, b, \triangleleft$ est une transition
- soit $C = upav$ et $C' = ubqv$ et $p, a \to q, b, \triangleright$ est une transition.

La présence de symboles blancs est implicite à la fin d'une configuration. Dans la définition précédente, on s'autorise à ajouter un symbole blanc à la place de v si celui-ci est vide afin de pouvoir effectuer une transition de la forme $p, \# \to q, b, x$.

Il faut noter qu'une transition de la forme $p, a \to q, b, \triangleleft$ (avec déplacement de la tête de lecture vers la gauche) peut uniquement être appliquée si la tête de lecture ne se trouve pas sur le premier symbole de la bande.

Définition 3.10 (Calcul)**.** Un *calcul* est une suite de configurations successives $C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_k$. Un calcul est dit *acceptant* si la configuration C_0 est *initiale*, c'est-à-dire $C_0 = q_0w$ pour $w \in \Sigma^*$ et si la configuration C_k est *finale*, c'est-à-dire $C_k = uqv$ avec $q \in F$.

Les configurations de la forme uqv avec $q \in F$ sont aussi appelées configurations *acceptantes* car un calcul accepte dès qu'il atteint une telle configuration.

Rien n'empêche une machine de Turing de continuer un calcul après une configuration acceptante mais c'est d'un intérêt limité puisque le mot w est accepté dès qu'il existe au moins un calcul acceptant.

Utilisation

Il y a deux modes d'utilisation des machines de Turing. Le premier mode est d'utiliser une machine comme *accepteur* et le second est d'utiliser une machine comme un *calculateur*.

Dans le mode *accepteur*, on fournit un mot d'entrée à la machine et celle-ci répond par *oui* ou par *non*. Quand la machine répond *oui*, on dit que le machine *accepte* le mot. La machine définit alors l'ensemble des mots qui sont acceptés. Par convention, on dit que la machine accepte un mot w s'il existe *au moins* un calcul acceptant avec w comme entrée, c'est-à-dire qui commence avec la configuration q_0w. L'élément important de cette définition est qu'un seul calcul acceptant suffit pour que la machine accepte même si d'autres calculs bloquent ou n'atteignent jamais une configuration acceptante.

Dans le mode *calculateur*, on fournit un mot d'entrée à la machine et celle-ci retourne un ou plusieurs mots de sortie. Quand la machine ne donne toujours qu'un seul mot de sortie, elle calcule une fonction qui associe le mot de sortie au mot d'entrée. Les mots de sortie sont par convention les contenus de la bande des dernières configurations des calculs acceptants. On met donc le mot d'entrée sur la bande, la machine effectue un calcul jusqu'à ce qu'elle atteigne un état final et le contenu de la bande constitue alors un des mots de sortie. Comme il peut y avoir plusieurs calculs acceptants, il peut y avoir plusieurs mots de sortie. Dans le cas d'une machine déterministe, il y a au plus un seul calcul acceptant et donc au plus un seul mot de sortie.

Définition 3.11 (Langage accepté)**.** On dit que w, un mot de Σ^* est *accepté* par une machine de Turing $\mathcal{M}$ s'il existe un calcul acceptant de configuration initiale q_0w. L'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{M}$ est noté $L(\mathcal{M})$.

Il est à noter que comme pour les automates, la notion d'acceptation est dissymétrique. S'il existe à la fois des calculs acceptants et des calculs non acceptants pour une même entrée, c'est l'acceptation qui l'emporte. Cette dissymétrie pose problème pour la complémentation. Comme pour les automates, il faut se ramener à des machines déterministes. Une autre solution est d'utiliser les machines plus générales que sont les machines alternantes.

3.2.4 Graphe des configurations

Beaucoup de problèmes sur les machines de Turing se ramènent à des problèmes sur les graphes en considérant le graphe des configurations. Du coup, les algorithmes sur les graphes jouent un rôle essentiel. Le théorème de Savitch (théorème 4.24) peut par exemple être vu comme un résultat sur l'accessibilité dans les graphes en espace $\log^2 n$.

Le *graphe des configurations* d'une machine de Turing $\mathcal{M}$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble de toutes les configurations de $\mathcal{M}$ et dont les arêtes sont les paires (C, C') de configurations telles que $C \to C'$. Un chemin dans ce graphe est donc un calcul de la machine $\mathcal{M}$.

L'acceptation d'une entrée par la machine se ramène à un problème d'accessibilité dans le graphe des configurations. En effet, l'entrée w est acceptée par $\mathcal{M}$ si et seulement si il y a un chemin de la configuration initiale q_0w à une configuration acceptante.

Le graphe des configurations est infini. Par contre, on s'intéresse souvent à une partie finie de ce graphe. Si la machine $\mathcal{M}$ s'arrête sur toutes les entrées w, l'ensemble des configurations accessibles à partir d'une configuration initiale q_0w est fini. La recherche d'une configuration acceptante peut alors se faire par un parcours du sous-graphe des configurations accessibles à partir de q_0w. Si on dispose d'une borne sur le temps ou l'espace utilisé par la machine sur une entrée de taille n, on a alors une borne sur la taille des configurations qui détermine un sous-graphe fini du graphe des configurations.

La déterminisation d'une machine de Turing (cf. proposition 3.19) se fait par un parcours en largeur de l'arbre des calculs. Cet arbre est en fait un dépliage du graphe des configurations. La machine déterministe équivalente à une machine $\mathcal{M}$ effectue en fait un parcours en largeur du graphe des configurations de $\mathcal{M}$.

3.2.5 Normalisation

Le but de cette partie est de montrer qu'on peut toujours supposer qu'une machine de Turing possède deux états spéciaux q_+ et q_- tels que :
- q_+ est final ($q_+ \in F$) et q_- n'est pas final ($q_- \notin F$),
- la machine se bloque dès qu'elle est dans un des états q_+ ou q_-,
- la machine se bloque uniquement dans un des états q_+ ou q_-.

Plus formellement, on a la proposition suivante.

Proposition 3.12 (Normalisation)**.** *Pour toute machine de Turing $\mathcal{M}$, il existe une machine de Turing $\mathcal{M}'$ telle que :*

1. *$L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$ et $\mathcal{M}$ se bloque si et seulement si $\mathcal{M}'$ se bloque ;*
2. *$\mathcal{M}'$ a deux états q_+ et q_- qui vérifient :*
   - *$F' = \{q_+\}$ (états finaux de $\mathcal{M}'$).*
   - *$\mathcal{M}'$ se bloque toujours en q_+ et en q_-.*
   - *$\mathcal{M}'$ ne se bloque qu'en q_+ et en q_-.*

Pour montrer ce résultat, nous allons montrer qu'à partir d'une machine $\mathcal{M}$, il est toujours possible de construire une machine de Turing $\mathcal{M}'$ qui accepte les mêmes entrées que $\mathcal{M}$ et qui vérifie les propriétés ci-dessus. La machine construite $\mathcal{M}'$ est très proche de la machine $\mathcal{M}$ et hérite beaucoup de ses propriétés. Si la machine $\mathcal{M}$ est déterministe, la machine $\mathcal{M}'$ est encore déterministe. Chaque calcul dans $\mathcal{M}$ est prolongé dans $\mathcal{M}'$ d'au plus une étape de calcul. En particulier, si la machine $\mathcal{M}$ n'a pas de calcul infini, la machine $\mathcal{M}'$ n'a pas de calcul infini.

Analyse

L'idée générale de la construction est de faire en sorte que pour chaque configuration $C = uqv$ de $\mathcal{M}'$ avec q différent de q_+ et q_-, il existe une configuration C' telle que $C \to C'$. Le principe est d'ajouter de nouvelles transitions pour éviter les blocages. Nous commençons par analyser les causes de blocage

afin de les détecter. Une machine de Turing peut se bloquer dans un état q pour deux raisons.

1. La première raison est qu'aucune transition n'est possible. Si la machine est dans l'état p, lit un symbole a sous la tête de lecture mais n'a pas de transition de la forme $p, a \rightarrow q, b, x$ avec $x \in \{\triangleleft, \triangleright\}$, alors elle reste bloquée dans cette configuration de la forme $upav$.
2. La seconde raison est que certaines transitions sont possibles mais que ces transitions conduisent à un déplacement de la tête de lecture vers la gauche alors que cette tête est justement sur la première position de la bande. Si la machine est dans l'état p et lit le symbole a sur la première position de la bande mais n'a pas de transition de la forme $p, a \rightarrow q, b, \triangleright$ qui déplace la tête de lecture vers la droite, alors elle reste bloquée dans cette configuration de la forme pav. En effet, la définition des machines de Turing impose qu'une machine ne peut pas effectuer une transition qui déplacerait la tête de lecture hors de la bande.

Idées générales de la construction

La première idée est de supprimer les transitions sortantes des états finaux pour que la machine se bloque dès qu'elle atteint un de ces états. Ensuite, tous ces états finaux sont fusionnés en un seul état q_+. Il faut ensuite faire en sorte que tous les autres blocages aient lieu dans l'unique état q_-. L'idée générale est d'ajouter un nouvel état q_- à $\mathcal{M}$ et d'ajouter les transitions pour que la machine $\mathcal{M}'$ passe dans cet état dès qu'elle se bloque dans un état non final. Le premier type de blocage est facile à détecter dans la machine $\mathcal{M}$. Il suffit de trouver toutes les paires (p, a) telle qu'il n'existe pas de transition $p, a \rightarrow q, b, x$ avec $x \in \{\triangleleft, \triangleright\}$. Le second type de blocage est plus délicat à détecter puisque la machine $\mathcal{M}'$ doit savoir quand sa tête de lecture se trouve sur la première position de la bande. Pour contourner cette difficulté, on ajoute de nouveaux symboles de bandes à la machine $\mathcal{M}'$. Pour chaque symbole de bande a de $\mathcal{M}$, la machine $\mathcal{M}'$ contient le symbole a et un autre symbole correspondant $\bar{a}$. L'alphabet de bande $\mathcal{M}'$ est donc $\Gamma' = \Gamma \cup \{\bar{a} \mid a \in \Gamma\}$. Ces nouveaux symboles seront uniquement utilisés dans la première position de la bande et serviront à la machine pour détecter cette position. L'alphabet d'entrée de $\mathcal{M}'$ est identique à celui de $\mathcal{M}$. La première opération de la machine $\mathcal{M}'$ est de remplacer le premier symbole a de l'entrée par le symbole $\bar{a}$ correspondant pour marquer la première position de la bande. À cette fin, on ajoute deux nouveaux états q'_0 et q'_1 et quelques transitions. Ensuite toutes les autres transitions de $\mathcal{M}'$ remplacent un caractère a par un caractère b et un caractère $\bar{a}$ par un caractère $\bar{b}$. Ainsi, la première position de la bande contient toujours un symbole de la forme $\bar{a}$ et toutes toutes les autres positions contiennent des symboles de la forme a. C'est exactement la même idée qui a été utilisée pour rendre à fond de pile testable les automates à pile (cf. section 2.6.2).

La construction proprement dite

Soit $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, E, q_0, F, \#)$ une machine de Turing. Nous décrivons la machine de $\mathcal{M}'$ qui accepte les même entrées mais qui se bloque uniquement dans un des deux états q_+ ou q_-. Par rapport à la machine $\mathcal{M}$, la machine $\mathcal{M}'$

possède quatre nouveaux états q'_0, q'_1 q_+ et q_- mais elle a perdu les états finaux qui sont remplacés par q_+.

- États : $Q' = (Q \setminus F) \cup \{q'_0, q'_1, q_+, q_-\}$
- État initial : q'_0
- États finaux : $F' = \{q_+\}$
- Alphabet de bande : $\Gamma' = \Gamma \cup \{\bar{a} \mid a \in \Gamma\}$
- Alphabet d'entrée : $\Sigma' = \Sigma$
- Caractère blanc : $\#$

Il reste à décrire l'ensemble E' des transitions de $\mathcal{M}'$. Cet ensemble est décomposé en $E' = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ suivant l'état p dans lequel se trouve la machine. Les ensembles E_0, E_1, E_2 et E_3 sont définis ci-dessous.

$p = q'_0$
: La première transition est chargée de remplacer le premier caractère a de $\Sigma \cup \{\#\}$ de l'entrée par le caractère $\bar{a}$ correspondant.

$$E_0 = \{q'_0, a \to q'_1, \bar{a}, \triangleright \mid a \in \Gamma\}.$$

$p = q'_1$
: La seconde transition est chargée de remettre la tête de lecture sur la première position de la bande et de passer dans l'ancien état initial q_0 pour commencer le calcul.

$$E_1 = \{q'_1, a \to q_0, a, \triangleleft \mid a \in \Gamma\}.$$

$p = q_+$ **ou** $p = q_-$
: Pour que la machine $\mathcal{M}'$ se bloque en q_+ et en q_- elle ne possède aucune transition de la forme $q_+, a \to q, b, x$ et aucune transition de la forme $q_-, a \to q, b, x$ pour $x \in \{\triangleleft, \triangleright\}$.

$p \in Q \setminus F$
: On commence par ajouter à $\mathcal{M}'$ toutes les transitions de $\mathcal{M}$ pour les lettres des formes a ou $\bar{a}$. On ajoute également des transitions vers q_+ pour chaque transition vers un état final.

$$\begin{aligned} E_2 = &\{p, a \to q, b, x \mid p, a \to q, b, x \in E \text{ et } q \notin F\} \\ \cup\ &\{p, \bar{a} \to q, \bar{b}, \triangleright \mid p, a \to q, b, \triangleright \in E \text{ et } q \notin F\} \\ \cup\ &\{p, a \to q_+, b, x \mid p, a \to q, b, x \in E \text{ et } q \in F\} \\ \cup\ &\{p, \bar{a} \to q_+, \bar{b}, \triangleright \mid p, a \to q, b, \triangleright \in E, \text{ et } q \in F\} \end{aligned}$$

Ensuite, on ajoute des transitions spécifiques pour éviter que $\mathcal{M}'$ ne se bloque dans des états autres que q_+ et q_-. On pose U l'ensemble des paires (p, a) telles que $\mathcal{M}$ ne possède pas de transitions $p, a \to q, b, x$ avec $x \in \{\triangleleft, \triangleright\}$ et V l'ensemble des paires (p, a) telles que $\mathcal{M}$ ne possède pas de transitions $p, a \to q, b, \triangleright$. On définit alors l'ensemble E_3.

$$\begin{aligned} E_3 = &\{p, a \to q_-, a, \triangleright \mid \text{ si } (p, a) \in U\} \\ \cup\ &\{p, \bar{a} \to q_-, \bar{a}, \triangleright \mid \text{ si } (p, a) \in U\} \\ \cup\ &\{p, \bar{a} \to q_-, \bar{a}, \triangleright \mid \text{ si } (p, a) \in V\} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que si la machine $\mathcal{M}$ est déterministe, alors la machine $\mathcal{M}'$ construite est également déterministe.

3.2.6 Variantes

On considère maintenant quelques variantes des machines de Turing. Dans chaque cas, on montre qu'on obtient une notion équivalente dans la mesure où la classe des langages qui peuvent être acceptés par ces machines reste identique. Les variantes simplifient aussi le travail lorsqu'il s'agit de donner explicitement une machine de Turing effectuant une tâche donnée.

Bandes bi-infinies

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6						
$\cdots$	#	#	#	#	B	#	b	#	A	b	a	B	#	B	#	#	#	#	#	$\cdots$

FIG. 3.6 – Bande bi-infinie

On commence par une variante où la bande est infinie à gauche comme à droite. Cette variante permet d'éviter le blocage de la machine sur la première position de la bande mais elle est plus éloignée du fonctionnement réel d'un ordinateur où les mots mémoire sont numérotés à partir de zéro.

Définition 3.13 (Machine à bande bi-infinie)**.** Une *machine à bande bi-infinie* est formellement identique à une machine de Turing, mais la bande est indicée par tous les entiers de $\mathbb{Z}$ (cf. figure 3.6).

Proposition 3.14 (Équivalence)**.** *Toute machine de Turing à bande bi-infinie est équivalente à une machine de Turing (c'est-à-dire qui accepte le même langage). Inversement toute machine de Turing est équivalente à une machine de Turing à bande bi-infinie.*

Preuve. Pour simuler les calculs d'une machine de Turing sur une machine à bande bi-infinie, il suffit de marquer le début de bande en écrivant à la position -1 un nouveau symbole \$ n'appartenant pas à Γ. Comme aucune transition ne permet de lire ce symbole, la machine se bloque dès qu'elle repasse par cette position de la bande.

Pour simuler les calculs d'une machine à bande bi-infinie sur une machine de Turing, l'idée est de replier la bande en 0. La case de numéro $-i$ se retrouve en dessous la case de numéro i. Une case fictive remplie d'un nouveau symbole \$ est mise sous la case de numéro 0 (cf. figure ci-dessous). Ceci permet en outre à la machine de reconnaître la première position de la bande.

0	1	2	3	4	5	6	7	
A	b	a	B	#	B	#	#	$\cdots$
\$	#	b	#	B	#	#	#	$\cdots$
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	

Le nouvel alphabet de bande est $\Gamma \times (\Gamma \cup \{\$\})$ puisqu'on considère à chaque position i de la nouvelle bande le couple des caractères aux positions $(i, -i)$ dans l'ancienne bande. De plus la case de numéro 0 contient un symbole de $\Gamma \times \{\$\}$.

On écrit l'entrée sur la partie supérieure de la bande : l'alphabet d'entrée devient donc $\Sigma \times \{\#\}$, le nouveau caractère blanc $(\#, \#)$ et il est donc toujours

exclu de l'alphabet d'entrée. La première opération de la machine consiste à mettre le symbole \$ dans la partie inférieure de la première case de la bande en remplaçant le symbole $(a, \#)$ par $(a, \$)$.

La machine doit mémoriser si elle lit la partie supérieure ou la partie inférieure de la bande. Les nouveaux états sont donc les paires de $Q \times \{\uparrow, \downarrow\}$ où $\uparrow$ et $\downarrow$ signifient respectivement que la machine lit la partie haute ou la partie basse de la bande

On transcrit alors les transitions de la machine d'origine, en prenant garde au fait que la nouvelle machine se déplace désormais en sens contraire lorsqu'elle lit la partie inférieure de la bande. □

Machines à plusieurs bandes

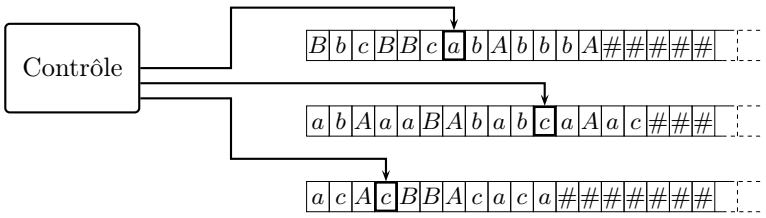


FIG. 3.7 – Machine de Turing à trois bandes

Il est possible de considérer des machines de Turing à plusieurs bandes. La machine possède alors une tête de lecture sur chacune de ses bandes. La transition effectuée par la machine dépend de l'état de contrôle et des symboles de bandes lus par toutes les têtes de lecture. La transition spécifie les symboles qui doivent être écrits par les têtes de lecture ainsi que les déplacements de chacune de ses têtes de lecture.

Définition 3.15 (Machine à plusieurs bandes)**.** Une *machine à k bandes* est une machine disposant de k bandes, chacune lue par une tête de lecture indépendante (cf. figure 3.7). Une transition est alors un élément de l'ensemble $Q \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^k \times \{\triangleleft, \triangleright, \triangledown\}^k$, où $\triangledown$ permet éventuellement de laisser immobiles certaines têtes de lecture.

La proposition ci-dessous établit que plusieurs bandes n'ajoutent pas de puissance de calcul. Leur intérêt réside dans une plus grande souplesse (toute relative) dans la programmation. La machine universelle qui est donnée à la proposition 3.29 est décrite avec deux bandes. Il aurait été possible de la décrire avec une seule bande mais cela aurait juste été un peu plus technique.

On a imposé pour simplifier que les alphabets des différentes bandes sont identiques. Il est possible de considérer des machines avec des alphabets distincts. Cela complique les notations sans avoir un grand intérêt.

Lorsqu'une machine à une seule bande, il n'est pas vraiment nécessaire d'avoir la possibilité de laisser la tête de lecture à sa position. En effet, le symbole lu à la transition suivante est celui qui vient d'être écrit. Par contre, lorsque la machine a plusieurs bandes, il est plus commode de pouvoir laisser une tête en place tout en déplaçant les autres.

La notion de configuration (cf. section 3.2.3) d'une machine de Turing peut être étendue aux machines à plusieurs bandes. La configuration d'une machine à k bandes comprend l'état de contrôle, les contenus des k bandes et les positions des k têtes de lecture. Tout ceci peut être décrit comme un seul mot sur un alphabet comprenant l'ensemble des états, l'alphabet de bande et quelques séparateurs.

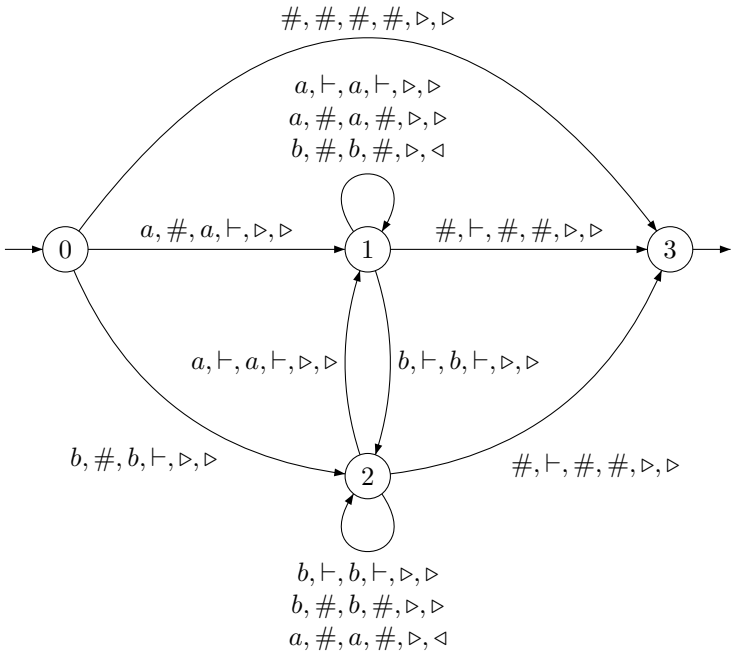


FIG. 3.8 – Exemple de machine à deux bandes

Exemple 3.16. La machine représenté à la figure 3.8 a deux bandes. Elle accepte le langage $\{w \in A^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ déjà considéré à l'exemple 3.8. Son ensemble d'états est $Q = \{0, 1, 2, 3\}$. L'état 0 est initial et l'état 3 est final. L'alphabet de bande est $\{a, b, \vdash, \#\}$. Le symbole $\vdash$ est uniquement utilisé pour marquer la première position de la seconde bande.

Cette machine fonctionne de la façon suivante. Elle parcourt le mot en entrée sur la première bande. Au début de la lecture, elle est dans l'état 0 puis pendant tout le reste, elle est dans l'état 1 ou 2 suivant que le nombre de a lus est plus grand ou plus petit que le nombre de b lus. La position de la tête de lecture de la deuxième bande mémorise la différence entre le nombre de a et le nombre de b. La machine passe finalement dans l'état acceptant 3 si à la fin de la lecture, le nombre de a est égal au nombre de b.

La proposition suivante établit que ce qui peut être calculé par une machine à plusieurs bandes peut aussi être calculé avec une seule bande. L'ajout de plusieurs bandes n'augmente pas la puissance de calcul.

Proposition 3.17 (Équivalence)**.** *Touche machine de Turing $\mathcal{M}$ à plusieurs bandes est équivalente à une machine de Turing $\mathcal{M}'$ à une seule bande qui accepte les mêmes entrées. De plus, si $\mathcal{M}$ est déterministe (resp. s'arrête sur*

chaque entrée), $\mathcal{M}'$ est aussi déterministe (resp. s'arrête aussi sur chaque entrée).

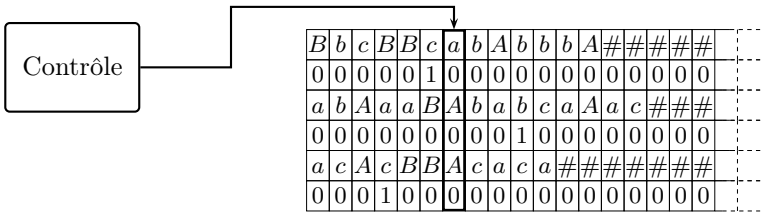


FIG. 3.9 – Conversion de trois bandes en une seule

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing à k bandes pour un entier k. On construit une machine de Turing $\mathcal{M}'$ à une seule bande qui accepte les mêmes entrées.

Une première solution est de construire une machine $\mathcal{M}'$ qui stocke les contenus des k bandes sur une seule bande en les séparant par un nouveau symbole \$. Outre le contenu des bandes, $\mathcal{M}'$ doit aussi garder trace des positions des k têtes de lecture. Elle possède donc un symbole de bande $\downarrow$ qui est placé juste avant les symboles qui étaient sous les têtes de lecture de $\mathcal{M}$. La simulation d'une seule transition de $\mathcal{M}$ se fait en parcourant toute la bande pour noter dans l'état de contrôle les symboles sous les k têtes de lectures. En fin de bande, la machine $\mathcal{M}'$ choisit la transition de $\mathcal{M}$ à effectuer en fonction de l'état et des k symboles. La machine effectue un nouveau parcours de la bande pour changer les caractères sous les k têtes de lecture puis déplacer les k têtes de lecture.

Une seconde solution consiste à *coller* les k bandes pour en faire une seule sur l'alphabet Γ^k. Comme il faut aussi garder trace des positions des k têtes de lecture, on agrandit encore l'alphabet pour une avoir une seule bande sur l'alphabet $(\Gamma \times \{0,1\})^k$ (cf figure 3.9). De nouveau, la simulation d'une seule transition de $\mathcal{M}$ se fait par deux parcours successifs de toute la bande de $\mathcal{M}$. □

Déterminisme

La notion d'automate déterministe s'étend de manière très naturelle aux machines de Turing. Une machine est déterministe si à chaque étape de calcul, une seule transition peut être effectuée pour passer à une autre configuration. Dit autrement, chaque sommet du graphe des configurations a au plus une seule arête sortante.

La comparaison entre les machines déterministes et les celles non déterministes est la source des questions les plus fondamentales de la théorie de la complexité. Il a été vu que tout automate fini non déterministe est équivalent à un automate déterministe (cf. proposition 1.69 p. 38). Par contre tout automate à pile n'est pas équivalent à un automate à pile déterministe. Il s'avère que les machines de Turing déterministes sont aussi puissantes que les celles non déterministes. Par contre, une grande différence apparaît lorsque les temps de calcul sont considérés. Le passage à une machine déterministe peut considérablement accroître le temps de calcul.

Définition 3.18 (Machine de Turing déterministe)**.** Une machine $\mathcal{M}$ est *déterministe* si pour chaque paire $(p, a) \in Q \times \Gamma$, il existe au plus un triplet $(q, b, x) \in Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright\}$ tel que $p, a \to q, b, x \in E$.

La définition ci-dessus à été donnée pour une machine à une seule bande. Elle s'étend facilement au cas des machines à plusieurs bandes. Les machines des figures 3.3 et 3.4 sont déterministes.

La proposition suivante établit que tout ce qui peut être calculé par une machine non déterministe peut aussi être calculé par une machine déterministe.

Proposition 3.19. *Toute machine de Turing $\mathcal{M}$ est équivalente à une machine $\mathcal{M}'$ déterministe. Si de plus $\mathcal{M}$ est sans calcul infini, la machine $\mathcal{M}'$ est aussi sans calcul infini.*

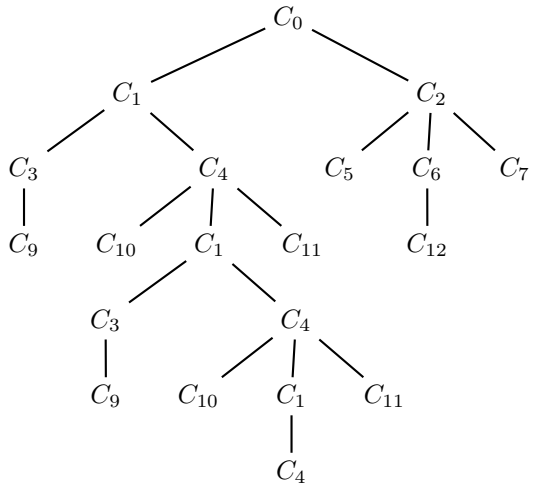


FIG. 3.10 – Un arbre de calcul

Preuve.

Idée de la preuve. On montre qu'il est possible de simuler toute machine non-déterministe $\mathcal{M}$ avec une machine déterministe $\mathcal{M}'$. L'idée de la simulation est de faire essayer à $\mathcal{M}'$ toutes les branches possibles du calcul de $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}'$ rencontre un état acceptant au cours de cette exploration, elle accepte l'entrée. Sinon, la simulation de $\mathcal{M}'$ ne se termine pas.

Soit $w \in \Sigma^*$ une entrée de la machine $\mathcal{M}$. On considère l'ensemble des calculs de $\mathcal{M}$ sur w comme un arbre. Les nœuds sont les calculs finis et valides de $\mathcal{M}$. La racine de l'arbre est le calcul vide consistant en la configuration initiale $C_0 = q_0 w$. Les fils d'un calcul γ sont tous les calculs obtenus en prolongeant γ par une étape de calcul. Si γ est le calcul $C_0 \to \cdots \to C_n$, ses fils sont alors tous les calculs de la forme $C_0 \to \cdots \to C_n \to C_{n+1}$. Le nœud γ a donc autant de fils qu'il existe de configurations C telles que $C_n \to C$. Sur la figure 3.10, chaque nœud γ est étiqueté par sa dernière configuration C_n. Le calcul peut être reconstitué en suivant la suite des configurations le long de la branche. Dans cette représentation, une configuration peut apparaître plusieurs

fois puisque plusieurs calculs peuvent conduire à une même configuration. Pour une configuration C donnée, le nombre de configurations C' telles que $C \to C'$ est borné par le nombre de transitions de la machine. L'arbre des calculs est donc de degré borné. L'idée générale est de faire parcourir cet arbre par la machine $\mathcal{M}'$. Comme certaines branches peuvent être infinies même si la machine $\mathcal{M}$ accepte w, il est impossible d'effectuer un parcours en profondeur. La machine $\mathcal{M}'$ pourrait descendre indéfiniment le long d'une même branche infinie et manquer une configuration acceptante sur une autre branche. La machine $\mathcal{M}'$ va donc effectuer un parcours en largeur de l'arbre des calculs.

Soit un mot $x = \tau_1 \cdots \tau_n$ sur l'alphabet E des transitions de $\mathcal{M}$. Le mot x détermine l'unique calcul obtenu en effectuant à partir de la configuration $q_0 w$ les transitions $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Bien sûr, tout mot x ne correspond pas nécessairement à un calcul valide et à un nœud de l'arbre. La machine $\mathcal{M}'$ va parcourir les nœuds de l'arbre dans l'ordre des mots correspondants où les mots sont d'abord ordonnés par longueur puis par ordre lexicographique pour les mots d'une même longueur. Pour chaque mot sur E, la machine $\mathcal{M}'$ vérifie en simulant $\mathcal{M}$ si ce mot correspond à un calcul valide. Si la configuration atteinte est acceptante la machine $\mathcal{M}'$ accepte. Sinon, elle passe au mot suivant et continue.

Dans l'implémentation, les transitions de $\mathcal{M}$ sont numérotées par les entiers de 0 à $k-1$ où k est le nombre de ces transitions. On identifie alors un mot sur l'alphabet $\{0, \ldots, k-1\}$ avec un mot sur E.

Mise en application. La machine déterministe $\mathcal{M}'$ est construite en utilisant trois bandes. D'après la proposition 3.19, cette machine est à nouveau équivalente à une machine déterministe avec une seule bande. La machine $\mathcal{M}'$ utilise ses trois bandes de la manière suivante. La première bande contient toujours l'entrée w de la machine et n'est jamais modifiée. La seconde bande contient une copie de la bande de $\mathcal{M}$ au cours de son calcul le long d'une branche. La troisième bande contient un mot sur l'alphabet $\{0, \ldots, k-1\}$ qui détermine éventuellement un calcul de $\mathcal{M}$.

1. Initialement, la première bande contient l'entrée w, et les bandes 2 et 3 sont vides.
2. Copier la première bande sur la seconde.
3. Utiliser la seconde bande pour simuler $\mathcal{M}$ avec l'entrée w le long du calcul déterminé par la troisième bande. Pour chaque étape de la simulation de $\mathcal{M}$, le symbole de la troisième bande de $\mathcal{M}'$ donne la transition de $\mathcal{M}$ qui doit être appliquée. Si cette transition ne peut pas être appliquée ou s'il ne reste plus de symboles sur la troisième bande, la simulation de ce calcul est abandonnée et la machine $\mathcal{M}'$ passe à l'étape 4. Si une configuration acceptante de $\mathcal{M}$ est rencontrée, la machine $\mathcal{M}'$ s'arrête et accepte l'entrée w.
4. Remplacer la chaîne de la troisième bande avec la chaîne qui suit dans l'ordre hiérarchique. La machine $\mathcal{M}'$ retourne à l'étape 2 pour simuler ce nouveau calcul.

Dans le cas où la machine $\mathcal{M}$ est sans calcul infini, l'arbre des calculs est fini d'après le lemme de König (cf. lemme 3.20) et donc de hauteur finie. Ceci signifie qu'il existe une borne sur la longueur des calculs partant de la configuration $q_0 w$. Pour que la machine $\mathcal{M}'$ soit sans calcul infini si $\mathcal{M}$ est sans calcul infini, la

machine $\mathcal{M}'$ procède de la manière suivante. Pour chaque longueur l de mots sur la troisième bande, la machine $\mathcal{M}'$ vérifie si elle a trouvé au moins un calcul de longueur l. Si elle n'en a trouvé aucun, elle s'arrête en rejetant l'entrée w. Ceci garantit que la machine $\mathcal{M}'$ s'arrête sur toute entrée. □

On prouve ici le lemme de König qui a été utilisé dans la preuve de la proposition précédente. Ce lemme est en fait un argument de compacité sous une forme un peu déguisée.

Lemme 3.20 (König 1936)**.** *Tout arbre infini dont tout nœud est de degré fini contient une branche infinie.*

Preuve. On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de nœuds qui forment une branche infinie de l'arbre. On prend pour x_0 la racine de l'arbre. On suppose avoir choisi un nœud x_n tel que le sous-arbre enraciné en x_n est infini. Puisque x_n a un nombre fini de fils, au moins un des sous-arbres enracinés en l'un de ses fils est infini. On choisit alors comme nœud x_{n+1} un tel fils de x_n. □

3.3 Langages récursivement énumérables

On étudie maintenant les langages et par extension les problèmes qui peuvent être acceptés par une machines de Turing. Il faut remarquer qu'une machine de Turing n'est pas vraiment un algorithme. Lors d'un calcul d'une machine sur une entrée w, trois choses différentes peuvent survenir. Le calcul peut s'arrêter dans un état acceptant et l'entrée w est acceptée. Le calcul peut aussi se bloquer dans un état non acceptant. Le calcul peut encore continuer à l'infini. Cette troisième alternative est indésirable pour un algorithme qui doit toujours s'arrêter après un nombre fini d'étapes de calcul. Cette alternative correspond en fait à l'incertitude provenant d'un programme qui ne s'arrête pas. Doit-on le laisser continuer parce qu'il va (bientôt) donner le résultat ou doit-on l'interrompre parce qu'il ne donnera aucun résultat.

Définition 3.21 (Langages récursivement énumérables)**.** Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est *récursivement énumérable* s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ telle que $L = L(\mathcal{M})$. Par extension, un problème P est *récursivement énumérable* si L_P est récursivement énumérable.

La terminologie est justifiée par la proposition 3.23 ci-dessous. Les langages récursivement énumérables sont aussi appelés *semi-récursifs* ou *semi-décidables*. Le terme *récursif* provient des fonctions récursives (cf. section 3.9). Le terme *semi* est justifié par la proposition 3.28.

Définition 3.22 (Énumérateur)**.** Un énumérateur est une machine de Turing déterministe qui écrit sur une bande de sortie des mots de Σ^* séparés par un symbole \$ n'appartenant pas à Σ. La tête de lecture de cette bande de sortie ne se déplace jamais vers la gauche.

Un énumérateur est une machine qui ne prend pas d'entrée. Au départ la bande est remplie de symboles blancs et la configuration initiale est donc la configuration q_0. La bande de sortie d'un énumérateur se comporte comme une imprimante sur laquelle il est possible d'écrire sans pouvoir ni modifier ni effacer. Il faut noter que la définition comporte une certaine dissymétrie. Dès qu'un mot

est écrit sur la bande de sortie, on est certain qu'il fait partie des mots énumérés. Alors que tant qu'un mot n'a pas été écrit, l'incertitude demeure : il sera peut-être énuméré plus tard ou il ne le sera peut-être jamais.

Un mot est dit *énuméré* s'il est écrit sur la bande sortie entre deux séparateurs \$. Il n'y a aucune contrainte sur la façon dont les mots sont énumérés. Ils peuvent apparaître dans n'importe quel ordre et chaque mot peut apparaître une ou plusieurs fois. La proposition suivante justifie la terminologie *récursivement énumérable* employée pour un langage accepté par une machine de Turing.

Proposition 3.23. *Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est récursivement énumérable si et seulement si L est l'ensemble des mots énumérés par un énumérateur.*

Preuve. On va montrer qu'à partir d'une machine de Turing qui accepte L, on peut construire un énumérateur qui énumère exactement les mots de L et qu'inversement on peut construire une machine de Turing qui accepte L à partir d'un énumérateur.

On suppose d'abord disposer d'une machine $\mathcal{M}$ qui accepte L. Grâce à la proposition 3.19, on peut supposer que $\mathcal{M}$ est déterministe. L'énumérateur ne peut pas utiliser directement la machine $\mathcal{M}$ sur chaque mot car celle-ci peut avoir des calculs infinis. L'idée consiste à simuler la machine sur un nombre maximal de transitions puis d'augmenter progressivement ce nombre maximal de transitions. On obtient alors l'algorithme ci-dessous.

1: **for all** $k \geq 0$ **do**
2: **for all** w tel que $|w| \leq k$ **do**
3: **if** $\mathcal{M}$ accepte w en au plus k étapes **then**
4: écrire w suivi de \$ sur la bande de sortie

Algorithme 2: Énumérateur de L

On suppose maintenant disposer d'un énumérateur pour L. La machine de Turing simule l'énumérateur et compare successivement chaque mot écrit. par celui-ci avec son entrée. Elle accepte en cas d'égalité. Si le mot n'est jamais énuméré, le calcul de la machine se poursuit indéfiniment sans que la machine n'accepte. On obtient alors l'algorithme ci-dessous.

Input w
1: **loop**
2: **repeat**
3: Exécuter l'énumérateur
4: **until** l'énumérateur écrit \$
5: **if** w est égal au mot écrit **then**
6: accepter

Algorithme 3: Machine de Turing acceptant L

□

Un argument de cardinalité montre qu'il existe des langages non récursivement énumérables. Pour tout alphabet Σ, l'ensemble de tous les langages sur Σ n'est pas dénombrable. Au contraire, l'ensemble des machines de Turing et donc des langages récursivement énumérables est dénombrable. Cet argument

est semblable à celui qui montre qu'il existe des nombres transcendants parce que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. L'exemple suivant exhibe un langage qui n'est pas récursivement énumérable. La construction de ce langage est basée sur un argument diagonal très classique. L'argument diagonal est un peu le couteau suisse de la calculabilité et de la complexité. La plupart des résultats non triviaux utilisent cet argument sous une forme ou une autre.

Exemple 3.24 (Langage diagonal). Soit un alphabet Σ fixé égal par exemple à $\{a, b\}$. Puisque l'ensemble des machines de Turing est dénombrable, on indexe par les entiers les machines de Turing d'alphabet d'entrée Σ. On obtient une suite $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ de toutes les machines de Turing sur Σ. On indexe aussi les mots de Σ^* pour obtenir une suite $w_0, w_1, w_2, \ldots$ de tous les mots sur Σ. On définit alors le langage L par

$$L = \{w_i \mid w_i \notin L(\mathcal{M}_i)\}.$$

On montre par l'absurde que L n'est pas récursivement énumérable. On suppose qu'il existe une Machine de Turing $\mathcal{M}$ telle que $L = L(\mathcal{M})$. On note k l'indice de cette machine, c'est-à-dire l'entier k tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k$. Si $w_k \in L(\mathcal{M}_k)$, alors $w_k \notin L(\mathcal{M})$ et si $w_k \notin L(\mathcal{M}_k)$, alors $w_k \in L(\mathcal{M})$, ce qui conduit dans les deux cas à une contradiction.

La proposition suivante établit que la classe des langages récursivement énumérables est close pour l'union et l'intersection.

Proposition 3.25. *Si les langages L et L' sont récursivement énumérables, alors les deux langages $L \cup L'$ et $L \cap L'$ sont aussi récursivement énumérables.*

Preuve. Soient L et L' deux langages acceptés par des machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ qu'on peut supposer à une seul bande grâce à la proposition 3.17. On construit des machines $\mathcal{M}_\cup$ et $\mathcal{M}_\cap$ qui accepte respectivement les langages $L \cup L'$ et $L \cap L'$.

On construit une machine $\mathcal{M}_\cup$ avec deux bandes. La machine commence dans un premier temps par recopier son entrée de la première bande sur la seconde bande. Dans un second temps, la machine alterne, transition par transition la simulation de $\mathcal{M}$ sur la première bande et la simulation de $\mathcal{M}'$ sur la seconde bande. La machine $\mathcal{M}_\cup$ accepte dès qu'une des deux machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ accepte.

Pour la machine $\mathcal{M}_\cap$, on peut procéder de la même façon en alternant les simulations des deux machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ et en acceptant lorsque les deux ont accepté. Une autre solution est de simuler d'abord $\mathcal{M}$ sur l'entrée après avoir sauvegardé cette entrée sur une autre bande, puis de simuler $\mathcal{M}'$ lorsque $\mathcal{M}$ a accepté. Si l'une des deux machines ne s'arrête pas, le calcul de $\mathcal{M}_\cap$ est également infini. Si les deux machines acceptent, la machine $\mathcal{M}_\cap$ accepte. □

3.4 Langages décidables

Les problèmes et les langages décidables sont ceux pour lesquels il existe un algorithme qui donne la réponse à chaque instance. Par algorithme, on entend une méthode qui donne la réponse correcte en un temps fini.

Définition 3.26 (Langage décidable)**.** Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est *décidable* s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ sans calcul infini (*i.e.* la machine $\mathcal{M}$ s'arrête

sur toute entrée) telle que $L = L(\mathcal{M})$. On dit que la machine $\mathcal{M}$ *décide* le langage L.

Les langages décidables sont parfois appelés *récursifs*. Par définition même, les langages décidables sont récursivement énumérables. On verra à la proposition 3.30 qu'il existe des langages récursivement énumérables qui ne sont pas décidables. On commence par quelques propriétés de clôture des langages décidables.

Proposition 3.27 (Opérations booléennes)**.** *Si les deux langages $L, L' \subseteq \Sigma^*$ sont décidables, alors les langages $L \cup L'$, $L \cap L'$ et $\Sigma^* \setminus L$ sont aussi décidables.*

Preuve. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux machines de Turing sans calcul infini qui acceptent les langages L et L'. Les machines $\mathcal{M}_\cup$ et $\mathcal{M}_\cap$ construites dans la preuve de la proposition 3.25 sont sans calcul infini et elles acceptent les langages $L \cup L'$ et $L \cap L'$.

D'après les propositions 3.19 et 3.12, on peut supposer que la machine $\mathcal{M}$ est déterministe et normalisée. En échangeant les rôles des états q_+ et q_-, on obtient une machine qui accepte le complémentaire $\Sigma^* \setminus L$ de L. □

La proposition suivante justifie la terminologie *semi-décidables* ou *semi-récursifs* qui est parfois employée pour les langages récursivement énumérables.

Proposition 3.28 (Complémentation et décidabilité)**.** *Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage. Si L et son complémentaire $\Sigma^* \setminus L$ sont récursivement énumérables, alors L et $\Sigma^* \setminus L$ sont décidables.*

Preuve. On suppose que les machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ acceptent les langages L et $\Sigma^* \setminus L$. Par contre, ces deux machines peuvent avoir des calculs infinis. On construit une machine $\mathcal{N}$ semblable à la machine $\mathcal{M}_\cup$ utilisée dans la preuve de la proposition 3.25 mais avec une condition d'arrêt différente. La machine $\mathcal{N}$ simule en parallèle les deux machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ et s'arrête dès que l'une des deux machines $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}'$ accepte. Si la machine $\mathcal{M}$ accepte, la machine $\mathcal{N}$ accepte et si la machine $\mathcal{M}'$ accepte, la machine $\mathcal{N}$ rejette. Comme les machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ acceptent les langages L et $\Sigma^* \setminus L$, toute entrée w doit être acceptée par une des deux machines. Ceci assure que la machine $\mathcal{N}$ s'arrête sur toute entrée. □

Pour une machine $\mathcal{M}$ et un mot w, on note respectivement $\langle \mathcal{M} \rangle$, $\langle w \rangle$ et $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ les codages de $\mathcal{M}$, w et de la paire $(\mathcal{M}, w)$. Le codage de $(\mathcal{M}, w)$ peut être par exemple $\langle \mathcal{M} \rangle \$ \langle w \rangle$ où le symbole \$ n'apparaît ni dans le codage de $\mathcal{M}$ ni dans le codage de w. On définit maintenant le *langage d'acceptation* noté $L_\in$ par

$$L_\in = \{\langle \mathcal{M}, w \rangle \mid w \in L(\mathcal{M})\}.$$

Proposition 3.29 (Machine universelle)**.** *Le langage $L_\in$ est récursivement énumérable. Une machine de Turing $\mathcal{M}_U$ telle que $L(\mathcal{M}_U) = L_\in$ est appelée* machine universelle.

Une machine universelle est en quelque sorte une machine capable de simuler n'importe qu'elle autre machine qui lui est passée en paramètre. Les interpréteurs de langages comme la machine virtuelle de Java (*Java Virtual Machine*) sont des machines universelles.

Preuve. On construit une machine universelle $\mathcal{M}_U$ avec deux bandes. La première bande reçoit l'entrée qui est le codage $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ d'une machine de Turing $\mathcal{M}$ et d'une entrée w. La machine $\mathcal{M}_U$ va simuler le calcul de $\mathcal{M}$ sur l'entrée w. La seconde bande de $\mathcal{M}_U$ est utilisée pour contenir la configuration de la machine $\mathcal{M}$ au cours du calcul. Cette bande est initialisée avec la configuration $q_0 w$ obtenue en recopiant l'état initial de $\mathcal{M}$ et la donnée w. Ensuite, pour chaque étape de calcul, la machine $\mathcal{M}_U$ recherche dans $\langle \mathcal{M} \rangle$ une transition applicable sur la configuration puis l'applique pour obtenir la configuration suivante. □

Proposition 3.30. *Le langage $L_\in$ n'est pas décidable.*

D'après la proposition 3.28, si un langage L et son complémentaire sont récursivement énumérables, alors L est décidable. La proposition précédente a immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.31. *Le complémentaire de $L_\in$ n'est pas récursivement énumérable.*

La preuve de la proposition précédente se fait par un argument diagonal même si celui-ci n'est pas complètement explicite. La machine $\mathcal{Q}$ est en effet lancée sur son propre codage pour aboutir à une contradiction.

Preuve. On montre le résultat par un raisonnement par l'absurde. On suppose que le langage $L_\in$ est décidable. Soit $\mathcal{A}$ une machine de Turing qui décide le langage $L_\in$. Ceci signifie que $L(\mathcal{A}) = L_\in$ et que la machine $\mathcal{A}$ s'arrête sur toute entrée. On construit alors la machine $\mathcal{Q}$ de la manière suivante.

Input $\langle \mathcal{M} \rangle$
1: **if** $\mathcal{A}$ accepte $\langle \mathcal{M}, \langle \mathcal{M} \rangle \rangle$ **then**
2: rejeter
3: **else**
4: accepter

Algorithme 4: Machine $\mathcal{Q}$

On montre maintenant que l'on a une contradiction en lançant la machine $\mathcal{Q}$ sur l'entrée $\langle \mathcal{Q} \rangle$.

- Si $\mathcal{Q}$ accepte $\langle \mathcal{Q} \rangle$, alors $\mathcal{A}$ accepte l'entrée $\langle \mathcal{Q}, \langle \mathcal{Q} \rangle \rangle$ par définition de $\mathcal{A}$. Mais si $\mathcal{A}$ accepte $\langle \mathcal{Q}, \langle \mathcal{Q} \rangle \rangle$, $\mathcal{Q}$ rejette $\langle \mathcal{Q} \rangle$ par définition de $\mathcal{Q}$.
- Si $\mathcal{Q}$ rejette $\langle \mathcal{Q} \rangle$, alors $\mathcal{A}$ rejette l'entrée $\langle \mathcal{Q}, \langle \mathcal{Q} \rangle \rangle$ par définition de $\mathcal{A}$. Mais si $\mathcal{A}$ rejette $\langle \mathcal{Q}, \langle \mathcal{Q} \rangle \rangle$, $\mathcal{Q}$ accepte $\langle \mathcal{Q} \rangle$ par définition de $\mathcal{Q}$.

Dans les deux cas, on a abouti à une contradiction. Ceci montre que le langage $L_\in$ n'est pas décidable □

Il n'est pas toujours aussi facile d'établir directement qu'un langage ou un problème est indécidable. On utilise alors une réduction pour se ramener à un autre problème indécidable. On commence par la définition d'une fonction calculable.

Définition 3.32. Une fonction $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ est *calculable* s'il existe une machine de Turing qui pour toute entrée w s'arrête avec $f(w)$ sur la bande.

Comme toute machine de Turing est équivalente à une machine de Turing déterministe, toute fonction calculable l'est aussi par une machine de Turing déterministe. La classe des fonctions calculables est close par de nombreuses opérations. En particulier, la composée de deux fonctions calculables est encore une fonction calculable.

Définition 3.33 (Réduction)**.** Soient A et B deux problèmes, d'alphabets respectifs Σ_A et Σ_B et de langages respectifs L_A et L_B. Une réduction de A à B est une fonction $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$ calculable telle que $w \in L_A \iff f(w) \in L_B$. On note $A \leq_m B$ lorsque A se réduit à B.

La notation $A \leq_m B$ suggère que le problème A est moins compliqué que le problème B. L'indice m provient de l'expression anglaise *many to one* qui s'oppose à *one to one* et qui indique que la fonction f n'est pas nécessairement injective. Plusieurs instances de A peuvent être envoyées par la réduction sur la même instance de B. Puisque la composée de deux fonctions calculables est calculable, la relation $\leq_m$ est bien sûr transitive.

Proposition 3.34 (Réduction)**.** *Si $A \leq_m B$ et si B est décidable, alors A est décidable.*

Preuve. $A \leq_m B$ donc il existe une machine $\mathcal{M}$ qui s'arrête toujours et qui, pour toute entrée $w \in \Sigma_A^*$, calcule $w' \in \Sigma_B^*$, tel que $w \in L_A \Leftrightarrow w' \in L_B$.

B étant décidable, il existe une machine $\mathcal{M}'$ qui s'arrête toujours telle que $L(\mathcal{M}') = L_B$.

On définit une machine $\mathcal{M}''$ qui prend en entrée un mot $w \in \Sigma_A^*$, qui exécute $\mathcal{M}$ sur cette entrée, puis qui exécute $\mathcal{M}'$ sur la sortie de $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}''$ accepte si $\mathcal{M}'$ accepte et rejette si $\mathcal{M}'$ rejette.

Alors $\mathcal{M}''$ s'arrête toujours et par construction, $(L(\mathcal{M}'')) = L(\mathcal{M}') = L_B$ donc $L(\mathcal{M}'') = L_A$ par définition de $\mathcal{M}$. □

Par contraposition de la proposition précédente, on obtient le corollaire suivant qui s'utilise très souvent pour montrer qu'un problème B est indécidable.

Corollaire 3.35 (Réduction)**.** *Si $A \leq_m B$ et si A est indécidable, alors B est indécidable.*

Afin d'illustrer le corollaire précédent on va prouver la proposition suivante qui donne deux autres problèmes indécidables.

Proposition 3.36. *Les deux langages $L_\varnothing = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid L(\mathcal{M}) \neq \varnothing\}$ et $L_{\neq} = \{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle \mid L(\mathcal{M}) \neq L(\mathcal{M}')\}$ sont indécidables.*

Preuve. Pour utiliser le corollaire précédent et montrer que le langage $L_\varnothing$ est indécidable, on construit une réduction de $L_\in$ à $L_\varnothing$. Pour toute paire $(\mathcal{M}, w)$ on considère la machine $\mathcal{M}_w$ définie de la manière suivante. La fonction f qui associe $\langle \mathcal{M}_w \rangle$ à $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ est bien sûr calculable par une machine de Turing déterministe. De plus on aussi l'équivalence $w \in L(\mathcal{M}) \iff L(\mathcal{M}_w) \neq \varnothing$ car le mot w est le seul mot qui puisse être accepté par $\mathcal{M}_w$. La fonction f ainsi définie est donc une réduction de $L_\in$ à $L_\varnothing$. Le corollaire précédent assure que le langage $L_\varnothing$ est indécidable.

Pour utiliser à nouveau le corollaire précédent et montrer que le langage $L_{\neq}$ est indécidable, on construit une réduction de $L_\varnothing$ à $L_{\neq}$. On choisit une machine

Input u
1: **if** $u = w$ **then**
2: simuler $\mathcal{M}$ sur w
3: **else**
4: rejeter

Algorithme 5: Machine $\mathcal{M}_w$

fixe $\mathcal{M}_\varnothing$ qui accepte le langage vide. Il suffit par exemple de prendre pour $\mathcal{M}_\varnothing$ une machine sans aucun état final. La fonction g qui associe $\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}_\varnothing \rangle$ à $\langle \mathcal{M} \rangle$ est bien sûr calculable par une machine de Turing déterministe. De plus on a l'équivalence $L(\mathcal{M}) \neq \varnothing \iff L(\mathcal{M}) \neq L(\mathcal{M}_\varnothing)$. La fonction g ainsi définie est donc une réduction de $L_\neq$ à $L_\varnothing$. Le corollaire précédent assure que le langage $L_\neq$ est indécidable. □

Les deux résultats de la proposition précédente sont en fait deux cas particuliers d'un théorème plus général. On dit qu'une propriété P sur les langages récursivement énumérables est *non triviale* s'il existe au moins un langage récursivement énumérable L qui vérifie P et au moins un langage récursivement énumérable L' qui ne vérifie pas P.

Théorème 3.37 (Rice)**.** *Pour toute propriété non triviale P sur les langages récursivement énumérables, le problème de savoir si le langage $L(\mathcal{M})$ d'une machine de Turing $\mathcal{M}$ vérifie P est indécidable.*

Si tous les langages récursivement énumérables vérifient ou ne vérifient pas la propriété P, il est facile de faire une machine de Turing qui accepte les codages $\langle \mathcal{M} \rangle$ des machines $\mathcal{M}$ telles que $L(\mathcal{M})$ vérifie P. Il suffit d'accepter ou de rejeter tous les codages.

Preuve. Soit le langage $L_P = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid L(\mathcal{M}) \text{ vérifie } P\}$ des codages des machines de Turing dont le langage vérifie la propriété P. Pour montrer que ce langage est indécidable, on donne une réduction du langage $L_\in$ au langage L_P et on conclut encore grâce au corollaire précédent.

Quitte à remplacer la propriété P par sa négation, on peut toujours supposer que le langage vide ne vérifie pas la propriété P. Puisque P n'est pas triviale, il existe une machine de Turing $\mathcal{M}_0$ telle $L(\mathcal{M}_0)$ vérifie P.

Pour toute paire $(\mathcal{M}, w)$ on considère la machine $\mathcal{M}_w$ définie de la manière suivante. Dans la définition précédente, si la machine $\mathcal{M}$ ne termine pas sur

Input u
1: **if** $\mathcal{M}$ accepte w **then**
2: simuler $\mathcal{M}_0$ sur u et retouner le résultat
3: **else**
4: rejeter

Algorithme 6: Machine $\mathcal{M}_w$

l'entrée w la machine $\mathcal{M}_w$ ne termine pas non plus. Si $\mathcal{M}$ accepte w le langage de la machine $\mathcal{M}_w$ est égal au langage $L(\mathcal{M}_0)$. Si au contraire la machine $\mathcal{M}$ rejette w, la machine $\mathcal{M}_w$ rejette tous les mots u et son langage est vide. On en déduit l'équivalence $w \in L(\mathcal{M}) \iff L(\mathcal{M}_w) \in P$. La fonction f qui associe

$\langle \mathcal{M}_w \rangle$ à $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ est bien sûr calculable par une machine de Turing déterministe. Elle est donc une réduction de $L_\in$ à L_P. Le corollaire précédent permet de conclure que L_P n'est pas décidable. □

Exercice 3.38. Montrer que si le langage L est récursivement énumérable (resp. décidable), alors le langage L^* est encore récursivement énumérable (resp. décidable).

Solution. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing qui accepte le langage L. On construit une machine $\mathcal{M}'$ non déterministe qui accepte le langage L^*. Cette machine fonctionne de la façon suivante. Elle commence par factoriser de façon non déterministe son entrée w en $w = w_1 \cdots w_n$. Cette factorisation peut être matérialisée par l'insertion de marqueurs sur la bande. Ensuite, la machine $\mathcal{M}'$ vérifie que chacun des facteurs w_i appartient à L en simulant la machine $\mathcal{M}$. Il est clair que si la machine $\mathcal{M}$ s'arrête sur toutes les entrées, c'est encore le cas pour la machine $\mathcal{M}$.

3.5 Problème de correspondance de Post

Le problème de correspondance de Post est intéressant à plusieurs titres. Il a d'abord un intérêt historique mais il est surtout le premier exemple de problème naturel qui soit indécidable. Les problèmes qui ont été montrés indécidables jusqu'à maintenant peuvent paraître artificiels dans la mesure où ils sont tous liés aux machines de Turing qui ont servi à définir la notion de calculabilité. Le problème de Post se prête bien aux réductions et il est donc souvent un bon candidat pour montrer par réduction qu'un autre problème est aussi indécidable.

3.5.1 Présentation

On commence par définir le problème de correspondance de Post PCP.

Définition 3.39 (PCP)**.** Le *problème de correspondance de Post* est le suivant.
- Une *instance* est la donnée d'un entier m et de deux suites $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_m$ de mots sur un alphabet Σ.
- Une *solution* est une suite d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de $\{1, \ldots, m\}$ telle que :

$$u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_n}.$$

- Une instance est positive si elle a au moins une solution.

Le problème de correspondance de Post peut être visualisé à l'aide de dominos sur lesquels sont inscrits deux mots. Pour chaque paire de mots (u_i, v_i), on construit un domino sur lequel les mots u_i et v_i sont écrits l'un au dessus de l'autre. On obtient alors les m dominos suivants.

$$\boxed{\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ v_n \end{matrix}}$$

La question est alors de savoir s'il existe une façon de disposer côte-à-côte des dominos pris dans la liste de telle sorte qu'on lise le même mot en haut et en bas. Comme certains indices de $i_1, \ldots, i_n$ peuvent être égaux, il est possible de réutiliser plusieurs fois le même domino de la liste.

Le problème PCP peut aussi être formulé en termes de morphismes. Soit A l'alphabet $\{a_1, \ldots, a_m\}$ et soient μ et ν les deux morphismes de A^* dans Σ^* définis respectivement par $\mu(a_i) = u_i$ et $\nu(a_i) = v_i$. L'instance de PCP donnée par les deux suites $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_m$ de mots a une solution si et seulement si il existe un mot $w \in A^*$ tel que $\mu(w) = \nu(w)$.

Exemple 3.40. Soit l'instance du problème de Post donnée par $m = 4$ et les mots $u_1 = ab$, $u_2 = c$, $u_3 = ab$, $u_4 = abc$, $v_1 = a$, $v_2 = bcab$, $v_3 = b$ et $v_4 = bc$. Cette instance du problème de Post admet la solution $n = 4$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_2 = 1$ et $i_4 = 4$. En effet, on a l'égalité $u_1u_2u_1u_4 = v_1v_2v_1v_4 = abcababc$ qui se visualise sous forme de dominos par

$$\boxed{\begin{matrix} ab \\ a \end{matrix}}\boxed{\begin{matrix} c \\ bcab \end{matrix}}\boxed{\begin{matrix} ab \\ a \end{matrix}}\boxed{\begin{matrix} abc \\ bc \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} abcababc \\ abcababc \end{matrix}}.$$

Exemple 3.41. Soit l'instance du problème de Post donnée par $m = 4$ et les mots $u_1 = ab$, $u_2 = a$, $u_3 = bc$ $u_4 = c$, $v_1 = bc$, $v_2 = ab$, $v_3 = ca$ et $v_4 = a$. Un argument de longueur permet de conclure que cette instance n'a pas de solution. On a en effet $|u_i| \leq |v_i|$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Dans ce cas, l'instance a une solution si et seulement si $u_i = v_i$ pour au moins un entier $1 \leq i \leq m$.

Afin de montrer que PCP est indécidable, on introduit une variante très proche de PCP. Elle diffère seulement dans le fait que le premier domino de la solution est imposé. Son principal intérêt est de faciliter la preuve de l'indécidabilité de PCP.

Définition 3.42 (PCPM)**.** Le *problème de correspondance de Post modifié* est le suivant.

- Une *instance* est la donnée d'un entier m et de deux suites $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_m$ de mots sur un alphabet Σ.
- Une *solution* est une suite d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de $\{1, \ldots, m\}$ telle que :

$$i_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_1u_{i_2} \cdots u_{i_n} = v_1v_{i_2} \cdots v_{i_n}.$$

- Une instance est positive si elle a au moins une solution.

3.5.2 Indécidabilité

On va montrer que les deux problèmes PCP et PCPM sont indécidables. On commence par montrer que les deux problèmes sont équivalents.

Lemme 3.43 (Équivalence)**.** PCP *est décidable si et seulement si* PCPM *est décidable.*

Preuve. On montre d'abord que si PCPM est décidable, alors PCP est aussi décidable. Soit une instance de PCP formée par les deux suites de mots $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_m$. Une solution $i_1, \ldots, i_n$ de cette instance de PCP est aussi une solution de l'instance de PCPM donnée par les suites $u_{i_1}, u_1, \ldots, u_m$ et $v_{i_1}, v_1, \ldots, v_m$ où les mots u_{i_1} et v_{i_1} ont été placés en tête. L'instance de PCP a une solution si et seulement si une des m instances de PCPM obtenues en mettant en tête l'un des dominos a une solution. Ceci montre que si PCPM est décidable alors PCP est décidable.

Il faut remarquer qu'on a ramené une instance de PCP à m instances de PCPM. Ce n'est pas une réduction $\leq_m$ telle que cela a été défini (cf. définition 3.39). Il s'agit en fait d'une réduction de Turing qui est notée $\leq_T$.

On montre maintenant que si PCP est décidable, alors PCPM est aussi décidable. On effectue une véritable réduction qui transforme une instance de PCPM en une instance de PCP équivalente.

Soit une instance de PCPM donnée par un entier m et deux suites $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_m$ de mots sur un alphabet Σ. On introduit un nouveau symbole \$ n'appartenant pas à Σ et on pose $\Sigma' = \Sigma \cup \{\$\}$. On définit les deux morphismes p et s de Σ^* dans Σ'^* par $p(a) = \$a$ et $s(a) = a\$$ pour toute lettre a de Σ. On vérifie que pour tout mot w de Σ^*, on a l'égalité $p(w)\$ = \$s(w)$.

On définit alors l'instance de PCP donnée par l'entier $m' = 2m + 1$ et les deux suites de mots $u'_1, \ldots, u'_{2m+1}$ et $v'_1, \ldots, v'_{2m+1}$ définis sur l'alphabet Σ' de la manière suivante.

$$u'_k = \begin{cases} p(u_k) & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ p(u_{k-m})\$ & \text{si } m < k \leq 2m \\ p(u_1) & \text{si } k = 2m+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad v'_k = \begin{cases} s(v_k) & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ s(v_{k-m}) & \text{si } m < k \leq 2m \\ \$s(v_1) & \text{si } k = 2m+1 \end{cases}$$

Soit $1, i_2 \ldots, i_n$ une solution de l'instance de PCPM, c'est-à-dire une suite telle l'égalité $u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_n} = v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_n}$ soit vérifiée. En utilisant la relation $p(w)\$ = \$s(w$, on obtient l'égalité $p(u_1)p(u_{i_2}) \cdots p(u_{i_n})\$ = \$s(v_1)s(v_{i_2}) \cdots s(v_{i_n})$ qui se traduit par l'égalité $u'_{2m+1} u'_{i_2} \cdots u'_{i_{n-1}} u'_{i_n+m} = v'_{2m+1} v'_{i_2} \cdots v'_{i_{n-1}} v'_{i_n+m}$. On constate que la suite $2m + 1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n + m$ est une solution de l'instance de PCP.

On vérifie que les seules solutions minimales de cette instance de PCP sont les suites d'indices $i_1, \ldots, i_n$ vérifiant les conditions suivantes :

- $i_1 = 2n + 1$,
- $1 \leq i_k \leq m$ pour tout $2 \leq k \leq n - 1$,
- $m + 1 \leq i_n \leq 2m$.

et alors, par construction, $1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n - m$ est à chaque fois une solution de l'instance de PCPM. Les solutions non minimales sont obtenues en prenant des concaténations de solutions minimales. On retrouve ces concaténations par les occurrences du mot \$\$ dans le mot $u'_{i_1} \cdots u'_{i_n} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_n}$. Ceci montre que l'instance de départ de PCPM a une solution si et seulement si l'instance de PCP associée a une solution. La fonction qui calcule l'instance de PCP associée à l'instance de PCPM donnée est calculable par machine de Turing déterministe. On en déduit qu'on a trouvé une réduction de PCPM à PCP. □

Théorème 3.44 (Post 1946)**.** *Les deux problèmes* PCP *et* PCPM *sont indécidables.*

Dans le résultat précédent, la taille de l'alphabet sur lequel sont écrits les mots u_i et v_i n'est pas fixée. En fait, le problème PCP reste indécidable même si la taille de cet alphabet est fixée à 2. Par contre PCP est décidable sur un alphabet unaire.

Preuve. Comme PCP et PCPM sont équivalents, il suffit de montrer que PCPM est indécidable. On va exhiber une réduction du langage $L_\in$ à PCPM. Soit une instance de $L_\in$ formée par une machine de Turing $\mathcal{M}$ et une entrée w. D'après la proposition 3.12, on peut supposer que la machine $\mathcal{M}$ est normalisée. On

peut en outre supposer que si la machine accepte, elle termine avec une bande remplie de symboles blancs #. Pour cela, on ajoute quelques transitions qui se chargent de remplir la bande avec # une fois que la machine a atteint l'état d'acceptation q_+. Ceci signifie qu'on peut supposer que la dernière configuration d'un calcul acceptant est la configuration q_+.

Le mot w est accepté par la machine $\mathcal{M}$ s'il existe un calcul $q_0w = C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_l = q_+$ de la configuration initiale q_0w à la configuration acceptante q_+. On construit une instance de PCPM telle que ses solutions minimales produisent le mot $C_0\$C_1\$\cdots\$C_l$.

Cette instance est formée par toutes les paires (u_i, v_i) de mots suivantes :
- la première paire $u_1 = \$q_0w\$$ et $v_1 = \$$ pour initier le calcul,
- une paire $u_a = a$ et $v_a = a$ pour tout a de Γ pour recopier cette lettre,
- une paire $u = \$$ et $v = \$$ pour passer à la configuration suivante,
- une paire $u = \$$ et $v = \#\$$ pour passer à la configuration suivante en ajoutant un # implicite à la fin de la configuration,
- une paire $u_\tau = pa$ et $v_\tau = bq$ pour toute transition $\tau = p, a \to q, b, \triangleright$ de $\mathcal{M}$,
- une paire $u_\tau = cpa$ et $v_\tau = qcb$ pour toute transition $\tau = p, a \to q, b, \triangleleft$ de $\mathcal{M}$ et toute lettre $c \in \Gamma$,
- une paire $u = aq_+$ et $v = q_+$ et une autre paire $u = q_+a$ et $v = q_+$ pour toute lettre $a \in \Gamma$ afin de réduire la configuration une fois l'état q_+ atteint,
- une paire $u = q_+\$$ et $v = \varepsilon$ pour terminer.

Sous forme de dominos, on a les paires

$$\boxed{\begin{matrix}\$\\ \$q_0w\$\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}a\\ a\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}b\\ b\end{matrix}} \cdots, \boxed{\begin{matrix}\#\\ \#\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}\$\\ \$\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}\$\\ \#\$\end{matrix}}$$
$$\boxed{\begin{matrix}pa\\ bq\end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix}cpa\\ qcb\end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix}aq_+\\ q_+\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}q_+a\\ q_+\end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix}q_+\$\\ \end{matrix}}.$$

On vérifie (laborieusement) que toute solution de cette instance de PCPM provient nécessairement d'un calcul acceptant le mot w. □

3.5.3 Application aux grammaires algébriques

On utilise maintenant l'indécidabilité de PCP pour montrer l'indécidabilité de questions très naturelles sur les grammaires. Le résultat est à chaque fois obtenu par une réduction de PCP au problème considéré.

Soit une instance de PCP donnée par deux suites $u_1, \ldots, u_m$ et $v_1, \ldots, v_m$ de mots sur un alphabet Σ. On introduit un alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ formé de m nouvelles lettres n'appartenant pas à Σ. On définit ensuite les deux langages L_u et L'_u sur l'alphabet $A + \Sigma$ par

$$L_u = \{u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_n}a_{i_n}a_{i_{n-1}}\cdots a_{i_1} \mid n \geq 0 \text{ et } 1 \leq i_k \leq m\}$$
$$L'_u = \{wa_{i_n}a_{i_{n-1}}\cdots a_{i_1} \mid n \geq 0,\ w \in \Sigma^* \text{ et } w \neq u_{i_1}\cdots u_{i_n}\}.$$

On alors le lemme.

Lemme 3.45. *Les deux langages L_u et L'_u sont algébriques.*

Preuve. Le langage L_u est facilement engendré par la grammaire

$$S \to \sum_{i=1}^{n} u_i S a_i + \varepsilon.$$

Pour le langage L'_u, on considère les trois cas suivant que w est un suffixe propre de $u_{i_1}\cdots u_{i_n}$, que w est de longueur supérieure à $u_{i_1}\cdots u_{i_n}$ ou que w et $u_{i_1}\cdots u_{i_n}$ diffèrent par une lettre. Le langage L'_u est égal à $L_G(S)$ où la grammaire G possède les règles suivantes.

$$S \to \sum_{i=1}^{n} u_i S a_i + \sum_{\substack{1\le i\le m\\ |u|=|u_i|\\ u\neq u_i}} uRa_i + \sum_{\substack{1\le i\le m\\ |u|<|u_i|}} uTa_i + \sum_{\substack{1\le i\le m\\ b\in\Sigma}} u_i b V a_i$$

$$R \to \sum_{i=1}^{n} Ra_i + \sum_{b\in\Sigma} bR + \varepsilon$$

$$T \to \sum_{i=1}^{n} Ta_i + \varepsilon$$

$$V \to \sum_{b\in\Sigma} bV + \varepsilon$$

□

Lemme 3.46. *On a les égalités* $(A+\Sigma)^* \setminus L_u = L'_u \cup ((A+\Sigma)^* \setminus \Sigma^* A^*)$

Preuve. Il suffit de remarquer que $L_u \subseteq \Sigma^* A^*$ et $\Sigma^* A^* \setminus L_u = L'_u$. □

Proposition 3.47. *Les problèmes suivants sont indécidables :*

1. *pour deux grammaires G et G', est-ce que $L_G(S) \cap L_{G'}(S') = \varnothing$?*
2. *pour deux grammaires G et G', est-ce que $L_G(S) = L_{G'}(S')$?*
3. *pour une grammaires G, est-ce que $L_G(S) = A^*$?*
4. *pour une grammaire G, est-ce que G est ambiguë ?*

Preuve. 1 Le problème de correspondance de Post a une solution si et et seulement si l'intersection $L_u \cap L_v$ est non vide. Les grammaires engendrant les langages L_u et L_v peuvent être calculées par une machine de Turing déterministe à partir de l'instance de PCP. On a donc construit une réduction de PCP au problème considéré.

3 L'intersection $L_u \cap L_v$ est vide si et seulement si l'union $(A+\Sigma)^* \setminus L_u \cup (A+\Sigma)^* \setminus L_v$ est égale à $(A+\Sigma)^*$. On a donc une réduction du problème 1 au problème 3. Ceci montre que le problème 3 est aussi indécidable.

2 Comme le problème 3 se réduit au problème 2, ce dernier problème est également indécidable.

4 Le langage $(L_u + L_v) \setminus \{\varepsilon\}$ est égal à $L_G(S)$ où la grammaire G est donnée par les règles suivantes.

$$S \to S_1 + S_2$$

$$S_1 \to \sum_{i=1}^{m} u_i S_1 a_i + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i$$

$$S_2 \to \sum_{i=1}^{m} v_i S_2 a_i + \sum_{i=1}^{m} v_i a_i.$$

Cette grammaire est ambiguë si et seulement si l'intersection $L_u \cap L_v$ est non vide. On a donc une réduction du problème 1 au problème 4 qui montre que le problème 4 est encore indécidable.

□

3.6 Théorème de récursion

Le théorème de récursion est un résultat central de la calculabilité. Il intervient dès qu'un modèle de calcul est équivalent aux machines de Turing. Ce théorème est souvent vu comme un paradoxe car il permet de construire des machines qui sont capables de se reproduire. Il est alors un ingrédient essentiel à la fabrication de virus informatiques. Il a aussi des implications en logique mathématique. La proposition suivante est un cas particulier du théorème de récursion. Ce premier résultat plus simple permet de comprendre les mécanismes mis en œuvre.

Proposition 3.48 (Quines)**.** *Il existe des machines de Turing qui écrivent leur propre codage. De telles machines sont appellées* Quines.

La proposition a pour conséquence que dans tout langage de programmation équivalent aux machines de Turing, on peut écrire un programme qui affiche son propre code.

Preuve. On considère des machines de Turing qui calculent des fonctions et qui s'arrêtent sur toute entrée. On suppose que ces machines sont normalisées. Elles possèdent un unique état final f où se termine tout calcul. Pour simplifier la composition, on suppose aussi que les machines s'arrêtent avec la tête de lecture sur la première position de la bande. Pour deux machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, on note $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ la machine obtenue en composant de manière séquentielle les machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Pour une entrée w, la machine $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ donne le résultat du calcul de $\mathcal{M}'$ qui a pris pour entrée le résultat du calcul de $\mathcal{M}$ sur w.

On commence par construire les machines suivantes.

1. Étant donnés les codages $\langle\mathcal{M}\rangle$ et $\langle\mathcal{M}'\rangle$ de deux machines de Turing, la machine $\mathcal{C}$ calcule le codage $\langle\mathcal{M}\mathcal{M}'\rangle$ de la machine $\mathcal{M}\mathcal{M}'$.
2. Étant donné un mot w, la machine $\mathcal{P}_w$ calcule le mot w.
3. Pour une entrée w, la machine $\mathcal{R}_0$ affiche le codage $\langle\mathcal{P}_w\rangle$ de la machine qui affiche w.
4. Pour une entrée w de la forme $w = \langle\mathcal{M}\rangle$, la machine $\mathcal{R}$ calcule le codage $\langle\mathcal{P}_w\mathcal{M}\rangle$ de la composition de $\mathcal{P}_w$ et de $\mathcal{M}$.

On considère alors la machine $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\langle\mathcal{R}\rangle}\mathcal{R}$ qui est la composition séquentielle des machines $\mathcal{P}_{\langle\mathcal{R}\rangle}$ et $\mathcal{R}$. Après le fonctionnement de la machine $\mathcal{P}_{\langle\mathcal{R}\rangle}$, la bande contient $\langle\mathcal{R}\rangle$. Après le fonctionnement de la machine $\mathcal{R}$, la bande contient $\langle\mathcal{P}_{\langle\mathcal{R}\rangle}\mathcal{R}\rangle$ qui est bien le codage de la machine $\mathcal{Q}$. Ceci est schématisé de la façon suivante.

$$\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{P}_{\langle\mathcal{R}\rangle}} \langle\mathcal{R}\rangle \xrightarrow{\mathcal{R}} \langle\mathcal{P}_{\langle\mathcal{R}\rangle}R\rangle$$

□

On illustre la preuve de la proposition en montrant comment celle-ci permet de donner un programme en langage C qui affiche son propre code. La même méthode pourrait être appliquée dans n'importe quel autre langage de programmation.

Le premier problème à résoudre est un problème de notation. Lorsqu'un caractère `'"'` ou `'\'` est inclus dans une chaîne il doit être précédé d'un caractère d'échappement `'\'`. Pour une chaîne w sur l'alphabet ASCII, on note $\hat{w}$ la chaîne obtenue en insérant un caractère `'\'` avant chaque caractère `'"'` ou `'\'`. Si w est par exemple la chaîne `char *"\'a'\\"`, alors la chaîne $\hat{w}$ est `char *\"\\'a'\\\\"`.

Le second problème est qu'un programme C ne peut pas relire ce qu'il a écrit. La machine $\mathcal{P}_w$ est donc transformée en une fonction qui retourne une chaîne de caractères. Pour la chaîne w égale à `char *"\'a'\\"`, la fonction $\mathcal{P}_w$ s'écrit de la manière suivante en langage C.

```
char *P(){ return "char *\"\\'a'\\\\\"";}
```

La machine $\mathcal{R}$ est transformée en une fonction qui affiche le code de $\mathcal{P}_w$. Elle s'écrit de la manière suivante en langage C.

```
void R(char* w) {
  printf("char *P(){ return \"";
  while(*w != '\0') {
    if (*w == '\\' || *w == '\"')
      printf("\\");
    printf("%c", *w++);
  }
  printf("\";}");
}
```

Le code de la machine $\mathcal{Q}$ est finalement le suivant.

```
void char* P(){ return "...";}
void main(){
  char* w = P();
  printf("char *P(){ return \"";
  while(*w != '\0') {
    if (*w == '\\' || *w == '\"')
      printf("\\");
    printf("%c", *w++);
  }
  printf("\";}");
  printf("%s", w);
}
```

où les `...` sont remplacés par $\hat{w}$ où w est le code `void main(){ ... }` de la fonction `main`.

Il est bien sûr possible de faire plus concis comme l'exemple suivant qui contourne le problème du caractère d'échappement en utilisant le code ASCII de la quote '"' qui est 34 en décimal.

```
main(){char *s="main(){char *s=%c%s%c;printf(s,34,s,34);}";
                                        printf(s,34,s,34);}
```

Le théorème suivant étend la proposition précédente dans la mesure où une machine peut combiner son propre codage avec d'autres données.

Théorème 3.49 (Théorème de récursion)**.** *Soit $t : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ une fonction calculable par machine de Turing. Il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ qui calcule la fonction $m : w \mapsto t(w, \langle \mathcal{M} \rangle)$.*

Preuve. On commence par construire la machine $\mathcal{R}'$, qui pour une entrée de la forme $u\$\langle \mathcal{M} \rangle$ calcule $u\$\langle P_{\langle \mathcal{M} \rangle} \mathcal{M} \rangle$. Soit $\mathcal{T}$ une machine de Turing qui calcule la fonction t. On considère la machine $\mathcal{M} = P_{\langle \mathcal{R}'\mathcal{T} \rangle} \mathcal{R}'\mathcal{T}$ qui est la composition séquentielle des machines $P_{\langle \mathcal{R}'\mathcal{T} \rangle}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{T}$. On a alors le schéma de fonctionnement suivant.

$$w\$ \xrightarrow{P_{\langle \mathcal{R}'\mathcal{T} \rangle}} w\$\langle \mathcal{R}'\mathcal{T} \rangle \xrightarrow{\mathcal{R}'} w\$\langle P_{\langle \mathcal{R}'\mathcal{T} \rangle} \mathcal{R}'\mathcal{T} \rangle \xrightarrow{\mathcal{T}} t(w, \langle \mathcal{M} \rangle)$$

□

Théorème 3.50 (Point fixe)**.** *Soit t une fonction calculable par machine de Turing qui à $\langle \mathcal{M} \rangle$ associe une machine de Turing $\mathcal{M}' = t(\langle \mathcal{M} \rangle)$. Alors, il existe une machine $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M}$ et $t(\mathcal{M})$ sont équivalentes.*

Preuve. On considère la machine $\mathcal{M}$ suivante (qui est correctement définie d'après la proposition précédente) :

input w
$x \leftarrow \langle \mathcal{M} \rangle$
$y \leftarrow t(x)$
simuler y sur l'entrée w

□

3.7 Machines linéairement bornées

Les machines linéairement bornées sont des machines qui utilisent uniquement la portion de la bande où est écrite l'entrée. Ces machines jouent un rôle important pour plusieurs raisons. D'une part, elles caractérisent les langages engendrés par les grammaires contextuelles qui généralisent les grammaires pour les langages algébriques. D'autre part, elles se situent à la frontière de l'indécidabilité puisque le problème de l'acceptation est décidable alors que le problème du vide est indécidable.

3.7.1 Définition

Une machine de Turing $\mathcal{M}$ est dite *linéairement bornée* si elle n'écrit pas en dehors de l'espace utilisé par la donnée.

Comme on peut toujours supposer qu'une machine de Turing n'écrit pas le symbole blanc # (en le dupliquant éventuellement en un autre symbole #′), on peut aussi dire qu'une machine linéairement bornée est une machine telle que si $p, \# \to q, b, x$ est une transition alors, $b = \#$ et $x = \triangleleft$. Ceci empêche la machine de modifier les symboles blancs présents sur la bande.

L'espace utilisé par une machine linéairement bornée peut être augmenté en ajoutant de nouveaux symboles à l'alphabet de bande mais l'espace ainsi disponible reste proportionnel à la taille de l'entrée. Ceci justifie la terminologie.

3.7.2 Grammaires contextuelles

L'objectif de cette partie est de définir les grammaires contextuelles et de montrer qu'elles ont le même pouvoir d'expression que les machines linéairement bornées. Ceci signifie qu'un langage est accepté par une machine linéairement bornée si et seulement si il est engendré par une grammaire contextuelle. On commence par définir les grammaires les plus générales.

Définition 3.51. Une *grammaire* est un quadruplet (A, V, P, S) où A est un alphabet fini, V un ensemble fini de variables, $S \in V$ est l'axiome et P est un ensemble fini de règles inclus dans $(A+V)^* \times (A+V)^*$.

Une règle $(w, w') \in P$ est encore notée $w \to w'$. La notion de dérivation des grammaires algébriques (cf. définition 2.1 p. 70) s'étend de façon naturelle à ces grammaires plus générales. Un mot u se *dérive* en un mot u' s'il existe des mots $\alpha, \beta \in (A+V)^*$ et une règle $w \to w'$ tels que $u = \alpha w \beta$ et $u' = \alpha w' \beta$. On note $\xrightarrow{*}$ la clôture réflexive et transitive de la relation $\to$. L'ensemble engendré par la grammaire est par définition l'ensemble $L_G(S) = \{w \in A^* \mid S \xrightarrow{*} w\}$.

Définition 3.52. Une grammaire est dite *contextuelle* si toutes ses règles de la forme suivante.

- soit la règle $S \to \varepsilon$ qui permet d'engendrer le mot vide à partir de l'axiome,
- soit une règle $uTv \to uwv$ où $T \in V$ est une variable, $u, v \in (A+V)^*$ sont des mots formés de lettres et de variables et $w \in (A + V \setminus \{S\})^+$ est un mot non vide formé de lettres et de variables autres que l'axiome.

La définition d'une grammaire contextuelle impose deux contraintes aux règles de celle-ci. D'une part, une seule variable T est remplacée par un mot w pour passer du membre gauche au membre droit. D'autre part, le mot w substitué à T n'est jamais vide à l'exception d'une éventuelle règle $S \to \varepsilon$. Cette dernière condition impose que le membre droit d'une règle est toujours de longueur supérieure ou égale au membre gauche. Elle est en fait l'élément important de cette définition comme le montre la proposition suivante. Une grammaire est dite *croissante* si chacune de ses règle $w \to w'$ vérifie $|w| \leq |w'|$.

La proposition suivante montre que grammaires contextuelles et grammaires croissantes sont équivalentes pour les langages ne contenant pas le mot vide.

Proposition 3.53. *Un langage $L \subseteq A^+$ est engendré par une grammaire contextuelle si et seulement si il est engendré par une grammaire croissante.*

Une grammaire contextuelle qui ne contient pas la règle $S \to \varepsilon$ est une grammaire croissante. Si L est engendré par une grammaire contextuelle, celle-ci ne contient pas la règle $S \to \varepsilon$.

La réciproque est un peu plus délicate. Elle consiste à transformer une grammaire croissante en une grammaire contextuelle équivalente. Chaque règle de la grammaire croissante est remplacée par plusieurs règles dans la grammaire croissante construite. Quitte à introduire une nouvelle variable pour chaque lettre de A, on peut supposer que les règles de la grammaire croissante sont des deux formes suivantes.

- soit de la forme $S \to a$ pour une variable $S \in V$ et une lettre $a \in A$,
- soit de la forme $S_{i_1} \cdots S_{i_k} \to S_{j_1} \cdots S_{j_m}$ avec $m \geq n \geq 1$.

Les règles de la forme $S \to a$ sont laissées inchangées. Chaque règle de la forme $S_{i_1} \cdots S_{i_k} \to S_{j_1} \cdots S_{j_m}$ est remplacée par plusieurs règles données ci-dessous.

- $S_{i_1} \cdots S_{i_k} \to Z_1 S_{i_2} \cdots S_{i_k} \to Z_1 Z_2 S_{i_3} \cdots S_{i_k} \to Z_1 Z_2 Z_3 S_{i_4} \cdots S_{i_k} \to \cdots \to Z_1 \cdots Z_{k-1} S_{i_k} \to Z_1 \cdots Z_{k-1} S_{j_k} \cdots S_{j_m}$
- $Z_1 \cdots Z_{k-1} S_{j_k} \cdots S_{j_m} \to Z_1 \cdots Z_{k-2} S_{j_{k-1}} \cdots S_{j_m} \to Z_1 \cdots Z_{k-3} S_{j_{k-2}} \cdots S_{j_m} \to \cdots \to Z_1 S_{j_2} \cdots S_{j_m} \to S_{j_1} \cdots S_{j_m}$

où $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k-1}$ sont $k-1$ nouvelles variables propres à la règle transformée. Il est facile de vérifier que les nouvelles règles simulent l'ancienne règle.

Les grammaires croissantes permettent de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.54. *Un langage est engendré par une grammaire contextuelle si et seulement s'il est accepté par une machine de Turing linéairement bornée.*

Preuve. Étant donné une grammaire quelconque, on peut toujours faire une machine de Turing non déterministe qui devine la dérivation à l'envers. La machine accepte lorsqu'elle trouve l'axiome. Si la grammaire est contextuelle, l'espace mémoire utilisé diminue au cours du calcul. On obtient donc une machine linéairement bornée.

Réciproquement, soit $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, E, q_0, F, \#)$ une machine linéairement bornée. Sans perte de généralité, on peut supposer que la machine $\mathcal{M}$ a un seul état final q_f, c'est-à-dire que $F = \{q_f\}$. On construit alors la grammaire contextuelle (A, V, P, S) suivante. L'alphabet A est l'alphabet d'entrée Σ de $\mathcal{M}$. L'ensemble V de variables est $\{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma)$ qui contient l'axiome S, les paires (a, b) formées d'une lettre $a \in \Gamma$ de l'alphabet de bande et d'une lettre $b \in \Sigma$ de l'alphabet d'entrée ainsi que les triplets (q, a, b) formés d'un état $q \in Q$, d'une lettre $a \in \Gamma$ de l'alphabet de bande et d'une lettre $b \in \Sigma$ de l'alphabet d'entrée. L'ensemble P contient les règles des trois types suivants.

- Règles d'initialisation
  - une règle $S \to S(a, a)$ pour chaque $a \in A$,
  - une règle $S \to (q_0, a, a)$ pour chaque $a \in A$,
- Règles de simulation
  - une règle $(q, a, c)(d, e) \to (b, c)(p, d, e)$ pour chaque transition $q, a \to p, b, \triangleright$ de $\mathcal{M}$ et chaque $c, e \in \Sigma$ et $d \in \Gamma$,
  - une règle $(d, e)(q, a, c) \to (p, d, e)(b, c)$ pour chaque transition $q, a \to p, b, \triangleleft$ de $\mathcal{M}$ et chaque $c, e \in \Sigma$ et $d \in \Gamma$,
- Règles de terminaison
  - une règle $(q_f, b, a)(d, e) \to a(q_f, d, e)$ pour chaque $a, e \in \Sigma$ et $b, d \in \Gamma$,
  - une règle $(q_f, b, a) \to a$ pour chaque $a \in \Sigma$ et $b \in \Gamma$,

□

3.7.3 Décidabilité

Les machines linéairement bornées se situent à la frontière entre la décidabilité et l'indécidabilité. Certains problèmes comme celui de l'acceptation deviennent décidables pour les machines linéairement bornées alors que d'autres comme celui du vide restent indécidables.

Théorème 3.55. *Il peut être décidé si une machine linéairement bornée accepte un mot w.*

Pour une entrée de longueur n, le nombre de configurations possibles de la machine $n|Q||\Gamma|^n$ où $|Q|$ est le nombre d'états et $|\Gamma|$ le nombre de symboles de bande. On peut construire effectivement le graphe des calculs de la machine sur l'entrée w et décider s'il y a, dans ce graphe, un chemin de la configuration initiale q_0w à une configuration acceptante.

Théorème 3.56. *Il est indécidable de savoir si une machine $\mathcal{M}$ linéairement bornée n'accepte aucun mot, c'est-à-dire $L(\mathcal{M}) = \varnothing$.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing quelconque et soit w un mot d'entrée de $\mathcal{M}$. Soit \$ un nouveau symbole qui n'appartient pas à $Q \cup \Gamma$. On définit le langage X_w de la manière suivante.

$$X_w = \{C_0\$C_1\$\cdots\$C_k \mid q_0w = C_0 \to \cdots \to C_k \text{ est un calcul acceptant } w\}.$$

Le langage X_w est accepté par une machine linéairement bornée $\mathcal{M}'$ qui peut être effectivement construite à partir de la machine $\mathcal{M}$ et de w. La machine $\mathcal{M}'$ doit vérifier que $C_0 = q_0w$, que $C_i \to C_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$ et que C_k est acceptante. On a alors les équivalences

$$w \in L(\mathcal{M}) \iff X_w \neq \varnothing \iff L(\mathcal{M}') \neq \varnothing$$

qui montrent que le problème de l'acceptation pour les machines de Turing se réduit au problème du vide pour les machines linéairement bornées. Le problème du vide pour les machines linéairement bornées est donc indécidable. □

3.7.4 Complémentation

Nous montrons dans cette partie que la famille des langages acceptés par des machines linéairement bornées est fermée par complémentation. Ce théorème est un très joli résultat. Nous donnons ensuite une généralisation à un cadre beaucoup plus large.

Théorème 3.57 (Immerman-Szelepcsényi)**.** *Pour toute machine $\mathcal{M}$ linéairement bornée et non déterministe, il existe une machine $\mathcal{M}'$ linéairement bornée et non déterministe qui accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{M}$.*

Soit L un langage accepté par une machine linéairement bornée $\mathcal{M}$. Pour une entrée $w \in \Sigma^*$ de $\mathcal{M}$, on note $N(w)$ le nombre de configurations de $\mathcal{M}$ qui peuvent être atteintes par $\mathcal{M}$ à partir de l'entrée w, c'est-à-dire de la configuration initiale q_0w. On a l'inégalité $N(w) \leq K^{|w|}$ pour une constante K bien choisie. Le nombre $N(w)$ peut donc être écrit en base K sur une bande de longueur $|w|$.

On construit une machine $\mathcal{M}'$ linéairement bornée et non déterministe qui accepte le complémentaire $\Sigma^* \setminus L$ du langage L. Pour une entrée w, le calcul de $\mathcal{M}'$ comprend les deux étapes principales suivantes.

1. calcul de $N(w)$
2. déterminer si $w \in L$ en utilisant $N(w)$

On commence par décrire l'étape 1 puis on décrit l'étape 2.

Calcul de $N(w)$

On construit dans cette section une machine linéairement bornée et non déterministe qui calcule $N(w)$ à partir de w. On rappelle qu'une machine non déterministe calcule une fonction f si pour chaque entrée w, il existe au moins un calcul acceptant et que de plus chaque calcul acceptant produit la valeur $f(w)$.

Pour l'entrée w, on note $C(w)$, l'ensemble des configurations contenues dans l'espace $|w|$. On note également $C_k(w)$ l'ensemble des configurations qui peuvent être atteintes en au plus k étapes de calcul de $\mathcal{M}$ à partir de la configuration initiale q_0w. On note finalement $N_k(w)$ le cardinal de l'ensemble $C_k(w)$. La suite $(N_k(w))_{k\geq 0}$ est bien sûr croissante. Le nombre $N_0(w)$ est par définition égal à 1 et le nombre $N(w)$ est égal à $N_k(w)$ où k est le plus petit entier tel que $N_k(w) = N_{k+1}(w)$. Pour calculer $N(w)$, il suffit donc de savoir calculer $N_{k+1}(w)$ à partir de $N_k(w)$. La procédure suivante calcule $N_{k+1}(w)$ à partir de $N_k(w)$.

L'algorithme suivant prend en entrée la valeur de $N_k(w)$ et calcule de façon non déterministe $N_{k+1}(w)$. Il s'arrête soit en donnant la valeur exacte de $N_{k+1}(w)$ soit sur un échec mais au moins un calcul conduit à la valeur de $N_{k+1}(w)$. Cet algorithme fonctionne de la façon suivante. Il parcourt toutes les configurations de $C(w)$. Pour chacune d'entre elles, il détermine si elle appartient à $C_{k+1}(w)$ et il retourne à la fin le cardinal de cet ensemble. L'algorithme procède de la façon suivante pour déterminer si une configuration c appartient à $C_{k+1}(w)$. Il parcourt à nouveau toutes les configurations c' de $C(w)$ et pour chacune d'entre elle, il choisit de façon non déterministe si elle appartient à $C_k(w)$. Si l'algorithme choisit que c' appartient à $C(w)$, il le vérifie en trouvant de façon déterministe un calcul de longueur au plus k conduisant à c'. Si cette vérification échoue, l'algorithme échoue globalement. Ensuite, si c' est égal à c ou si une transition de $\mathcal{M}$ permet de passer de c' à c, il est acquis que c appartient à $C_{k+1}(w)$. Inversement, toute configuration de $C_{k+1}(w)$ est bien trouvée ainsi. L'algorithme utilise la donnée $N_k(w)$ pour vérifier finalement que pour chaque configuration c', il ne s'est pas trompé en choisissant si c' appartient ou non à $C_k(w)$. Pendant le parcours des configurations c', l'algorithme compte le nombre de configurations mises dans $C_k(w)$ et vérifie à la fin que ce nombre est bien égal à $N_k(w)$. Cette vérification assure que l'algorithme n'oublie aucune configuration de $C_k(w)$. Puisque l'algorithme vérifie aussi que chaque configuration mise dans $C_k(w)$ est effectivement dans $C_k(w)$, tous les choix de l'algorithme sont exacts. Si l'algorithme fait un seul mauvais choix, il échoue mais si tous ses choix sont exacts, il donne la valeur de $N_{k+1}(w)$.

Acceptation si $w \notin L(\mathcal{M})$

Nous terminons la preuve du théorème d'Immerman et Szelepcsényi en donnant la machine $\mathcal{M}'$ qui accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{M}$. Cette machine $\mathcal{M}'$ est donnée sous la forme d'un algorithme.

L'algorithme suivant calcule de façon non déterministe si un mot w n'appartient pas au langage $L(\mathcal{M})$ des mots acceptés par $\mathcal{M}$. Cet algorithme est assez similaire à l'algorithme précédent pour calculer $N_{k+1}(w)$ à partir de $N_k(w)$. Il fait des choix non déterministes et il utilise la donnée $N(w)$ pour vérifier à la fin que les choix ont été corrects. L'algorithme procède de la façon suivante pour déterminer que w n'appartient pas à $L(\mathcal{M})$. Il parcourt toutes les configura-

1: $i \leftarrow 0$ // Compteur des configurations dans $N_{k+1}(w)$
2: **for** $c \in C(w)$ **do**
3: $j \leftarrow 0$ // Compteur des configurations dans $N_k(w)$
4: **for** $c' \in C(w)$ **do**
5: Choisir de façon *non déterministe* si $q_0 w \xrightarrow{\leq k} c$
6: **if** $q_0 w \xrightarrow{\leq k} c$ **then**
7: Vérifier de façon *non déterministe* que $q_0 w \xrightarrow{\leq k} c$
8: **if** la vérification réussit **then**
9: $j \leftarrow j + 1$
10: **else**
11: ÉCHEC
12: **if** $c' = c$ ou $c' \to c$ **then**
13: $i \leftarrow i + 1$
14: break
15: **if** $j < N_k(w)$ **then**
16: ÉCHEC
17: Return i

Algorithme 7: Calcul de $N_{k+1}(w)$

tions de $C(w)$ et pour chacune d'entre elles, il choisit si elle accessible à partir de $q_0 w$. Si le choix est positif, l'algorithme le vérifie en trouvant de façon non déterministe un calcul de $q_0 w$ à cette configuration. À la fin de ce parcours, le nombre de configurations choisies comme accessibles est comparé avec $N(w)$ pour vérifier qu'aucune configuration réellement accessible n'a été mise de côté. Si finalement aucune configuration accessible n'est finale, l'algorithme accepte le mot car il n'est pas dans $L(\mathcal{M})$.

1: $i \leftarrow 0$ // Compteur des configurations dans $N(w)$
2: **for** $c \in C(w)$ **do**
3: Choisir de façon *non déterministe* si $q_0 w \xrightarrow{*} c$
4: **if** $q_0 w \xrightarrow{*} c$ **then**
5: Vérifier de façon *non déterministe* que $q_0 w \xrightarrow{*} c$
6: **if** la vérification réussit **then**
7: $i \leftarrow i + 1$
8: **else**
9: ÉCHEC
10: **if** c est acceptante **then**
11: ÉCHEC
12: **if** $i < N(w)$ **then**
13: ÉCHEC
14: **else**
15: ACCEPTATION

Algorithme 8: Machine pour le complémentaire

Extension

Nous allons voir que le théorème précédent peut être établi dans un cadre plus large. Nous commençons par analyser l'espace utilisé par les deux algorithmes donnés pour établir le résultat.

Pour chaque entrée w, les deux algorithmes manipulent un nombre fixe de configurations de $C(w)$ et un nombre fixe de compteurs bornés par le cardinal de $C(w)$. Le premier algorithme utilise par exemple deux configurations c et c', deux compteurs i et j ainsi que deux configurations et un compteur supplémentaires pour la vérification de $q_0 w \xrightarrow{\leq i} c$. L'espace nécessaire pour contenir toutes ces données est proportionnel à la taille maximale d'une configuration de $C(w)$.

L'ensemble $C(w)$ a été défini comme l'ensemble des configurations de taille au plus $|w|$ car, dans le cas d'une machine linéairement bornée, cet ensemble contient toutes les configurations accessibles à partir de $q_0 w$. Si la machine $\mathcal{M}$ n'est pas linéairement bornée, il faut définir $C(w)$ comme l'ensemble des configurations de taille au plus $s(w)$ où $s(w)$ est la taille maximale d'une configuration accessible à partir de $q_0 w$. Cette taille maximale existe toujours si la machine s'arrête sur toutes les entrées.

Si la machine $\mathcal{M}$ n'est plus linéairement bornée, il est possible de modifier le premier algorithme qui calcule $N(w)$ pour qu'il calcule également $s(w)$. Le second algorithme peut alors utiliser cette valeur pour énumérer toutes les configurations de $C(w)$.

Le premier algorithme calcule simultanément $N_{k+1}(w)$ et $s_{k+1}(w)$ en partant de $N_k(w)$ et $s_k(w)$ où $s_k(w)$ est la longueur maximale d'une configuration accessible en au plus k étapes de calcul à partir de $q_0 w$. L'énumération des configuration c se fait alors sur les configurations de longueur au plus $s_k(w)+1$ puisque $s_{k+1}(w) \leq s_k(w)+1$. L'énumération des configuration c' s'effectue sur les configurations de longueur au plus $s_k(w)$. Pour chaque configuration de $C_k(w)$ trouvée, l'algorithme met à jour la valeur de $s_{k+1}(w)$.

Pour une fonction s de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on dit que une machine de Turing est d'espace s si pour toute entrée w, toute configuration accessible à partir de $q_0 w$ est de longueur au plus $s(|w|)$. Nous avons en fait démontré le résultat suivant.

Théorème 3.58 (Immerman-Szelepcsényi 1987)**.** *Soit s une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $s(n) \geq \log n$. Pour toute machine $\mathcal{M}$ non-déterministe d'espace s, il existe une machine $\mathcal{M}'$ non déterministe d'espace Ks pour une constante K qui accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{M}$.*

3.8 Décidabilité de théories logiques

3.8.1 Modèles et formules logiques

Une logique est d'abord déterminée par l'ensemble sous-jacent appelé *modèle* qui contient les éléments sur lequel on travaille. Elle est ensuite fixée par les opérateurs logiques utilisés dans les formules ainsi que les formules atomiques autorisées sur les éléments. La manière dont sont utilisés les quantificateurs est aussi importante. Dans certains cas, on s'autorise uniquement à quantifier sur les éléments du modèle. On parle alors de logique du *premier ordre*. Dans d'autres cas, les quantificateurs peuvent porter sur des ensembles ou des relations. On parle alors de logique du *second ordre*. La logique du second ordre est qualifiée

de *monadique* lorsque les quantifications portent seulement sur les ensembles mais pas sur les relations ou les fonctions.

Dans toutes cette partie, le modèle est toujours l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers. les opérations atomiques sur les entiers que l'on considère sont l'addition, la multiplication et l'ordre.

- modèle : $\mathbb{N}$.
- connecteurs booléens : $\wedge$, $\vee$, $\neg$
- quantificateur : $\forall$, $\exists$
- opérations : $+$, $\times$, $<$

On va s'intéresser essentiellement à la logique du premier ordre des entiers avec l'addition seulement ou l'addition et la multiplication ainsi qu'à la logique du second ordre des entiers avec l'ordre.

On rappelle auparavant quelques définitions élémentaires de logique.

Définition 3.59 (Formules closes)**.** Une *formule close* est une formule sans variable libre, c'est-à-dire une formule où toute variable est sous la portée d'un quantificateur.

Définition 3.60. On dit qu'une *théorie logique* est *décidable* s'il est décidable de savoir si une formule close est vraie.

Définition 3.61 (Forme prénexe)**.** Une formule φ est en *forme prénexe* si elle a la forme $\varphi = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\psi$ où chaque quantificateur Q_i est soit le quantificateur universel $\forall$ ou le quantificateur existentiel $\exists$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et où la formule ψ est sans quantificateur.

3.8.2 Arithmétique de Presburger

L'arithmétique de Presburger est la théorie du premier ordre des entiers munis de l'addition mais pas de la multiplication.

Théorème 3.62 (Presburger 1929)**.** *La théorie au premier ordre des entiers munis de l'addition est décidable.*

Preuve. On montre le résultat en utilisant des automates. On montre en effet que pour toute formule φ de la logique de Presburger, l'ensemble des n-uplets qui satisfont la formule φ est un langage rationnel. La preuve se fait par récurrence sur le nombre de quantificateurs de φ.

Soit φ une formule close qu'on suppose sous forme prénexe. Elle s'écrit donc $\varphi = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\psi$. Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on définit φ_k par $\varphi_k = Q_{k+1}x_{k+1}\dots Q_nx_n\psi$ avec les conventions $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_n = \psi$. Pour $0 \leq k \leq n$, la formule φ_k a k variables libres et elle s'écrit donc $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

On montre par récurrence sur $n-k$ que l'ensemble des k-uplets qui satisfont φ_k est un ensemble rationnel. On définit d'abord un codage qui permet d'écrire les k-uplets d'entiers. Chaque entier est écrit en binaire sur l'alphabet $\{0,1\}$. Un k-uplet d'entiers est écrit sur l'alphabet $\Sigma_k = \{0,1\}^k$ en ajoutant éventuellement des zéros en tête des écritures pour les rendre de la même longueur. On définit l'ensemble X_k par

$$X_k = \{(n_1, \dots, n_k) \mid \varphi_k(n_1, \dots, n_k) \text{ est vraie}\}.$$

On construit par récurrence sur $n-k$, un automate $\mathcal{A}_k$ qui accepte les écritures sur Σ_k des éléments de X_k. Ainsi, l'automate $\mathcal{A}_0$ (défini sur un alphabet unaire) accepte au moins un mot si et seulement si la formule φ est vraie.

On commence par la construction de l'automate $\mathcal{A}_n$ qui accepte les n-uplets qui satisfont la formule ψ. Celle-ci se décompose comme une combinaison booléenne de formules atomiques de la forme $x_i = x_j$ ou $x_i + x_j = x_k$. Comme la classe des langages rationnels est close pour toutes les opérations booléennes, il suffit de construire un automate pour chacune des formules atomiques.

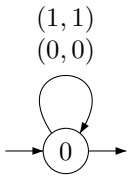


FIG. 3.11 – Automate de égalité

L'automate pour l'égalité s'obtient très facilement (cf.figure 3.11). Pour l'ad-

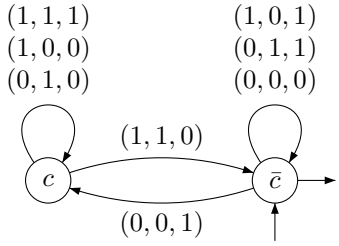


FIG. 3.12 – Automate de l'addition

dition, on construit un automate codéterministe en faisant comme s'il lisait de la droite vers la gauche. Sur la figure 3.12, l'état c est l'état avec retenue et l'état $\bar{c}$ est l'état sans retenue.

Pour le passage de $\mathcal{A}_{k+1}$ à $\mathcal{A}_k$, on écrit $\varphi_k = Q_{k+1}x_{k+1}\varphi_{k+1}$ et on considère deux cas suivant que Q_{k+1} est le quantificateur $\forall$ ou le quantificateur $\exists$. Dans le premier cas, on se ramène au second cas en écrivant que $\varphi_k = \neg\exists x_{k+1}\neg\varphi_{k+1}$ et en utilisant la clôture par complémentation des langages rationnels. Il ne reste plus qu'à traiter le cas où Q_{k+1} est le quantificateur existentiel.

L'automate $\mathcal{A}_k$ est obtenu à partir de l'automate $\mathcal{A}_{k+1}$ en oubliant la dernière composante de l'alphabet, c'est-à-dire en projetant l'alphabet Σ^{k+1} sur l'alphabet Σ^k par le morphisme π_k défini par $\pi_k(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}) = (b_1, \ldots, b_k)$. L'automate $\mathcal{A}_k$ devine en quelque sorte l'entier x_{k+1}. L'automate $\mathcal{A}_k$ a même ensemble d'états que l'automate $\mathcal{A}_{k+1}$. Les transitions de $\mathcal{A}_k$ sont toutes les transitions de la forme $p \xrightarrow{\pi_k(x)} q$ où $p \xrightarrow{x} q$ est une transition de $\mathcal{A}_{k+1}$. Les états finaux de $\mathcal{A}_k$ dont ceux de $\mathcal{A}_{k+1}$. Les états initiaux de $\mathcal{A}_k$ sont les états qui peuvent être atteints en partant d'un état initial de $\mathcal{A}_{k+1}$ en lisant des lettres égales à la lettre $(0, \ldots, 0)$ de Σ^k. Ce changement permet de prendre en compte les entiers x_{k+1} ayant une écriture binaire plus longue que celles des entiers $x_1, \ldots, x_k$.

□

La construction de l'automate $\mathcal{A}_k$ à partir de l'automate $\mathcal{A}_{k+1}$ est illustrée par l'exemple suivant.

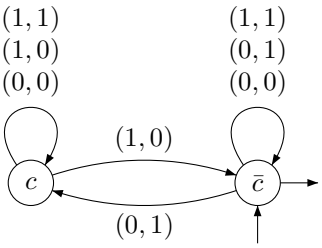


FIG. 3.13 – Automate de la relation $x \leq y$

Exemple 3.63. La relation $x \leq y$ est équivalente à la formule $\exists z \;\; x + z = y$. On obtient donc un automate pour la formule $x \leq y$ en partant de l'automate de la figure 3.12 et en projetant l'alphabet Σ^3 sur Σ^2 par $\pi(b_1, b_2, b_3) = (b_1, b_3)$ (cf. figure 3.13).

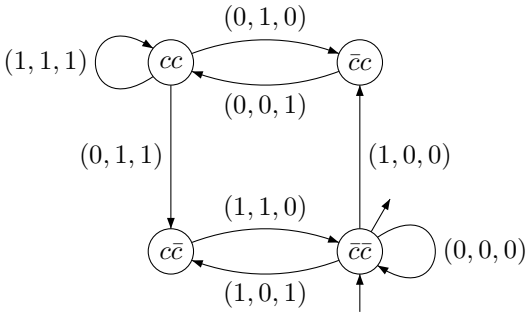


FIG. 3.14 – Automate de la relation $x = y + z \wedge z = y + y$

Exemple 3.64. L'équation $x \equiv 0 \mod 3$ est équivalente à la formule $\exists y, z \;\; x = y + z \wedge z = y + y$. En combinant les automates des relations $x = y + z$ et $z = y + y$, on obtient l'automate de la figure 3.14. En projetant l'alphabet sur sa première composante, on obtient un automate non déterministe qui accepte les écritures binaires des multiples de 3. En déterminisant cet automate, on trouve l'automate de la figure 3.15 (p. 159).

Nous avons montré que la logique su premier ordre des entiers munis de l'addition es décidable. Par contre, cette logique devient indécidable dès qu'on ajoute la multiplication comme l'établit le théorème de Tarski.

Théorème 3.65 (Tarski 1936)**.** *La théorie au premier ordre des entiers munis de l'addition et de la multiplication est indécidable.*

La preuve de ce résultat est difficile et technique et nous ne la donnons pas ici. Elle consiste à réduire le problème de l'acceptation à ce problème. À toute instance $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ du problème d'acceptation, on associe une formule $\exists x \;\; \varphi_{\mathcal{M},w}$ qui est vraie si et seulement si le mot w est accepté par la machine $\mathcal{M}$. L'idée est de coder l'existence d'un chemin acceptant par une formule.

3.9 Fonctions récursives

Les fonctions récursives constituent une autre façon de définir la notion de *calculabilité*. Elles sont définies à partir d'un nombre restreint de fonctions élémentaires en utilisant la composition, un schéma de récurrence et un schéma de minimisation.

Les fonctions récursives sont habituellement définies comme des fonctions qui manipulent des entiers mais il est également possible de considérer des fonctions de mots comme en [Aut92, p. 68]. Chaque fonction récursive est une fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}^r$ pour des entiers k et r. On commence par définir la sous-famille des fonctions primitives récursives qui sont des fonctions totales.

3.9.1 Fonctions primitives récursives

Notations

Comme les fonctions récursives manipulent des k-uplets d'entiers, on adopte quelques conventions pour simplifier les notations. Un k-uplet d'entiers est noté $(n_1, \ldots, n_k)$. Si m et n sont respectivement un k-uplet $(m_1, \ldots, m_k)$ et un l-uplet $(n_1, \ldots, n_l)$, le $k+l$-uplet $(m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l)$ obtenu par concaténation est simplement noté m, n ou encore (m, n). En particulier, si f est une fonction dont le domaine est inclus dans $\mathbb{N}^{k+l}$, on écrit $f(m, n)$ pour $f(m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l)$. Cette notation est étendue aux suites de k-uplets. Soit p un entier et soient p entiers $k_1, \ldots, k_p$. Soit k l'entier égal à la somme $k_1 + \cdots + k_p$. Si chaque n_i est un k_i-uplet $(n_{i,1}, \ldots, n_{i,k_i})$, on note $n_1, \ldots, n_p$ ou $(n_1, \ldots, n_p)$ le k-uplet $(n_{1,1}, \ldots, n_{p,k_p})$ obtenu en concaténant les p k_i-uplets. Si f est une fonction dont le domaine est inclus dans $\mathbb{N}^k$, on écrit $f(n_1, \ldots, n_p)$ pour $f(n_{1,1}, \ldots, n_{p,k_p})$.

Définitions

On introduit maintenant un certain nombre de fonctions primitives récursives de base.

- On appelle *identité* et on note *id* la fonction qui associe à tout k-uplet $(n_1, \ldots, n_p)$ le k-uplet $(n_1, \ldots, n_p)$.
- Pour tous entiers $k \geq 0$ et $i \geq 0$, on appelle *fonction constante* la fonction qui à tout k-uplet associe l'entier fixe i. Cette fonction est directement notée par l'entier i.
- Pour des entiers k et i tels que $0 \leq i \leq k$, la *i-ème projection* $p_{k,i}$ est définie par $p_{k,i}(n_1, \ldots, n_k) = n_i$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de k, cette fonction est simplement notée p_i.
- Pour tout entiers $r \geq 0$, la *fonction de duplication* d_r est définie par $d_r(n) = (n, \ldots, n)$ où l'entier n est répété r fois.
- La *fonction successeur* s est définie par $s(n) = n + 1$.

On définit maintenant les schémas de composition et de récurrence.

Soit p un entier et soient $p + 2$ entiers $k, r, k_1, \ldots, k_p$. Soient p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ où chaque fonction f_i pour $1 \leq i \leq p$ est une fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}^{k_i}$ et soit g une fonction de $\mathbb{N}^{k_1+\cdots+k_p}$ dans $\mathbb{N}^r$, alors la *composée* $g(f_1, \ldots, f_n)$ est la fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}^r$ qui à chaque k-uplet $n = (n_1, \ldots, n_k)$ associe le r-uplet $g(f_1(n), \ldots, f_p(n))$.

Soit k et r deux entiers. Soit f une fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}^r$ et soit g une fonction de $\mathbb{N}^{k+r+1}$ dans $\mathbb{N}^r$. La fonction $h = Rec(f, g)$ est la fonction de $\mathbb{N}^{k+1}$ dans $\mathbb{N}^r$ définie récursivement de la manière suivante pour tout entier n et pour tout k-uplet $m = (m_1, \ldots, m_k)$.

$$h(0, m) = f(m),$$
$$h(n + 1, m) = g(n, h(n, m), m)$$

La famille des *fonctions primitives récursives* est la plus petite famille de fonctions qui vérifie les conditions suivantes.

1. Les fonctions constantes, les projections, les fonctions de duplication et la fonction successeur sont primitives récursives.
2. La famille des fonctions primitives récursives est close pour les schémas de composition et de récurrence.

Exemples

On donne ici les exemples classiques de fonctions primitives récursives. Ces fonctions seront utilisées dans la preuve de l'équivalence avec les machines de Turing.

Somme, prédécesseur et différence. La fonction sum définie par $sum(n, m) = n + m$ est primitive récursive. Elle peut en effet être définie de la manière suivante.

$$sum(0, m) = m$$
$$sum(n + 1, m) = s(sum(n, m))$$

La fonction somme est donc égale à $Rec(p_1, s(p_2))$.

La fonction *prédécesseur* p définie par $p(n) = \max(0, n - 1)$ est primitive récursive. Elle peut en effet être définie de la manière suivante.

$$p(0) = 0$$
$$p(n + 1) = n$$

La fonction prédécesseur a pu être définie car le schéma de récurrence permet à la fonction g qui calcule $h(n+1, m)$ d'utiliser la valeur de n. Sinon la fonction prédécesseur est difficile à définir. Une autre possibilité est de la mettre dans les fonctions de base à côté de la fonction successeur.

La fonction sub définie par $sub(n, m) = n - m$ si $n \geq m$ et 0 sinon est aussi primitive récursive. Elle peut en effet être définie de la manière suivante.

$$sub(n, 0) = n$$
$$sub(n, m + 1) = p(sub(n, m))$$

Comme la récurrence porte sur le second argument, la fonction sub est égale à $sub'(p_2, p_1)$ où la fonction sub' est égale à $Rec(p_1, p(p_2))$.

Produit. La fonction $prod$ définie par $prod(n, m) = nm$ est primitive récursive. Elle peut en effet être définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} prod(0, m) &= 0 \\ prod(n + 1, m) &= sum(prod(n, m), m) \end{aligned}$$

La fonction somme est donc égale à $Rec(0, sum(p_2, p_3))$.

Égalité. La fonction $eq0$ définie par $eq0(m) = 1$ si $m = 0$ et $eq0(m) = 0$ sinon est primitive récursive. Elle est égale à $Rec(1, 0)$. La fonction eq définie par $eq(m, n) = 1$ si $m = n$ et $eq(m, n) = 0$ sinon est primitive récursive. Elle est égale $eq0(sum(sub(p_1, p_2), sub(p_2, p_1)))$.

Division et reste. Les fonctions div et mod où $div(n, m)$ et $mod(n, m)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division entière de n par m sont primitives récursives. La fonction div peut être définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} div(0, m) &= 0, \\ div(n + 1, m) &= div(n, m) + eq(m(1 + div(n, m)), n + 1) \end{aligned}$$

La fonction mod peut être alors définie par $mod(n, m) = n - m \cdot div(n, m)$.

Puissance, racine et logarithme. La fonction pow où $pow(n, m) = m^n$ est primitive récursive. Elle peut être définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} pow(0, m) &= 1, \\ pow(n + 1, m) &= prod(pow(n, m), m) \end{aligned}$$

La fonction $root$ où $root(n, m)$ est la racine m-ième de n, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que $k^m \leq n$ est primitive récursive. Elle peut être définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} root(0, m) &= 0, \\ root(n + 1, m) &= root(n, m) + eq(m, pow(1 + root(n, m)), n + 1) \end{aligned}$$

La fonction log où $log(n, m)$ est le logarithme en base m de n, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que $m^k \leq n$ est primitive récursive. Elle peut être définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} log(0, m) &= 0, \\ log(n + 1, m) &= log(n, m) + eq(pow(1 + log(n, m), m), n + 1) \end{aligned}$$

Nombres premiers. On commence par définir la fonction $ndiv(n)$ qui donne le nombre de diviseurs de l'entier n. Cette fonction est définie par $ndiv(n) = pndiv(n, n)$ où la fonction $pndiv(p, n)$ qui donne le nombre de diviseurs de n inférieurs à p est définie de la manière suivante.

$$\begin{aligned} pndiv(0, n) &= 0, \\ pndiv(p + 1, n) &= pndiv(p, n) + eq0(mod(n, p + 1)). \end{aligned}$$

La fonction premier est alors définie par $premier(n) = eq(ndiv(n), 2)$.

Valuation. Montrer que la fonction val où $val(n, m)$ est le plus grand entier k tel que m^k divise n est primitive récursive.

Fonction d'Ackermann

On définit la fonction d'Ackermann A de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned}
&A(k,m,n) = n+1 && \text{si } k = 0,\\
&A(k,m,n) = m && \text{si } k = 1 \text{ et } n = 0,\\
&A(k,m,n) = 0 && \text{si } k = 2 \text{ et } n = 0,\\
&A(k,m,n) = 1 && \text{si } k \neq 1,2 \text{ et } n = 0,\\
&A(k,m,n) = A(k-1,m,A(k,m,n-1)) && \text{sinon.}
\end{aligned}$$

La proposition suivante donne des formules explicites de $A(k, m, n)$ pour les premières valeurs de k.

Proposition 3.66. *Pour tous m et n, on a les égalités*

$$\begin{aligned}
A(1,m,n) &= m+n,\\
A(2,m,n) &= mn = \underbrace{m+\cdots+m}_{n},\\
A(3,m,n) &= m^n = \underbrace{m\times\cdots\times m}_{n},\\
A(4,m,n) &= m^{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}\Big\}n.
\end{aligned}$$

Une version simplifiée de la fonction d'Ackermann peut être obtenue en prenant $m = 2$ dans la définition ci-dessus. On obtient alors une fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. On prend aussi souvent comme définition la définition suivante qui est légèrement différente.

$$\begin{aligned}
A(0,n) &= n+1,\\
A(k+1,0) &= A(k,1),\\
A(k+1,n+1) &= A(k,A(k+1,n)) \quad \text{pour } n \geq 0
\end{aligned}$$

On dit qu'une fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *majore* une fonction f de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ si $f(n_1, \ldots, n_k) \leq g(\max(n_1, \ldots, n_k))$ pour tout k-uplet $(n_1, \ldots, n_k)$ d'entiers.

Proposition 3.67. *Pour toute fonction primitive récursive f de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$, il existe un entier k tel que f est majorée par la fonction $g(n) = A(k, n)$.*

Corollaire 3.68. *La fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.*

Le corollaire précédent donne explicitement une fonction qui n'est pas primitive récursive. Un argument diagonal fournit aussi une fonction qui n'est pas primitive récursive. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une énumération de toutes les fonctions primitives récursives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La fonction g définie par $g(n) = f_n(n) + 1$ n'est pas primitive récursive.

3.9.2 Fonctions récursives

Pour définir les fonctions récursives, on introduit un schéma de minimisation. Soit k et r deux entiers et soit f une fonction de $\mathbb{N}^{k+1}$ dans $\mathbb{N}^r$ éventuellement partielle. On définit alors la fonction $g = Min(f)$ de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante. Pour m dans $\mathbb{N}^k$, $g(m)$ est le plus petit entier n, s'il existe, tel que $f(n, m) = d_r(0)$ (on rappelle que $d_r(0)$ est $(0, \ldots, 0)$ où 0 est répété r fois). Si un tel entier n n'existe pas, $g(m)$ n'est pas défini. Même si la fonction f est totale, la fonction $g = Min(f)$ peut être partielle.

La famille des *fonctions récursives* est la plus petite famille de fonctions qui vérifie les conditions suivantes.

1. Les fonctions primitives récursives sont récursives.
2. La famille des fonctions récursives est close pour les schémas de composition, de récurrence et de minimisation.

L'argument diagonal permet encore d'exhiber une fonction qui n'est récursive. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une énumération de toutes les fonctions récursives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La fonction g définie par $g(n) = f_n(n)+1$ si $f_n(n)$ est défini et $g(n) = 0$ sinon n'est pas récursive.

3.9.3 Équivalence avec les machines de Turing

Nous allons maintenant montrer le théorème suivant qui établit que les notions de calculabilité définies par les fonctions récursives et les machines de Turing sont identiques.

Théorème 3.69. *Une fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}^r$ est récursive si et seulement si elle est calculable par une machine de Turing.*

Pour les machines de Turing, il faut préciser comment sont codés les entiers. Ils peuvent être codés en binaire, en base 10 ou en base 1. Le choix du codage est en réalité sans importance puisqu'il est possible de passer d'un quelconque de ces codages à n'importe quel autre avec une machine de Turing.

Il est facile de se convaincre qu'une fonction récursive est calculable par une machine de Turing. Les fonctions de base comme les fonctions constantes, les projections, les fonctions de duplication sont bien sûr calculables par machine de Turing. Ensuite avec des machines calculant des fonctions f, g, $f_1, \ldots, f_p$, il n'est pas difficile de construire des machines de Turing pour les fonctions $g(f_1, \ldots, f_p)$, $Rec(f, g)$ et $Min(f)$.

Nous allons maintenant montrer qu'une fonction calculable par une machine de Turing est récursive. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing qu'on suppose déterministe et avec un seul état d'acceptation q_+. On suppose que le machine ne se bloque jamais. Soit n le nombre d'états de $\mathcal{M}$ et soit m le cardinal de son alphabet de bande. On suppose que les états de $\mathcal{M}$ sont les entiers $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ et que les symboles de bande sont les entiers $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, le symbole blanc # étant l'entier 0. Pour tout mot $w = a_0 \cdots a_k$ sur l'alphabet de bande, on associe les deux entiers $\alpha(w) = \sum_{i=0}^{k} a_i m^{k-i}$ et $\beta(w) = \sum_{i=0}^{k} a_i m^i$ obtenus en lisant w comme un nombre écrit en base m (avec les unités respectivement à droite et à gauche pour α et β). Les fonctions α et β permettent de considérer les mots de la bande comme des entiers.

Soit w une entrée de $\mathcal{M}$ et soit $C_0 \to \cdots \to C_n$ le calcul de $\mathcal{M}$ sur w. On suppose que chaque configuration C_k est égale à $u_k q_k v_k$. On va montrer que la fonction c définie par

$$c(\beta(w), k) = (\alpha(u_k), q_k, \beta(v_k))$$

est primitive récursive. À partir des transitions de $\mathcal{M}$, on peut définir une fonction t telle que

$$t(q, a) = (p, b, x) \quad \text{si } q, a \to q, b, x \text{ est une transition de } \mathcal{M}.$$

On complète t sur $\mathbb{N}^2$ en posant $t(i, j) = (0, 0, 0)$ si $i \geq n$ ou $j \geq m$. La fonction t est bien sûr primitive récursive. On note t_1, t_2 et t_3 les fonctions $p_1(t)$, $p_2(t)$ et $p_3(t)$ qui donnent respectivement le nouvel état, la symbole à écrire et le déplacement de la tête de lecture. On a alors la définition récursive de c.

- $c(\beta(w), 0) = (0, q_0, \beta(w))$,
- Soit $a_k = mod(\beta(v_k), m)$. Si $t_3(q_k, a_k) = R$,

$$\begin{aligned} \alpha(u_{k+1}) &= m\alpha(u_k) + t_2(q_k, a_k), \\ q_{k+1} &= t_1(q_k, a_k), \\ \beta(v_{k+1}) &= div(\beta(v_k), m), \end{aligned}$$

- Soit $a_k = mod(\beta(v_k), m)$. Si $t_3(q_k, a_k) = L$,

$$\begin{aligned} \alpha(u_{k+1}) &= div(\alpha(u_k), m), \\ q_{k+1} &= t_1(q_k, a_k), \\ \beta(u_{k+1}) &= m(\beta(v_k) - a_k + t_2(q_k, a_k)) + mod(u_k, m) \end{aligned}$$

3.9.4 Thèse de Church

Après avoir introduit les machines de Turing, on a montré que les différentes variantes de ces machines conduisaient toutes à la même notion de calculable. De même, on a établi précédemment que les fonctions récursives sont équivalentes aux machines de Turing. Une fonction est récursive si et seulement si elle est calculable par une machine de Turing. Beaucoup d'autres modèles de calcul comme le λ-calcul ou les machines RAM ont été introduits. Chacun de ces modèles s'est avéré équivalent (ou plus faible) aux machines de Turing. Ceci a conduit Church à postuler que tous les modèles de calcul définissent la même notion de calculable. Ce postulat ne peut bien sûr pas être démontré mais il est universellement admis.

3.10 Compléments

3.10.1 Écritures des entiers dans une base

Pour la preuve du théorème de Presburger (théorème 3.62), on a utilisé des automates qui lisent des entiers en base 2. Il a été construit à l'exemple 3.64 un automate acceptant les multiples de 3 en base 2. De manière plus générale, pour des entiers k, q et r tels que $k \geq 2$ et $q > r \geq 0$, il est possible de construire un automate qui accepte les écritures en base k des entiers congrus à r modulo q.

Soit l'ensemble $Q = \{0, \ldots, q-1\}$ et l'alphabet $B = \{0, \ldots, k-1\}$. Soit l'automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, B, E, \{0\}, \{r\})$ où l'ensemble E des transitions est donné par

$$E = \{p \xrightarrow{d} p' \mid kp + d \equiv p' \mod q\}.$$

On vérifie par récurrence sur l qu'il y a un chemin étiqueté par $d_l \cdots d_0$ de l'état p à l'état p' si l'entier $n = \sum_{i=0}^{l} k^i d_i$ vérifie $k^{l+1}p + n \equiv p' \mod q$. En appliquant ce résultat à $p = 0$ et $p' = r$, on trouve que l'automate accepte bien les écritures $d_l \cdots d_0$ des entiers n congrus à r modulo q.

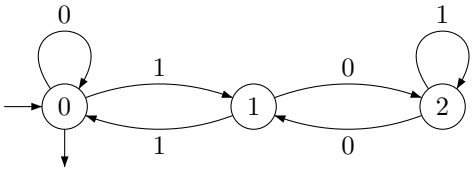


FIG. 3.15 – Automate des multiples de 3 en base 2

Exemple 3.70. Pour $k = 2$, $q = 3$ et $r = 0$, on obtient l'automate de la figure 3.15 qui accepte les écritures binaires des multiples de 3.

Définition 3.71. Soit X un ensemble d'entiers et soit $k \geq 1$ un entier. L'ensemble X est dit *k-rationnel* si l'ensemble des écritures des éléments de X en base k est rationnel.

Le cas $k = 1$ nécessite quelques commentaires. L'ensemble $\mathbb{N}$ s'identifie au monoïde libre 0^* sur un alphabet unaire. En effet l'application de $\mathbb{N}$ dans 0^* qui envoie tout entier n sur le mot 0^n est un isomorphisme de monoïde. Un ensemble d'entiers est donc 1-rationnel si et seulement si il correspond à un ensemble rationnel de mots sur 0^*. Pour cette raison, on parle simplement d'ensemble rationnel d'entiers. Ces ensembles ont une structure très simple que nous allons décrire.

Une *progression arithmétique* est un ensemble de la forme $\{kp+l \mid 0 \leq k \leq q\}$ pour des entiers l et p fixés et pour q égal soit à ∞ soit à un entier fixé. Un ensemble X d'entiers est *ultimement périodique* s'il existe deux entiers $l \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que pour tout entier n supérieur à l, n appartient à X si et seulement si $n + p$ appartient à X. Ces définitions permettent d'énoncer la proposition suivante qui décrit complètement les ensembles rationnels d'entiers.

Proposition 3.72. *Pour un ensemble X d'entiers, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *X est rationnel.*
2. *X est ultimement périodique.*
3. *X est une union finie de progressions arithmétiques.*

Preuve. L'implication $(1 \Rightarrow 2)$ se déduit directement de la forme des automates déterministes sur un alphabet unaire. Pour l'implication $(2 \Rightarrow 3)$, il est facile de décomposer un ensemble ultimement périodique en progressions arithmétiques. Pour l'implication $(3 \Rightarrow 1)$, une progression arithmétique est bien sûr un ensemble rationnel et le résultat découle de la clôture par union des ensembles rationnels. □

Nous allons maintenant étudier les liens entre les notions de k-rationalité pour différentes valeurs de k. La construction d'un automate acceptant les écritures en base k des entiers congrus à r modulo q implique immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.73. *Tout ensemble rationnel d'entiers est k-rationnel pour tout entier k.*

Proposition 3.74. *Pour tout entiers $k \geq 1$ et $n \geq 1$, un ensemble X d'entiers est k-rationnel si et seulement si il est k^n-rationnel.*

Preuve. Les chiffres utilisés en base k^n sont les entiers de 0 à $k^n - 1$ qui s'écrivent avec n chiffres en base k. Cette remarque permet de passer d'un automate pour X en base k à un automate en base k^n. □

La réciproque de la proposition est fausse. L'ensemble $\{2^n \mid n \geq 0\}$ des puissances de 2 n'est pas ultimement périodique. Par contre, l'ensemble de ses écritures en base 2 est le langage rationnel 10^*. Il découle immédiatement de la proposition que si $k^m = l^n$ pour des entiers $m, n \geq 1$, alors X est k-rationnel si et seulement si X est l-rationnel. Cette remarque motive la définition suivante.

Définition 3.75. Deux entiers k et l sont *multiplicativement indépendants* si $k^m \neq l^n$ pour tous les entiers $m, n \geq 1$.

Les entiers k et l sont multiplicativement indépendants si et seulement si le nombre réel $\log k / \log l$ est irrationnel. On a en effet $\log k / \log l = n/m$ dès que $k^m = l^n$. Si k et l sont multiplicativement indépendants, les nombres de la forme $p \log k - q \log l$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et les nombres de la forme k^m / l^n sont denses dans $\mathbb{R}^+$.

Théorème 3.76 (Cobham 1969)**.** *Tout ensemble d'entiers qui est k et l-rationnel pour deux entiers k et l multiplicativement indépendants est rationnel.*

La preuve de ce théorème est (très) difficile.

Un ingrédient essentiel de la preuve est le résultat suivant que nous donnons pour son intérêt intrinsèque. Il faut remarquer qu'un ensemble X d'entiers est ultimement périodique si et seulement si son *mot caractéristique* x défini par $x_i = 1$ si $i \in X$ et $x_i = 0$ sinon est ultimement périodique. Un facteur w d'un mot infini x est *récurrent* s'il a une infinité d'occurrences dans x. Le lemme suivant donne une caractérisation des mots ultimement périodiques.

Lemme 3.77. *Un mot x est ultimement périodique si et seulement si il existe un entier n tel que x ait au plus n facteurs récurrents de longueur n.*

Preuve. Soit $r(n)$ le nombre de facteurs récurrents de x de longueur n. Puisque tout facteur récurrent est le préfixe d'un facteur récurrent plus long, on a l'inégalité $r(n) \leq r(n+1)$ pour tout entier n. Soit n_0 le plus petit entier tel que $r(n_0) = n_0$. Par définition de n_0, on a $r(n_0 - 1) = n_0$. Ceci montre que tout facteur récurrent de longueur $n_0 - 1$ a un unique prolongement en a un facteur récurrent de longueur n_0. Ceci implique immédiatement que x est ultimement périodique. □

Pour un mot infini x, la *fonction de complexité* (en facteurs) de x est la fonction $p_x(n)$ qui donne pour tout entier n le nombre de facteurs de x de longueur n. Le lemme précédent montre que tout mot x tel que $p_x(n) \leq n$ pour au moins un entier n est ultimement périodique. Les mots infinis x tels que $p_x(n) = n + 1$ pour tout entier n sont dits *sturmiens*. Ce sont des mots non ultimement périodiques de complexité minimale. Le mot de Fibonacci déjà considéré à l'exemple 1.20 (p. 17) est sturmien.

3.10.2 Machines de Turing sans écriture sur l'entrée

On s'intéresse dans cette partie aux machines qui n'écrivent pas sur leur entrée. Si la machine a plusieurs bandes, elle peut recopier l'entrée de la première bande sur une autre bande en parcourant l'entrée avec une tête de lecture et en écrivant en même temps sur une autre bande. Si la machine ne possède qu'une seule bande, l'idée intuitive est que la machine ne peut pas copier cette entrée sans la modifier. Pour effectuer la copie, l'unique tête de lecture doit faire des aller-retours entre l'entrée et le reste de la bande. La machine doit d'une façon ou d'une autre marquer là où elle en est dans la copie.

Théorème 3.78. *Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing à une seule bande qui n'écrit jamais sur son entrée, alors le langage $L(\mathcal{M})$ des mots acceptés par $\mathcal{M}$ est rationnel.*

Le théorème précédent énonce que pour une telle machine de Turing, il existe un automate qui accepte les mêmes entrées. Par contre, le passage de la machine de Turing à l'automate n'est pas calculable.

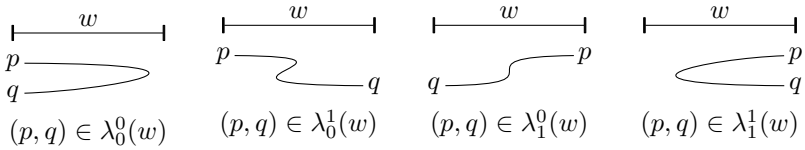


FIG. 3.16 – Définitions de fonctions λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0 et λ_1^1

Preuve. Pour montrer que le langage $L(\mathcal{M})$ est rationnel, on montre qu'il est saturé par une congruence d'indice fini (avec un nombre fini de classes). On introduit quatre fonctions λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0 et $\lambda_1^1 : \Sigma^* \to \mathfrak{P}(Q \times Q)$ qui associent à chaque mot w de Σ^* des ensembles de paires d'etats. L'ensemble $\lambda_0^0(w)$ est défini comme l'ensemble des paires (p, q) d'états de $\mathcal{M}$ telle qu'il existe un calcul de $\mathcal{M}$ de l'état p avec la tête sur la première lettre de w à l'état q avec la tête après la dernière lettre de w qui ne lit que des lettres de w (cf. figure 3.16). Les trois fonctions λ_0^1, λ_1^0 et λ_1^1 sont définies de manière similaire en considérant les chemins qui restent aussi sur w mais qui partent ou arrivent au début ou à la fin de w (cf. figure 3.16).

On définies maintenant la relation $\sim$ sur Σ^* par

$$w \sim w' \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \lambda_0^0(w) = \lambda_0^0(w') \\ \lambda_0^1(w) = \lambda_0^1(w') \\ \lambda_1^0(w) = \lambda_1^0(w') \\ \lambda_1^1(w) = \lambda_1^1(w') \end{cases}$$

On montre successivement les quatre propriétés suivantes de la relation $\sim$.
- La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Le nombre de ses classes est majoré par $2^{4|Q|^2}$.
- La relation $\sim$ est une congruence de monoïde sur Σ^*.
- La relation $\sim$ sature le langage $L(\mathcal{M})$. Ceci signifie que la relation $w \sim w'$ implique l'équivalence $w \in L(\mathcal{M}) \iff w' \in L(\mathcal{M})$.

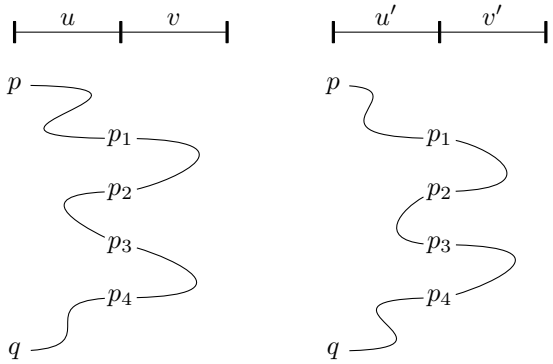


FIG. 3.17 – Égalité $\lambda_0^0(uv) = \lambda_0^0(u'v')$

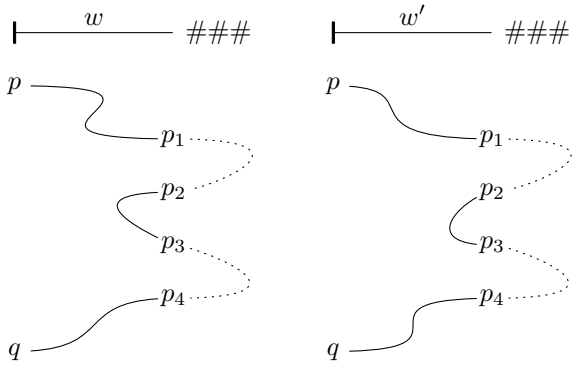


FIG. 3.18 – La relation $\sim$ sature $L(\mathcal{M})$

Par définition, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Puisque chacune des quatre fonctions λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0 et λ_1^1 peut prendre au plus $2^{|Q|^2}$ valeurs différentes, le nombre de classes de $\sim$ est majoré par $2^{4|Q|^2}$. On prouve maintenant que $\sim$ est une congruence de monoïde (cf. définition 1.131 p. 57). Soient u, u', v et v' des mots sur Σ tels que $u \sim u'$ et $v \sim v'$. On montre d'abord l'égalité $\lambda_0^0(uv) = \lambda_0^0(u'v')$. Les trois autres égalités pour λ_0^1, λ_1^0 et λ_1^1 se montrent de manière identique. Un chemin à l'intérieur de uv se décomposent en une suite de chemins à l'intérieur de u ou v (cf. figure 3.17). Comme $u \sim u'$ et $v \sim v'$ les chemins à l'intérieur de u et v peuvent être remplacés par des chemins à l'intérieur de u' et v'. On montre maintenant que la relation $\sim$ sature $L(\mathcal{M})$. Soient w et w' deux mots sur Σ tels que $w \sim w'$. Un calcul sur l'entrée w se décompose en une suite de calculs à l'intérieur de w et hors de w (cf. figure 3.18). Comme $w \sim w'$, les calculs à l'intérieur de w peuvent être remplacés par des calculs à l'intérieur de w' pour obtenir un calcul sur l'entrée w'. On a finalement montré que le langage $L(\mathcal{M})$ est reconnu par le monoïde fini $\Sigma^*/\sim$. □

Le théorème précédent montre que si l'on introduit des automates finis qui peuvent avancer ou reculer d'une position la tête de lecture à chaque transition, ces automates acceptent encore des langages rationnels. De tels automates sont appelés *automates boustrophédons* (2-*way automata* en anglais). Le terme *boustrophédon* est généralement employé pour qualifier les systèmes d'écriture où le sens de lecture des lignes est alternativement de gauche à droite et de droite à gauche.

Chapitre 4

Complexité

4.1 Introduction

4.1.1 Objectifs

Lorsqu'il existe des algorithmes pour résoudre un problème, ceux-ci peuvent se révéler inutilisables dans la pratique parce qu'ils requièrent soit trop de temps soit trop de mémoire même pour des petits exemples. L'objectif de cette partie est d'identifier et de caractériser des problèmes pour lesquels il y a peu d'espoir de trouver des algorithmes efficaces. Il s'agit en quelque sorte d'une approche complémentaire de l'algorithmique dont l'objectif est de développer des algorithmes performants. L'idée est de fournir des arguments pour se convaincre que c'est probablement impossible pour certains problèmes. Un objectif est aussi de classifier les problèmes selon leur complexité en temps ou en espace mémoire mais avec des échelles beaucoup plus grossières qu'en algorithmique. Il est davantage question de distinguer les complexités polynomiale et exponentielle que les complexités linéaire et $n \log n$.

Dans tout ce chapitre, on ne considère naturellement que des problèmes décidables. On suppose implicitement que toutes les machines de Turing considérées s'arrêtent sur toutes leurs entrées.

4.1.2 Définition des complexités

On commence par donner le temps et l'espace utilisés par un calcul. Le temps est le nombre de transitions effectuées et l'espace est le nombre de cellules de la bande qui sont parcourues. On définit ensuite la complexité en temps et en espace d'une entrée puis d'une machine de Turing. C'est à chaque fois le cas le pire qui est pris en compte. Le temps et l'espace nécessaires pour une entrée sont les maxima du temps et de l'espace utilisés par un calcul sur cette entrée. Ensuite, la complexité en temps et en espace d'une machine est la fonction qui associe à chaque entier n les maxima des complexités en temps et en espace des entrées de taille n.

Définition 4.1 (Complexité)**.** Soit une machine de Turing $\mathcal{M}$ (*a priori* non déterministe) et soit $\gamma = q_0 w \to C_1 \cdots \to C_m$ un calcul de $\mathcal{M}$ d'entrée w.

– le *temps* $t_{\mathcal{M}}(\gamma)$ de ce calcul γ est m.

– l'*espace* $s_{\mathcal{M}}(\gamma)$ de ce calcul γ est $\max_{0\leq i\leq m} |C_i|$.

On définit alors la complexité en temps (resp. en espace) pour une entrée w comme la plus grande complexité en temps (resp. en espace) des calculs d'entrée w.

$$t_{\mathcal{M}}(w) = \max_{\gamma} t_{\mathcal{M}}(\gamma) \qquad \text{et} \qquad s_{\mathcal{M}}(w) = \max_{\gamma} s_{\mathcal{M}}(\gamma)$$

On peut alors définir les complexités en temps $t_{\mathcal{M}}$ et en espace $s_{\mathcal{M}}$ de la machine $\mathcal{M}$ par :

$$t_{\mathcal{M}}(n) = \max_{|w|=n} t_{\mathcal{M}}(w) \qquad \text{et} \qquad s_{\mathcal{M}}(n) = \max_{|w|=n} s_{\mathcal{M}}(w).$$

C'est bien sûr plus le comportement asymptotique des fonctions $t_{\mathcal{M}}$ et $s_{\mathcal{M}}$ quand n devient grand qui est intéressant plus que des valeurs particulières de ces deux fonctions.

La définition donnée pour l'espace d'un calcul implique que $s_{\mathcal{M}}(n) \geq n$ puisque la première configuration comprend l'entrée. Cette définition est inappropriée pour l'étude des machines utilisant peu d'espace comme les machines à espace logarithmique. Il faut introduire des machines avec des bandes séparées pour l'entrée et la sortie. L'espace utilisé ne prend pas en compte ces bandes et considère uniquement l'espace de travail de la machine qui est matérialisé par les autres bandes.

Il existe des machines qui fonctionnent en temps sous-linéaire. Le langage $a\Sigma^*$ peut par exemple être décidé en temps constant. La machine doit juste examiner la première lettre de l'entrée pour savoir si celle-ci est la lettre a. Il est cependant vrai que dans la majorité des problèmes intéressants, la machine doit lire entièrement l'entrée. Pour beaucoup de résultats, il est nécessaire de supposer que $t_{\mathcal{M}}(n) \geq n$ mais ce n'est pas une hypothèse restrictive.

Le lemme suivant établit deux inégalités fondamentales entre le temps et l'espace utilisés par une machine de Turing.

Lemme 4.2. *Pour toute machine de Turing $\mathcal{M}$, il existe une constante K telle que*

$$s_{\mathcal{M}}(n) \leq \max(t_{\mathcal{M}}(n), n) \quad \textit{et} \quad t_{\mathcal{M}}(n) \leq 2^{K s_{\mathcal{M}}(n)}.$$

Preuve. Comme à chaque transition de la machine, la tête de lecture se déplace d'au plus une position, la taille de la configuration augmente d'au plus une unité à chaque transition effectuée par la machine. Ceci prouve la première inégalité.

Comme la machine $\mathcal{M}$ n'a pas de calcul infini, aucun calcul ne passe deux fois par la même configuration. Sinon, il existe un cycle dans le graphe des configurations et il existe un calcul infini. Il s'ensuit que la longueur d'un calcul sur une entrée w est bornée par le nombre de configurations possibles. Puisqu'une configuration peut être vue comme un mot sur l'alphabet $Q \cup \Gamma$, on obtient la seconde inégalité ci-dessus où la constante K est égal à $\log_2(1 + |Q| + |\Gamma|)$. □

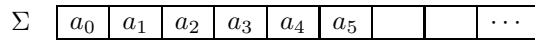
4.2 Complexité en temps

4.2.1 Théorème d'accélération

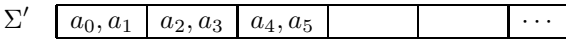
Le théorème suivant énonce qu'on peut toujours accélérer une machine d'un facteur constant à condition que le temps soit suffisant pour lire l'entrée.

Théorème 4.3 (d'accélération)**.** *Soit $k \geq 0$ un entier et soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing. Si $n = O(t_{\mathcal{M}}(n))$, alors il existe une machine de Turing $\mathcal{M}'$, équivalente à $\mathcal{M}$ telle que $t_{\mathcal{M}'}(n) \leq t_{\mathcal{M}}(n)/k$*

Preuve.



On opère la transformation $\Sigma' = \Sigma \times \Sigma$ (ou, plus généralement, $\Sigma' = \Sigma^k$) :



□

Ainsi, lorsqu'on étudie la complexité d'un problème, les constantes multiplicatives ne sont pas significatives. Les complexités des machines de Turing et des problèmes sont exprimées sous la forme $O(f)$.

4.2.2 Changements de modèles

On s'intéresse maintenant à l'incidence d'un changement de modèle sur la complexité. On reprend les différentes variantes de Turing qui ont été introduites au chapitre précédent. Pour chacune de ces variantes, on étudie comment varie la complexité en temps lors d'une traduction d'une machine de la variante à une machine classique.

- **machine à bande bi-infinie** :
  Chaque transition de la machine bi-infinie est simulée par exactement une transition de la machine à bande infinie. Sur chaque entrée, le nombre de transitions effectuées est le même pour les deux machines. La transformation n'induit donc aucun changement de la complexité en temps.
- **machine à plusieurs bandes** :
  Dans l'algorithme de transformation, on fait des allers-retours pour reconstituer le k-uplet représentant l'état de la machine à k bandes. Au pire, le parcours fait pour simuler la i-ième étape est de longueur $s_{\mathcal{M}}(n) \leq t_{\mathcal{M}}(n)$. Au final, on a donc :
  $$t_{\mathcal{M}'}(n) = O(t^2_{\mathcal{M}}(n))$$
- **machines non déterministes** :
  Soit $\mathcal{M}$ une machine non déterministe, et $\mathcal{M}'$ une machine déterministe qui la simule en essayant successivement tous ses calculs à l'aide d'un arbre. Dans l'arbre des calculs, on ne se préoccupe pas du problème de l'arrêt, par hypothèse résolu. On peut donc se contenter de parcourir l'arbre des calculs en profondeur d'abord.
  Le nombre de calculs possibles pour $\mathcal{M}'$, pour une entrée de taille n est borné par $k^{t_{\mathcal{M}}(n)}$, où k est le nombre maximal de transitions qui peuvent être effectuées à partir d'une configuration quelconque. L'entier k est le cardinal maximal des ensembles $\delta(p, a) = \{(q, b, x) \mid p, a \to q, b, x \in E\}$ pour tous $p \in Q$ et $a \in \Gamma$. On en tire, si $t_{\mathcal{M}}(n) \geq n$:
  $$t_{\mathcal{M}'}(n) = O(t_{\mathcal{M}}(n)k^{t_{\mathcal{M}}(n)}) = 2^{O(t_{\mathcal{M}}(n))}$$
  Il faut noter le changement radical de complexité induit par cette transformation.

4.2.3 Classes de complexité en temps

On introduit maintenant des classes de problèmes déterminées par le temps nécessaire à leur résolution. On définit ensuite la classe des problèmes qui peuvent être résolus en temps polynomial ou exponentiel par des machines déterministes ou non déterministes. Ces quatre classes sont les classes fondamentales de la complexité en temps.

Définition 4.4. Pour une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on définit les classes
- TIME($f(n)$) est l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing *déterministe* (à plusieurs bandes) en temps $O(f(n))$.
- NTIME($f(n)$) est l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing *non déterministe* (à plusieurs bandes) en temps $O(f(n))$.

On définit alors les classes de complexité suivantes.

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k\geq 0} \textsc{Time}(n^k) \qquad \mathrm{NP} = \bigcup_{k\geq 0} \textsc{NTime}(n^k)$$
$$\textsc{ExpTime} = \bigcup_{k\geq 0} \textsc{Time}(2^{n^k}) \qquad \textsc{NExpTime} = \bigcup_{k\geq 0} \textsc{NTime}(2^{n^k})$$

Il existe bien sûr beaucoup d'autres classes de complexité. Par exemple la classe k-EXPTIME est la classe des problèmes qui peuvent être résolus par une machine déterministe dont le temps de calcul est borné par une tour d'exponentielles de hauteur k.

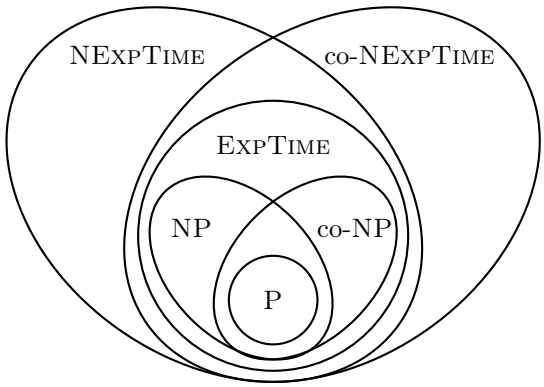


FIG. 4.1 – Inclusions des classes P, NP, ... et co-NEXPTIME

Proposition 4.5. *Les classes de complexité introduites vérifient les inclusions suivantes.*

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \textsc{ExpTime} \subseteq \textsc{NExpTime}.$$

Les inclusions entre ces classes et leurs classes duales sont représentées à la figure 4.1.

Preuve. Les deux inclusions $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ et $\textsc{ExpTime} \subseteq \textsc{NExpTime}$ découlent directement des définitions. La dernière inclusion $\mathrm{NP} \subseteq \textsc{ExpTime}$ se déduit du lemme 4.2. □

Pour chaque classe C, on note classe co-C la classe *duale* qui contient les complémentaires des problèmes dans C. Si les classes C et co-C sont égales, la classe C est dite *autoduale*. Toutes les classes de complexité définies par des machines déterministes comme P et ExpTime sont bien sûr autoduales. Le théorème d'Immerman et Szelepcsényi établit que toutes les classes de complexité en espace sont également autoduales.

Le théorème de hiérarchie permet de montrer que l'inclusion $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{ExpTime}$ est stricte. Pour les autres inclusions, rien n'est connu même si la thèse généralement admise est qu'elles sont toutes strictes.

Savoir si l'inclusion $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ est stricte ou non, c'est-à-dire si $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ est un des problèmes majeurs de l'informatique théorique et même des mathématiques.

En 1900, le mathématicien D. Hilbert a proposé 23 problèmes à résoudre pour le siècle qui commençait. Actuellement, certains sont résolus mais d'autres restent encore ouverts. En 2000, l'institut Clay pour les mathématiques a offert un million de dollars pour la résolution de chaque problème d'une liste de sept problèmes remarquables. La question se savoir si $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ est le premier problème de cette liste. Pour l'instant, seule la conjecture de Poincaré a été résolue.

L'inclusion $\mathrm{ExpTime} \subseteq \mathrm{NExpTime}$ est semblable à l'inclusion $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ puisqu'elle compare les machines déterministes avec les machines non déterministes pour le même temps. Les deux inclusions sont en fait reliées. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 4.6. Montrer que si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, alors $\mathrm{ExpTime} = \mathrm{NExpTime}$.

Solution. L'hypothèse $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ signifie que toute machine en temps polynomial est équivalente à une machine déterministe en temps polynomial. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing non déterministe en temps exponentiel. On suppose que $t_{\mathcal{M}}(n) = O(2^{n^k})$ pour un entier k. À toute entrée w, de la machine $\mathcal{M}$, on associe le mot $\hat{w} = w\$^m$ où \$ est nouveau symbole et m est égal à $2^{|w|^k}$. Le mot $\hat{w}$ peut être calculé à partir de w par une machine déterministe en temps exponentiel. On introduit la machine $\mathcal{M}'$ obtenue en modifiant la machine $\mathcal{M}$ pour qu'elle considère le symbole \$ comme le symbole blanc #. Sur chaque entrée $\hat{w}$, la machine $\mathcal{M}'$ se comporte comme la machine $\mathcal{M}$ sur l'entrée w et donne donc le même résultat. Par contre, le temps de calcul de $\mathcal{M}'$ est linéaire en la taille de $\hat{w}$. D'après l'hypothèse, la machine $\mathcal{M}'$ est donc équivalente à une machine déterministe $\mathcal{M}''$ en temps polynomial. On construit alors une dernière machine déterministe $\mathcal{M}'''$ en composant la machine qui calcule $\hat{w}$ à partir de w avec la machine $\mathcal{M}''$. Cette machine déterministe est en temps exponentiel et elle équivalente à la machine $\mathcal{M}'$. Ceci prouve l'égalité $\mathrm{ExpTime} = \mathrm{NExpTime}$.

Exemple 4.7. Quelques exemples de problèmes de la classe P.

1. Problème d'accessibilité (Path)
   Une instance est un triplet (G, s, t) où $G = (V, E)$ est un graphe orienté et s et t deux sommets de G. L'instance est positive s'il existe un chemin de s à t dans G. Un tel chemin peut être trouvé par un parcours en largeur du graphe, et donc en temps linéaire en la taille du graphe (nombre d'arêtes). C'est donc un problème polynomial. Ce problème est en fait dans la classe NL des problèmes résolubles en espace logarithmique par une machine non déterministe (cf. exemple 4.34).
2. Langages algébriques

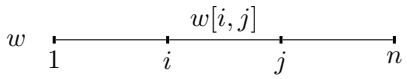


FIG. 4.2 – facteur $w[i,j]$ de w

On présente ici l'algorithme de Cocke-Kasami-Younger pour décider en temps cubique si un mot est engendré par une grammaire. On suppose fixé un langage algébrique L donné par une grammaire G qu'on peut supposer en forme normale quadratique grâce à la proposition 2.21. Une instance est un mot w et cette instance est positive si $w \in L$. Ce problème peut être résolu en temps cubique par un algorithme de programmation dynamique. Si w est le mot $a_1 \cdots a_n$, on note $w[i,j]$ le facteur $a_i \cdots a_j$ de w (cf. figure 4.2). Pour tous les entiers $1 \leq i \leq j \leq n$, on calcule l'ensemble $E_{i,j}$ des variables S telles que $w[i,j] \in L_G(S)$. Les ensembles $E_{i,j}$ sont calculés par récurrence sur la différence $j - i$. Si $i = j$, le facteur $w[i,i] = a_i$ appartient à $L_G(S)$ si et seulement si G contient une règle $S \to a_i$. Les ensembles $E_{i,i}$ sont donc facilement calculés. Pour $j - i \geq 1$, le facteur $w[i,j]$ appartient à $L_G(S)$ si et seulement si il existe une règle $S \to S_1 S_2$ de G et un entier $i \leq k < j$ tels que $w[i,k] \in L_G(S_1)$ et $w[k+1,j] \in L_G(S_2)$. L'ensemble $E_{i,j}$ peut donc être calculé à partir des ensembles $E_{i,k}$ et $E_{k+1,j}$. Comme le temps pour calculer chaque $E_{i,j}$ est proportionnel à la différence $j - i$, le temps global de l'algorithme est cubique. Il faut remarquer que cette analyse ne prend pas en compte la taille de la grammaire car celle-ci est supposée fixe. Cette taille est intégrée à la constante.

Exemple 4.8. Quelques exemples classiques de problèmes de la classe NP.

1. Chemin hamiltonien (HAM-PATH)
   Le problème du chemin hamiltonien est de savoir si un graphe G donné contient un chemin hamiltonien de s à t pour deux sommets s et t également donnés. Une instance est donc un triplet (G, s, t) et elle est positive s'il existe un chemin hamiltonien de s à t. Ce problème peut être posé pour un graphe orienté ou pour un graphe non orienté mais ces deux problèmes se ramènent aisément de l'un à l'autre.
2. Satisfiabilité d'une formule (SAT)
   On considère des formules du calcul propositionnel. Le problème est de savoir est si une formule est satisfiable, c'est-à-dire de savoir pour une formule φ donnée s'il existe une affectation donnant la valeur 1 à φ. Un exemple d'une instance de SAT est la formule suivante.

$$\varphi = ((\neg x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_5))) \vee (x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$$

Les deux algorithmes donnés pour les problème SAT et HAM-PATH suivent le même schéma. Ils commencent pas choisir de façon non déterministe une éventuelle solution puis ils vérifient en temps polynomial qu'il sagir effectivement d'une solution. Ce schéma se généralise à tous les problèmes de la classe NP. Les problèmes de la classe P sont ceux pour lesquels l'existence d'une solution peut être déterminée en temps polynomial. Au contraire, les problèmes de classe NP sont ceux pour lesquels une solution peut être vérifiée en temps polynomial. La défintion et la proposition suivantes rendent rigoureuse cette intuition. On commence par la définition d'un vérificateur.

Définition 4.9 (Vérificateur)**.** Un *vérificateur* en temps polynomial pour un langage L est une machine déterministe $\mathcal{V}$ qui accepte des entrées de la forme $\langle w, c\rangle$ en temps polynomial en $|w|$ telle que $L = \{w \mid \exists c \ \langle w, c\rangle \in L(\mathcal{V})\}$.

L'élément c est en quelque sorte la *preuve* que w appartient bien à L. Le vérificateur se contente de vérifier que c est effectivement une preuve.

Il est important que la machine $\mathcal{V}$ soit en temps polynomial en la taille de w et non en la taille de la paire $\langle w, c\rangle$. Cette définition impose que c peut être choisi de taille polynomiale en w. En effet, la machine $\mathcal{V}$ n'utilise qu'une partie de c de taille polynomiale en w. La partie non utilisée peut être supprimée.

Proposition 4.10 (Équivalence vérificateur et NP)**.** *Un langage L est dans la classe* NP *si et seulement si il existe un vérificateur polynomial pour L.*

Preuve. On montre que L est accepté par une machine (non déterministe) en temps polynomial si et seulement si il existe un vérificateur en temps polynomial pour L.

Soit $\mathcal{M}$ une machine acceptant L en temps polynomial. Le vérificateur $\mathcal{V}$ prend en entrée une suite c de transitions (de taille polynomiale) faites par $\mathcal{M}$ en calculant sur l'entrée w. Le vérificateur $\mathcal{V}$ simule alors $\mathcal{M}$ sur w pour vérifier que $w \in L(\mathcal{M})$. Ceci se fait en suivant c et donc en temps polynomial. Dans ce cas, la preuve que w appartient à L est le calcul acceptant de $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{V}$ un vérificateur en temps polynomial pour L. Pour chaque entrée w, la machine $\mathcal{M}$ *choisit* c de façon non déterministe c de taille polynomiale en $|w|$. Elle simule ensuite le calcul de $\mathcal{V}$ sur $\langle w, c\rangle$. Puisque $\mathcal{V}$ calcule en temps polynomial, le calcul de $\mathcal{M}$ est aussi polynomial. Elle accepte finalement l'entrée w si $\mathcal{V}$ accepte $\langle w, c\rangle$. □

La proposition précédente a été énoncée pour le temps polynomial mais le résultat s'étend à d'autres classes de complexité. Un langage L est par exemple dans la classe NExpTime si et seulement si il existe un vérificateur en temps exponentiel pour L. La notion de vérificateur est parfois utilisée pour définir les classes de complexité en temps non déterministe comme NP et NExpTime.

Exemple 4.11. On revient sur les deux problèmes donnés à l'exemple 4.8

- Étant donné un graphe G, deux sommets s et t de G et un chemin γ dans G, il est facile de vérifier en temps linéaire que le chemin γ est hamiltonien.
- Étant donné une formule φ du calcul propositionnel et une affectation des variables, il est facile de calculer en temps linéaire la valeur de la formule induite par l'affectation et de vérifier que la formule est satisfiable.

Exercice 4.12. Montrer que si le langage L est dans la classe P (resp. NP), alors le langage L^* est aussi dans la classe P (resp. NP).

Solution. La machine $\mathcal{M}'$ construite à la solution de l'exercice 3.38 fonctionne encore en temps polynomial si la machine $\mathcal{M}$ fonctionne en temps polynomial. Ce raisonnement donne le résultat pour la classe NP. Par contre, l'argument n'est plus valable pour la classe P car la machine $\mathcal{M}'$ est non déterministe même si la machine $\mathcal{M}$ est déterministe. L'idée est alors d'utiliser la programmation dynamique. On calcule pour chaque paire (i, j) d'entiers si le facteur $w[i, j]$ appartient à L en simulant la machine $\mathcal{M}$. Ensuite, on procède comme dans l'algorithme de Cocke-Kasami-Younger pour calculer si l'entrée appartient à L^*.

4.2.4 NP-complétude

Il a été dit dans l'introduction de ce chapitre que l'objectif de la théorie de la complexité est d'étudier la complexité intrinsèque des problèmes. Il est pour l'instant impossible de montrer qu'au moins un problème de la classe NP n'est pas dans P. La NP-complétude comble en partie cette lacune. À défaut de prouver qu'un problème de NP n'est pas dans la classe P, on prouve qu'il est NP-complet. Si l'hypothèse P $\neq$ NP est juste, ce problème n'est effectivement pas dans P.

La notion de complétude est présente en mathématiques. En théorie descriptive des ensembles, un ensemble est complet s'il est générique dans sa classe. Ceci signifie grossièrement que tous les autres ensembles de sa classe peuvent être retrouvés à partir de lui. La notion de complétude introduite ici est similaire. Un problème est NP-complet si une solution à ce problème permet de résoudre tous les autres problèmes de NP.

Réduction polynomiale

La notion de réduction est essentielle. Elle est d'ailleurs omniprésente en mathématiques. Pour résoudre un problème, il est fréquent de le ramener à un autre problème déjà résolu.

Il existe en fait de nombreux types de réductions. De manière générale, elles permettent de comparer les problèmes d'une classe et ainsi de les classer en fonction de leur complexité. On introduit maintenant les réductions polynomiales qui sont adaptées à l'étude de la classe NP. Ces réductions conviennent aussi à la classe de complexité spatiale PSpace (cf. section 4.3.5). Par contre, elles ne conviennent pas à la classe des problèmes en espace logarithmique pour laquelle il faut justement considérer les réductions en espace logarithmique.

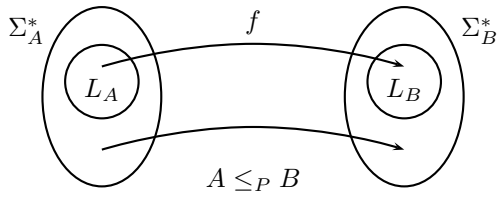


FIG. 4.3 – Réduction polynomiale

Définition 4.13 (Réduction polynomiale)**.** Soient A et B, des problèmes codés respectivement par L_A et L_B sur les alphabets Σ_A et Σ_B. Une *réduction polynomiale* de A à B est une fonction $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$ calculable en temps polynomial par une machine de Turing déterministe telle que :

$$w \in L_A \iff f(w) \in L_B.$$

L'existence d'une réduction polynomiale de A à B se note $A \leq_P B$.

L'idée intuitive est qu'un problème A se réduit à un problème B si le problème B est *plus compliqué* que le problème A puisqu'on peut ramener la résolution de A à la résolution de B. Il est facile de vérifier que la relation $\leq_P$ est transitive et réflexive (c'est un quasi-ordre).

La proposition suivante découle directement des définitions. Il suffit de composer la machine de Turing qui calcule la réduction avec la machine de Turing qui décide B en temps polynomial pour obtenir une machine qui décide A en temps polynomial.

Proposition 4.14. *Si $A \leq_P B$ et $B \in \mathrm{P}$, alors $A \in \mathrm{P}$.*

Complétude

Définition 4.15 (NP-difficile et NP-complet)**.** Un problème A est dit NP-*difficile* si tout problème B de NP se réduit à A, *i.e.* $B \leq_P A$. Si de plus il est dans la classe NP, il est dit NP-*complet*.

L'idée intuitive est que les problèmes NP-complets sont les plus difficiles des problèmes NP puisque tous les problème de NP se ramènent à ces problèmes. Pour montrer qu'un problème est NP-difficile et en particulier NP-complet, on utilise généralement la proposition suivante qui découle directement des définitions.

Proposition 4.16. *Si A est* NP-*difficile et si $A \leq_P B$, alors B est* NP-*difficile.*

Pour utiliser la proposition précédente afin de montrer qu'un problème est NP-complet, il faut déjà disposer d'un problème NP-complet. Le théorème de Cook et Levin en fournit deux.

4.2.5 NP-complétude de Sat et 3Sat

La notion de NP-complétude est pertinente parce qu'il existe des problèmes NP-complets. C'est un résultat étonnant car on aurait pu imaginer une hiérarchie infinie de problèmes dans la classe NP. Les premiers problèmes NP-complets à avoir été trouvés sont les problèmes Sat et 3Sat. Le problème 3Sat est souvent très utile pour prouver que d'autres problèmes sont NP-complets car il se prête bien à des réduction.

Le problème Sat est le problème de la satisfiabilité d'une formule du calcul propositionnel (cf. exemples 4.8 et 4.11). Le problème 3Sat est le problème de la satisfiabilité d'une formule du calcul propositionnel où cette formule est en forme normale conjonctive avec au plus trois littéraux par clause. Une instance de 3Sat est donc une conjonction $c_1 \wedge \cdots \wedge c_k$ de k clauses où chaque clause c_i est une disjonction $l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3}$ de trois littéraux qui sont chacun soit une variable x_k soit la négation $\bar{x}_k$ d'une variable. La formule φ ci-dessous est un exemple d'une telle formule sur les variables x, y et z.

$$\varphi = (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$$

Le théorème suivant montre que la forme de la formule ne change rien à la complexité de la satisfiabilité puisque les deux problèmes sont NP-complets.

Théorème 4.17 (Cook-Levin 1971)**.** *Les deux problèmes* Sat *et* 3Sat *sont* NP-*complets.*

La preuve du théorème se fait par deux réductions successives. Une première réduction polynomiale de n'importe quel problème de NP au problème Sat est donnée. C'est le cœur même de la preuve. Ensuite une seconde réduction polynomiale de Sat à 3Sat est explicitée.

NP-Complétude de SAT

On commence par donner une réduction de n'importe quel problème de NP à SAT. Soit A un problème de NP qui est décidé par une machine $\mathcal{M}$ machine non déterministe en temps polynomial. Pour toute entrée w de $\mathcal{M}$, on montre qu'il existe une formule φ_w de taille polynomiale en $|w|$ telle que φ_w est satisfiable si et seulement si w est acceptée par $\mathcal{M}$.

On note $n = |w|$ la taille de l'entrée w. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{M}$ décide A en temps n^k pour un entier k. Quitte à modifier légèrement la machine $\mathcal{M}$, on suppose que tout calcul acceptant sur w est de longueur exactement n^k.

Comme la machine $\mathcal{M}$ fonctionne en temps n^k, elle utilise au plus n^k cellules. Les configurations sont de longueur au plus n^k, qu'on supposera égale à n^k quitte à modifier l'écriture des configurations.

Ces configurations sont écrites les unes sous les autres pour obtenir le tableau de symboles éléments de l'alphabet $A = \Gamma \cup Q$ comme ci-dessous. 4.1.

Conf.	0	1	2	3	...	n^k
$C_0 =$	q_0	w_1	w_2	w_3	...	#
$C_1 =$	w'_1	q_1	w_2	w_3	...	#
$C_2 =$	w'_1	w'_2	q_2	w_3	...	#
$C_3 =$	...	...	...	...	...	#
$\vdots$						$\vdots$
$C_{n^k} =$	...	...	...	...	...	...

TAB. 4.1 – Tableau formé par les configurations

On cherche à écrire φ_w qui code l'existence d'un tel tableau formé par les configurations successives d'un calcul acceptant sur w.

Pour chaque paire (i, j) telle que $0 \leq i, j \leq n^k$ et pour chaque symbole a de A, soit $x_{i,j,a}$ une variable qui code le fait que la case (i, j) contienne ou non le symbole a. Le nombre de ces variables est $|A|n^{2k+2}$ qui est polynomial en n. La formule φ_w est écrite en utilisant les variables $x_{i,j,a}$.

La formule φ_w se décompose en une conjonction $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ où chacune des quatre formules φ_0, φ_1, φ_2 et φ_3 code un des aspects de l'existence d'un chemin acceptant. Soit φ_0 la formule codant le fait que chaque cellule contient un unique symbole de A, φ_1 celle codant que la première ligne du tableau est bien $q_0 w$, φ_2 celle codant le fait que chaque ligne est obtenue en appliquant une transition de $\mathcal{M}$ et φ_3 celle codant que le calcul est bien acceptant. La formule φ_w est alors égale à la conjonction $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$. Il reste à expliciter les quatre formules φ_0, φ_1, φ_2 et φ_3.

La formule φ_0 est la conjonction d'une formule pour chaque paire (i, j). Cette dernière garantit qu'au moins une des variables $x_{i,j,a}$ a la valeur 1 pour un symbole a de A mais que deux variables $x_{i,j,a}$ et $x_{i,j,b}$ pour $a \neq b$ ne peuvent

avoir la valeur 1 simultanément. La formule φ_0 s'écrit de la façon suivante

$$\varphi_0 = \bigwedge_{0\leq i,j\leq n^k} \left[\left(\bigvee_{a\in A} x_{i,j,a} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{a,a'\in A \\ a\neq a'}} (\neg x_{i,j,a} \vee \neg x_{i,j,a'}) \right) \right]$$

La formule φ_1 s'écrit directement de la façon suivante.

$$\varphi_1 = x_{0,0,q_0} \wedge x_{0,1,w_1} \wedge \cdots \wedge x_{0,n,w_n} \wedge x_{0,n+1,\#} \wedge \cdots \wedge x_{0,n^k,\#}.$$

La formule φ_3 assure qu'au moins une des cases de la dernière ligne du tableau contient un état final. Elle s'écrit simplement de la façon suivante.

$$\varphi_3 = \bigvee_{q\in F} \left(\bigvee_{0\leq j\leq n^k} x_{n^k,j,q} \right)$$

La formule φ_2 est un peu plus délicate à écrire. Il faut remarquer que le contenu d'une case (i,j) dépend uniquement des contenus des trois cases au-dessus $(i-1,j-1)$, $(i-1,j)$ et $(i-1,j+1)$ et de la transition qui a été effectuée par la machine pour passer de la configuration C_{i-1} à la configuration C_i. En fait, il est seulement nécessaire de connaître la transition effectuée lorsqu'une des trois cases au-dessus contient l'état de la configuration C_{i-1}. Si les trois symboles contenus dans les trois cases au-dessus sont des symboles de bande, alors le symbole de la case (i,j) est identique au symbole de la case $(i-1,j)$. Ces remarques impliquent qu'il est possible de vérifier que la ligne i est bien obtenue à partir de la ligne $i-1$ uniquement en regardant les contenus des fenêtres de taille 2×3. La machine $\mathcal{M}$ étant fixée, on considère tous les contenus possibles des fenêtres de taille 2×3. Le nombre de ces contenus possibles ne dépend que de l'alphabet et des transitions de la machine. C'est donc un nombre fixe qui ne dépend pas de n. Le fait que six cases du tableau correspondent s'écrit comme une conjonction de six variables $x_{i,j,a}$. Le fait que toutes les parties de six cases du tableaux correspondent à un des contenus possibles des fenêtres s'exprime par la conjonction pour $0\leq i,j\leq n^k$ d'une disjonction sur les différents contenus. Ceci est une formule de taille polynomiale en n.

Réduction de Sat à 3Sat

On montre maintenant que le problème Sat se réduit polynomialement au problème 3Sat. Pour toute formule φ, il existe une formule φ' en forme normale conjonctive avec trois littéraux par clause et calculable en temps polynomial telle que φ est satisfiable si et seulement si φ' est satisfiable.

On considère l'*arbre syntaxique* de la formule φ. Les nœuds internes de cet arbre sont étiquetés par les opérateurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ et les feuilles par les variables. L'arbre syntaxique de la formule

$$\varphi = ((\bar{x}_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_5))) \vee (x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3)$$

est représenté à la figure 4.4.

On associe à chaque feuille de l'arbre la variable qui l'étiquette. On associe ensuite une nouvelle variable à chaque nœud interne de l'arbre. Ainsi une

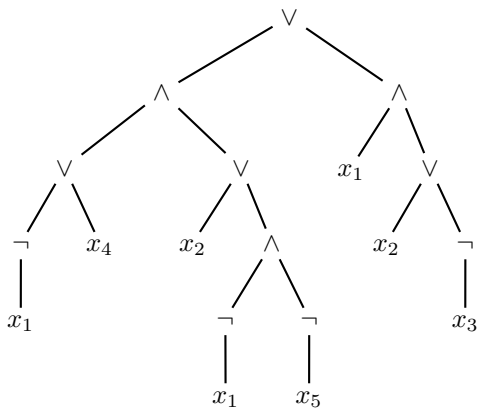


FIG. 4.4 – Arbre syntaxique de φ

variable est associée à chaque nœud que celui-ci soit un nœud interne ou une feuille. Suivant qu'un nœud interne est étiqueté par l'opérateur $\neg$, $\wedge$ ou $\vee$, on lui associe l'égalité $x_i = \neg x_j$, $x_i = x_j \wedge x_k$ ou $x_i = x_j \vee x_k$ où x_i est la variable correspondant à ce nœud et x_j et x_k les variables correspondants à ses fils. On considère la formule φ' qui est la conjonction des égalités associées à tous les nœuds internes et de la clause x_r où x_r est la variable introduite pour la racine.

Ensuite, on remplace chaque égalité par une conjonction de clauses. On a en effet les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} x = \bar{y} &\equiv (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \\ x = (y \wedge z) &\equiv (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \\ x = (y \vee z) &\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

qui permettent de remplacer chacune des égalités de φ' par une conjonction de deux ou trois clauses. Comme la taille de l'arbre est proportionnel à la taille de φ, la taille de φ' est également proportionnel à celle de φ.

Exercice 4.18. Montrer que les classes NP et co-NP sont égales si et seulement si il existe un problème NP-complet dont le complémentaire est aussi dans NP.

Solution. Si les classes NP et co-NP sont égales, le complémentaire de n'importe quel problème de NP est encore NP par définition de la classe co-NP.

Supposons que le problème A est NP-complet et que son complémentaire est aussi dans NP. Soit B un problème de NP qui se réduit donc en temps polynomial à A. La même réduction réduit le complémentaire de B au complémentaire de A. Comme le complémentaire de A est dans NP, le complémentaire de B l'est aussi. Ceci montre que tout problème dans co-NP est aussi dans NP. Par symétrie, l'inclusion est aussi vraie et les deux classes sont égales.

4.2.6 Exemples de problèmes NP-complets

Dans cette partie, on donne quelques exemples classiques de problèmes qui sont NP-complets. On commence par trois problèmes sur les graphes, le chemin hamiltonien, la clique et la couverture de sommets et on termine par le problème

de la somme d'entiers. Dans chacun des cas, la NP-complétude est prouvée en donnant une réduction polynomiale de 3SAT au problème considéré.

Chemin hamiltonien

On rappelle qu'un chemin hamiltonien d'un graphe G est un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet de G. Le problème du chemin hamiltonien est de savoir si un graphe G donné contient un chemin hamiltonien de s à t pour deux sommets s et t également donnés.

Proposition 4.19. *Le problème du chemin hamiltonien est* NP*-complet.*

Preuve. Cette réduction est écrite pour le problème du chemin hamiltonien sur un graphe orienté. On trouvera la réduction de HAM-PATH sur les graphes orientés à HAM-PATH sur les graphes non orientés en [HU79, p. 336]. □

Le problème HAM-PATH est dans NP. Un algorithme pour résoudre ce problème commence par choisir de façon non déterministe une suite $u_1, \ldots, u_n$ de sommets puis vérifie ensuite qu'il s'agit bien d'un chemin hamiltonien de s à t.

Pour montrer que le problème HAM-PATH est NP-difficile, on va réduire polynomialement le problème 3SAT à HAM-PATH. À chaque instance de 3SAT, on associe une instance de HAM-PATH qui a une solution si et seulement si l'instance de 3SAT en a une. Soit φ une instance de 3SAT, c'est à dire une formule en forme conjonctive telle que chaque clause de φ contienne trois littéraux. On note k le nombre de clauses de φ et m le nombre de variables apparaissant dans φ. Si une variable apparaît positivement et négativement dans la même clause, cette clause est toujours satisfaite. On suppose dans la suite que chaque variable apparaît au plus une fois dans chaque clause.

À cette formule φ, on associe un graphe orienté ayant $2km+2m+k$ sommets. À chaque clause est associé un seul sommet. À chaque variable est associée une partie du graphe appellée *gadget*. Pour chaque variable, ce graphe possède $2k+2$ sommets et il est identique à celui représenté sur la figure 4.5.

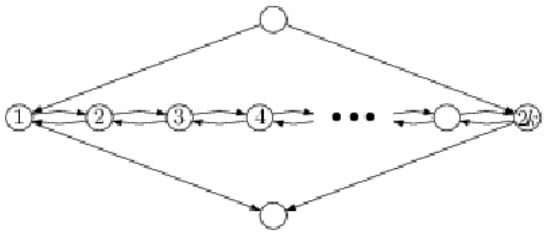


FIG. 4.5 – *gadget* associé à une variable

Le graphe global est obtenu en mettant bout à bout les gadgets pour obtenir une sorte de chapelet et en ajoutant les sommets des clauses (cf. figure 4.6). Le gadget d'une variable est relié au sommet de chaque clause où elle apparaît. Si la variable apparaît positivement dans la $(j-i)^{\text{e}}$clause, il y a une arête du sommet $2j-1$ du gadget vers le sommet de la clause et une arête du sommet de

la clause vers le sommet $2j$ du gadget. Si la variable apparaît négativement dans la $(j-i)^{\text{e}}$clause, il y a une arête du sommet $2j$ du gadget vers le sommet de la clause et une arête du sommet de la clause vers le sommet $2j-1$ du gadget.

Le sommet s est le premier sommet du gadget de la première variable et le sommet s est le dernier sommet du gadget de la dernière variable. On vérifie qu'il y a un chemin hamiltonien dans la graphe construit si et seulement si la formule φ est satisfiable.

La construction est illustrée sur la formule $\varphi = (x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$. Les entiers k et m sont égaux à 3 et à 4 et on obtient le graphe représenté à la figure 4.6.

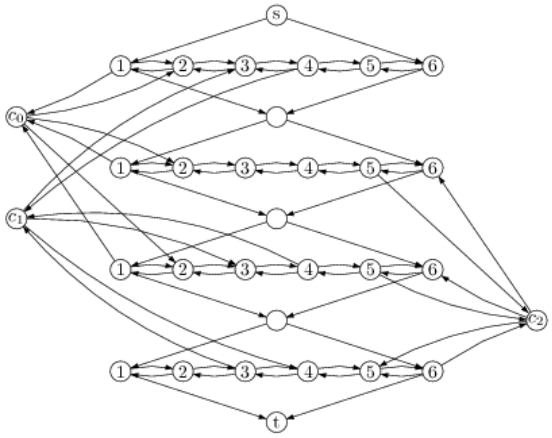


FIG. 4.6 – graphe associé à la formule φ

Clique

On commence par la définition d'une clique dans un graphe. Une clique de taille k est un sous-graphe complet de taille k.

Définition 4.20 (Clique)**.** Soit G un graphe. Une clique de taille k de G est un ensemble de k sommets parmi lesquels deux sommets distincts sont toujours reliés par une arrête.

Proposition 4.21. *Le problème de savoir si un graphe a une clique de taille k est* NP*-complet.*

Preuve de CLIQUE $\in$ NP. Un algorithme non déterministe pour décider ce langage L peut fonctionner de la manière suivante. L'algorithme commence par choisir de façon non déterministe k sommets $v_1, \ldots, v_k$ de G. Ce choix se fait en temps linéaire en la taille du graphe. Ensuite, l'algorithme vérifie que toutes les arêtes (v_i, v_j) pour tout $1 \leq i < j \leq k$ sont présentes dans G : il accepte si c'est le cas. Cette vérification peut se faire en temps polynomial puisqu'il y a au plus k^2 arêtes à tester. Cet algorithme décide si le graphe G possède une clique de taille k. En effet, il y a un calcul de l'algorithme pour chaque choix

possible de k sommets. Un de ces calculs est acceptant si G contient une clique. Le problème de la clique appartient donc à la classe NP. □

Soit φ une instance de 3SAT, c'est-à-dire une formule en forme conjonctive telle que chaque clause de Φ contienne trois littéraux.

$$\varphi = (l_1 \vee l_2 \vee l_3) \wedge \ldots (l_{3k-2} \vee l_{3k-1} \vee l_{3k})$$

On introduit alors le graphe non orienté G dont l'ensemble des sommets est l'ensemble $V = \{l_1, \ldots, l_{3k}\}$ de tous les littéraux de φ. Deux sommets de G sont reliés par une arête s'ils n'appartiennent pas à la même clause et s'ils ne sont pas contradictoires. Par non contradictoire, on entend que l'un n'est pas égal à la négation de l'autre. L'ensemble E des arêtes est donc défini de la manière suivante.

$$E = \{(l_i, l_j) \mid \lfloor (i-1)/3 \rfloor \neq \lfloor (j-1)/3 \rfloor \wedge l_i \neq l_j\}$$

En effet, le numéro de la clause d'un littéral l_i est égal à $\lfloor (i-1)/3 \rfloor$ si les clauses sont numérotées à partir de 0.

Pour la formule $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$, on obtient le graphe représenté à la figure 4.7.

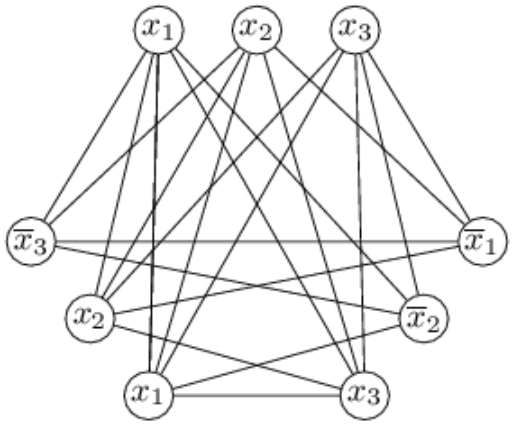


FIG. 4.7 – graphe associé à la formule φ

Nous allons voir que la formule φ est satisfiable si et seulement si le graphe G contient une clique de taille k. On remarque que deux littéraux d'une même clause ne sont jamais reliés par une arête. Une clique peut donc contenir au plus un littéral par clause et elle est de taille au plus k.

Supposons d'abord que la formule φ est satisfiable. Il existe donc une affectation des variables telle que φ vaille 1. Ceci signifie qu'au moins un littéral par clause vaut la valeur 1. Choisissons un tel littéral dans chacune des clauses pour former un ensemble de k littéraux. Comme tous ces littéraux valent 1, deux d'entre eux ne peuvent pas être contradictoires et ils sont donc reliés par des arêtes. C'est donc une clique de taille k dans G.

Supposons maintenant que G contienne une clique de taille k. Comme les littéraux d'une même clause ne sont pas reliés, cette clique contient un littéral exactement dans chaque clause. Montrons alors qu'il existe une affectation qui rend tous ces littéraux égaux à 1. Chaque littéral de cette clique est égal à x_i ou à $\neg x_i$. Pour que ce littéral vaille 1, on impose la valeur 1 ou 0 à la variable correspondante x_i. Comme tous les littéraux de la clique sont reliés par une arête, ils ne sont pas contradictoires deux à deux. Ceci signifie que deux littéraux quelconques de la clique concernent deux variables distinctes x_i et x_j avec $i \neq j$ ou alors ils concernent la même variable x_i mais ils imposent la même valeur à la variable x_i. On obtient alors une affectation cohérente des variables apparaissant dans la clique. En affectant n'importe quelle valeur à chacune des autres variables, on obtient une affectation qui donne la valeur 1 à la formule φ.

Couverture de sommets

Une arête (u, v) d'un graphe est dite *adjacente* à un sommet s si s est égal à u ou à v. Une couverture de taille k d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble C de k sommets tel que toute arête de G est adjacente à au moins un des sommets de C.

Proposition 4.22. *Le problème de savoir si un graphe a une couverture de sommets de taille k est* NP*-complet.*

Preuve. Le problème Vertex-Cover est dans NP. Un algorithme pour résoudre ce problème commence par choisir de façon non déterministe les k sommets $u_1, \ldots, u_k$ puis vérifie que chaque arête du graphe est bien adjacente à un de ces sommets.

Pour montrer que le problème Vertex-Cover est NP-difficile, on va réduire polynomialement le problème 3Sat à Vertex-Cover. À chaque instance de 3Sat, on associe une instance de Vertex-Cover qui a une solution si et seulement si l'instance de 3Sat en a une. Soit φ une instance de 3Sat, c'est-à-dire une formule en forme conjonctive telle que chaque clause de φ contienne trois littéraux. On note k le nombre de clauses de φ et m le nombre de variables apparaissant dans φ.

À cette formule φ, on associe un graphe non orienté ayant $3k + 2m$ sommets. Chaque sommet du graphe est en outre étiqueté par un littéral. À chaque variable x_i correspondent deux sommets étiquetés par les littéraux x_i et $\neg x_i$. Ces deux sommets sont reliés par une arête. Cette partie du graphe est appelée le gadget de la variable x_i. À chaque clause correspondent trois sommets, un étiqueté par chaque littéral de la clause. Ces trois sommets sont reliés entre eux par trois arêtes. On ajoute en outre une arête entre chacun des trois sommets d'une clause et le sommet de la variable qui est étiqueté par le même littéral. Cette partie du graphe est appelée le gadget de la clause.

La construction est illustrée sur la formule $\varphi = (x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$. Les entiers k et m sont égaux à 3 et 4 et on obtient le graphe représenté à la figure 4.8.

Nous allons voir que la formule φ est satisfiable si et seulement si le graphe G contient une couverture de taille $2k + m$. Pour chaque variable x_i, il faut qu'un des deux sommets associés soit dans la couverture pour couvrir l'arête entre ces deux sommets. De même pour chaque clause, il faut que deux des trois sommets associés soient dans la couverture pour couvrir les trois arêtes entre

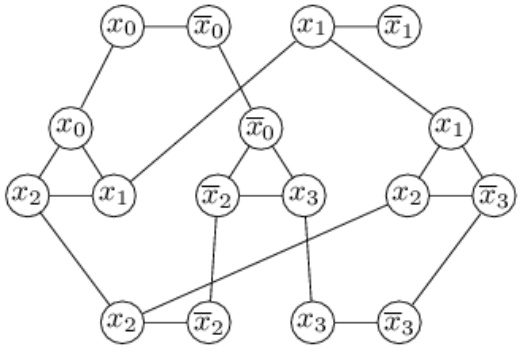


FIG. 4.8 – graphe associé à la formule φ

ces sommets. Ceci montre qu'une couverture du graphe doit contenir au moins $2k + m$ sommets.

Supposons d'abord que la formule φ est satisfiable. Il existe donc une affectation des variables telle que φ vaille 1. Ceci signifie qu'au moins un littéral par clause vaut la valeur 1. Pour chaque variable x_i, on met dans la couverture le sommet x_i ou le sommet $\neg x_i$ suivant que x_i vaille 1 ou 0 dans l'affectation. Pour chaque clause, on met dans la couverture deux sommets du gadget correspondant en prenant au moins les littéraux qui ont la valeur 0 et d'autres pour compléter. Ces choix construisent une couverture. Toutes les arêtes à l'intérieur des gadgets sont couvertes. Chaque arête entre les gadgets des variables et des clauses, relie une variable au littéral correspondant. Si la variable vaut 1, le sommet dans le gadget de la variable a été choisi et si la variable vaut 0, le sommet dans le gadget de la clause a été choisi. Dans les deux cas, l'arête est couverte.

Supposons maintenant que G possède une couverture de taille $2k + m$. Il est clair que cette couverture a exactement un sommet dans chaque gadget associé à une variable et deux sommets dans chaque gadget associé à une clause. Il est facile de vérifier que le choix des sommets dans les gadgets des variables définit une affectation qui donne la valeur 1 à la formule φ. □

Somme d'entiers

Le problème de la somme d'entiers est le suivant. Soient donnés une suite finie d'entiers $x_1, \ldots, x_k$ et un entier s. Le problème est de savoir s'il est possible d'extraire une sous-suite de la suite donnée de manière à obtenir une suite dont la somme est égale à s. Plus formellement, il s'agit de trouver suite croissante d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq k$ telle que $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} = s$.

Proposition 4.23. *Le problème de la somme d'entiers est* NP*-complet.*

Preuve. Le problème SUBSET-SUM est dans NP. Un algorithme pour résoudre ce problème commence par choisir de façon non déterministe les indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ puis vérifie que la somme $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$ a pour valeur s.

Pour montrer que le problème SUBSET-SUM est NP-difficile, on va réduire polynomialement le problème 3SAT à SUBSET-SUM. À chaque instance de 3SAT,

on associe une instance de SUBSET-SUM qui a une solution si et seulement si l'instance de 3SAT en a une. Soit φ une instance de 3SAT, c'est-à-dire une formule en forme conjonctive telle que chaque clause de φ contienne trois littéraux. On note k le nombre de clauses de φ et m le nombre de variables apparaissant dans φ. Soient $c_0, \ldots, c_{k-1}$ les k clauses de φ et soient $x_0, \ldots, x_{m-1}$ les m variables de φ. Pour une variable x_i, on note $p(i)$ l'ensemble des numéros des clauses où x_i apparaît positivement et $n(i)$ l'ensemble des numéros des clauses où x_i apparaît négativement.

À cette formule φ, on associe un ensemble de $2(m+k)$ entiers qui vont s'écrire avec $m+k$ chiffres en base 10. À chaque variable x_i correspond deux entiers p_i et n_i définis de la façon suivante.

$$p_i = 10^{k+i} + \sum_{j \in p(i)} 10^j$$
$$n_i = 10^{k+i} + \sum_{j \in n(i)} 10^j$$

Les entiers p_i et n_i s'écrivent en base 10 avec $m+k$ chiffres égaux à 0 ou à 1. Pour p_i, le chiffre à la position $k+i$ et les chiffres aux positions de $p(i)$ sont des 1 et tous les autres chiffres sont des 0. Pour n_i, le chiffre à la position $k+i$ et les chiffres aux positions de $n(i)$ sont des 1 et tous les autres chiffres sont des 0.

À chaque clause c_j, on associe deux entiers q_j et q'_j qui sont tous les deux égaux à 10^j. Les entiers q_j et q'_j s'écrivent en base 10, avec k chiffres égaux à 0 ou à 1. Le chiffre à la position j est un 1 et tous les autres sont des 0.

On définit finalement le nombre s par la formule suivante.

$$s = \sum_{0 \leq i < m} 10^{k+i} + 3 \sum_{0 \leq j < k} 10^j$$

L'entier s s'écrit en base 10 avec des chiffres 1 et 3. Son écriture en base 10 a la forme $1 \ldots 13 \ldots 3$ où le premier bloc comporte m chiffres 1 et le second bloc comporte k chiffres 3.

Nous allons illustrer cette construction sur la formule

$$\varphi = (x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3).$$

Les entiers k et m sont égaux à 3 et 4. Les entiers n_0, p_0, n_1, p_1, n_2, p_2, n_3, p_4, q_0, q_1, q_2 et s sont donnés dans le tableau 4.2.

La preuve que l'instance du problème SUBSET-SUM a une solution si et seulement si la formule φ est satisfiable découle des remarques suivantes. La première remarque est que pour chaque colonne, il y a au plus cinq entiers qui ont un chiffre 1 dans cette colonne. Ceci signifie que quelque soit le choix des entiers, leur somme se fait sans retenue. La somme est donc calculée colonne par colonne.

Comme le chiffre de s est 1 dans chaque colonne associée à la variable x_i, il est nécessaire d'utiliser exactement un des deux entiers n_i et p_i. Ce sont en effet les seuls qui ont un chiffre non nul dans cette colonne et il n'est pas possible de prendre les deux. Le fait de prendre de choisir n_i ou p_i correspond à affecter la valeur 0 ou 1 à la variable x_i. Chaque entier n_i ou p_i ajoute 1 dans chaque colonne associée à une clause égale à 1 pour le choix de la valeur

	x_3	x_2	x_1	x_0	c_2	c_1	c_0	Valeur
$p_0 =$	0	0	0	1	0	0	1	1001
$n_0 =$	0	0	0	1	0	1	0	1010
$p_1 =$	0	0	1	0	1	0	1	10101
$n_1 =$	0	0	1	0	0	0	0	10000
$p_2 =$	0	1	0	0	1	0	1	100101
$n_2 =$	0	1	0	0	0	1	0	100010
$p_3 =$	1	0	0	0	0	1	0	1000010
$n_3 =$	1	0	0	0	1	0	0	1000100
$q_0, q'_0 =$	0	0	0	0	0	0	1	1
$q_1, q'_1 =$	0	0	0	0	0	1	0	10
$q_2, q'_2 =$	0	0	0	0	1	0	0	100
$s =$	1	1	1	1	3	3	3	1111333

TAB. 4.2 – Les entiers associés à la formule φ

de la variable x_i. Comme le chiffre de s est 3 dans chaque colonne associée à clause c_j, il faut exactement trois entiers qui apportent une contribution dans cette colonne. Deux contributions peuvent être apportées par q_j et q'_j mais une contribution au moins doit être apportée par un entier n_i et p_i. Ceci garantit que toutes les causes sont vraies. Si plusieurs variables rendent vraie la même clause, on adapte la somme dans cette colonne en retirant un ou deux des entiers q_j et q'_j.

Le nombre d'entiers utilisés est égal à deux fois la somme du nombre de variables et du nombre de clauses. Il est donc proportionnel à la taille de la formule. La taille de ces entiers, c'est-à-dire le nombre de chiffres de leur écriture en base 10 est également proportionnel à la taille de la formule. La taille de l'instance de SUBSET-SUM est donc quadratique en la taille de la formule et peut être calculé en un temps de même ordre. La réduction de 3SAT à SUBSET-SUM est donc bien polynomiale. □

4.3 Complexité en espace

On rappelle que la complexité en espace d'un calcul est le nombre de cellules de la bande qui sont utilisées, c'est-à-dire la taille maximale d'une configuration apparaissant dans le calcul. La fonction de complexité en espace d'une machine $\mathcal{M}$ est la fonction $s_{\mathcal{M}}$ qui donne pour chaque entier n la complexité en espace maximale d'un calcul sur une entrée de taille n (cf. définition 4.1 p. 165).

4.3.1 Changement de modèle

Il a été vu que les changements de modèles peuvent avoir une incidence plus ou moins grande sur la complexité en temps. Le passage de plusieurs bandes à une seule bande donne une explosion quadratique (cf.) alors que le passage d'une machine non déterministe à une machine déterministe donne impose une explosion exponentielle. Au contraire, les changements de modèle ont moins d'incidence sur la complexité en espace.

Le passage d'une machine à bande bi-infinie à bande infinie ne change pas

la complexité en espace puisque l'espace utilisé reste identique. En effet, la simulation est effectuée en repliant la bande sur elle-même. L'espace utilisé n'est pas augmenté.

Le passage d'une machine à k bandes à une machine à une seule bande peut être réalisé en mettant bout à bout les contenus des k bandes sur l'unique bande séparés par un caractère spécial. Le nombre de cases de bande utilisées est égal à la somme des cases utilisées sur les k bandes. L'espace reste encore inchangé.

Le passage d'une machine non déterministe à une machine déterministe change la complexité en espace mais de façon plus modérée que la complexité en temps. Le théorème suivant énonce qu'il est possible de simuler une machine non déterministe avec une machine déterministe en utilisant seulement le carré de l'espace.

Théorème 4.24 (Savitch 1970)**.** *Soit s une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $s(n) \geq n$ pour tout n assez grand. Toute machine non déterministe qui fonctionne en espace $s(n)$ est équivalente à une machine de Turing déterministe en espace $O(s^2(n))$.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing fonctionnant en espace $s(n)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que cette machine possède un seul état final q_f. On modifie la machine pour qu'avant d'accepter, elle efface la bande en remplaçant chaque symbole par le symbole blanc #. L'objectif de cette transformation est d'avoir une seule configuration acceptante égale à q_f.

On commence par définir une fonction Access qui prend en paramètre deux configurations C et C' de $\mathcal{M}$ ainsi que deux entiers t et r. La fonction retourne vrai s'il existe un calcul de C à C' de longueur au plus t qui n'utilise que des configurations intermédiaires de taille au plus r. La fonction est récursive et fonctionne de la façon suivante. Si $t = 0$ ou $t = 1$, elle se contente de tester si C et C' sont égales ou s'il existe une étape de calcul de de C à C'. Sinon, elle parcourt toutes les configurations C'' de taille au plus r et pour chaque configuration C'', elle teste s'il existe un calcul dont C'' est la configuration médiane.

```
1:  Access(C, C', t, r)
2:  if t = 0 then
3:     return C = C'
4:  else if t = 1 then
5:     return C = C' or C → C'
6:  else
7:     for all C'' de taille r do
8:        if Access(C, C'', ⌈t/2⌉, r) and Access(C'', C', ⌊t/2⌋, r) then
9:           return true
10:    return false
```

Algorithme 9: Fonction Access

Nous analysons maintenant la complexité en espace de la fonction Access. La valeur de t est divisé par 2 à chaque appel récursif. Le nombre maximal d'appels imbriqués de la fonction est donc borné par $\log_2 t$. Chaque appel récursif utilise trois variables C, C' et C'' de taille au plus r et un entier t qui nécessite un espace au plus $\log_2 t$ s'il est codé en binaire. La variable r reste constante et

on peut donc considérer qu'il n'y a en fait qu'une seule instance de cette variable qui occupe un espace $\log_2 r$. L'espace utilisé globalement est donc un borné par $O(\log_2 r + (r + \log_2 t) \log_2 t)$.

Nous allons maintenant utiliser la fonction ACCESS pour résoudre le problème. Dans un premier temps, nous supposons pour simplifier que la fonction $s(n)$ est calculable en utilisant un espace au plus $s(n)$. Puisque la machine $\mathcal{M}$ fonctionne en espace $s(n)$, il existe, d'après le lemme 4.2 une constante K telle $t_{\mathcal{M}}(n) \leq 2^{Ks(n)}$. Soit w une entrée de taille n. Puisque q_f est l'unique configuration acceptante de $\mathcal{M}$, on a l'équivalence suivante.

$$w \in L(\mathcal{M}) \iff \text{ACCESS}(q_0 w, q_f, 2^{Ks(n)}, s(n))$$

Il est alors facile de donner une machine déterministe $\mathcal{M}'$ équivalente à $\mathcal{M}$. Pour chaque entrée w de taille n, la machine $\mathcal{M}'$ calcule la valeur de $s(n)$ puis utilise la fonction ACCESS avec $t = 2^{Ks(n)}$ et $r = s(n)$. L'espace utilisé est alors borné par $O(K^2 s^2(n)) = O(s^2(n))$.

Nous ne supposons plus que la fonction $s(n)$ est calculable et nous allons utiliser à nouveau la fonction ACCESS pour contourner cette difficulté. Soit w une entrée de taille n et soit m la taille maximale d'une configuration accessible à partir de la configuration initiale $q_0 w$. Nous donnons ci-dessous un algorithme qui calcule la valeur de m en utilisant un espace borné par $O(m^2)$. Comme $m \leq s(n)$, cet espace est donc borné par $O(s^2(n))$.

Pour chaque entier $k \geq n + 1$, on note N_k, le nombre de configurations de taille au plus k accessibles par un calcul à partir de $q_0 w$ en utilisant des configurations de taille au plus k. Par définition, la suite $(N_k)_{k \geq 0}$ est croissante et elle est bornée par le nombre de configurations de taille au plus $s(n)$. Il existe donc un entier k tel que $N_{k+1} = N_k$. Réciproquement, si k est le plus petit entier tel que $N_{k+1} = N_k$, alors k est égal à m et N_k est le nombre total de configurations accessibles à partir de $q_0 w$. Supposons par l'absurde qu'il existe une configuration accessible à partir de $q_0 w$ avec un calcul utilisant des configurations de taille au moins $k + 1$. On considère la première configuration de ce calcul de taille $k + 1$. Cette configuration existe car la taille des configurations ne varie que d'une unité au plus à chaque étape de calcul. Comme cette configuration est de taille $k + 1$ et que celles qui la précèdent dans le calcul sont de taille au plus k, elle prouve que $N_{k+1} > N_k$, d'où la contradiction. L'algorithme suivant calcule la valeur de m.

Input w de taille n
1: $k \leftarrow n$
2: $i \leftarrow 0$
3: **repeat**
4: $\quad k \leftarrow k + 1$
5: $\quad N \leftarrow i$
6: $\quad$ **for all** C de taille au plus k **do**
7: $\quad\quad$ **if** ACCESS$(q_0 w, C, 2^{Kk}, k)$ **then**
8: $\quad\quad\quad i \leftarrow i + 1$
9: **until** $i = N$
10: return k

Algorithme 10: Calcul de m

Comme k est borné par m, l'espace utilisé par chaque appel à ACCESS est

borné par $O(m^2)$. L'espace nécessaire aux variables i et N est borné par m si ces entiers sont codés en binaire. L'espace global utilisé par l'algorithme précédent est donc au plus $O(m^2)$.

Une machine déterministe $\mathcal{M}'$ équivalente à $\mathcal{M}$ fonctionne de la façon suivante. Elle calcule d'abord la valeur de m avec l'algorithme précédent puis utilise ensuite la fonction ACCESS avec $t = 2^{Km}$ et $r = m$ pour décider s'il y un calcul de $q_0 w$ à la configuration acceptante q_f. □

La preuve du théorème de Savitch appelle quelques commentaires. Il faut d'abord remarquer une certaine similitude entre la fonction ACCESS et l'algorithme de McNaughton-Yamada pour calculer une expression rationnelle équivalente à un automate fini. L'algorithme pour calculer la valeur de m peut aussi être rapproché des algorithmes donnés pour dans la preuve du théorème de Immerman et Szelepcsényi avec toutefois la différence que ces derniers sont non déterministes.

Dans l'analyse de la complexité en espace de la fonction ACCESS, il faut comprendre que c'est le nombre maximal d'appels imbriqués qui importe et non pas le nombre total d'appels qui interviendrait dans la complexité en temps. Par appel imbriqué d'une fonction récursive, on entend un appel actif, c'est-à-dire qui a commencé à s'exécuter mais ne s'est pas terminé car il a provoqué un autre appel. Le nombre maximal d'appels imbriqués correspond à la hauteur maximale de la pile utilisée pour stocker les variables locales et les adresses de retour.

4.3.2 Classes de complexité en espace

Comme pour le temps, on introduit des classes de problèmes déterminées par l'espace nécessaire à leur décision.

Définition 4.25. Pour une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on définit les classes
- SPACE($f(n)$) est l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing *déterministe* (à plusieurs bandes) en espace $O(f(n))$.
- NSPACE($f(n)$) est l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing *non déterministe* (à plusieurs bandes) en espace $O(f(n))$.

Le théorème de Savitch garantit qu'il n'est pas nécessaire de distinguer les machines déterministes et non déterministes pour l'espace polynomial ou exponentiel. On définit les classes suivantes.

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{k\geq 0} \text{SPACE}(n^k) = \bigcup_{k\geq 0} \text{NSPACE}(n^k)$$
$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_{k\geq 0} \text{SPACE}(2^{n^k}) = \bigcup_{k\geq 0} \text{NSPACE}(2^{n^k})$$

4.3.3 Complexités en temps et en espace

Nous étudions maintenant quelques relations entre les classes de complexité en temps et en espace. La proposition suivante résume les relations entre les différentes classes de complexité introduites jusque là.

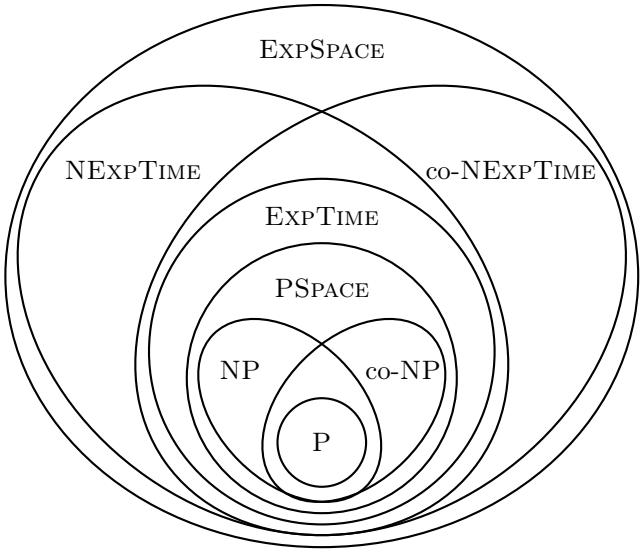


Fig. 4.9 – Inclusions des classes P, NP, ... et ExpSpace

Proposition 4.26. *Les classes de complexité introduites vérifient les inclusions suivantes.*

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSpace} \subseteq \mathrm{ExpTime} \subseteq \mathrm{NExpTime} \subseteq \mathrm{ExpSpace}.$$

Les inclusions entre ces classes et leurs classes duales sont représentées à la figure 4.9.

Preuve. Les deux inclusions NP $\subseteq$ PSpace et NExpTime $\subseteq$ ExpSpace découlent du lemme 4.2 et du théorème de Savitch.

L'inclusion PSpace $\subseteq$ ExpTime découle aussi du lemme 4.2. □

Le théorème de hiérarchie (corollaire 4.48 p. 198) permet de montrer que les inclusions P $\subsetneq$ ExpTime et PSpace $\subsetneq$ ExpSpace sont strictes. Pour les inclusions intermédiaires, rien n'est connu même si la thèse généralement admise est qu'elles sont toutes strictes.

4.3.4 Exemples de problèmes dans PSpace

Exemple 4.27. Quelques exemples de problèmes dans la classe PSpace.

1. *Universalité* d'un automate fini : Soit $\mathcal{A}$ un automate sur l'alphabet A. Le problème de l'universalité est de savoir si tous les mots sur A sont acceptés par $\mathcal{A}$, c'est-à-dire $L(\mathcal{A}) = A^*$.
   (a) Si l'automate $\mathcal{A}$ est déterministe, il est très facile de savoir s'il accepte tous les mots sur A. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{A}$ est émondé. Dans ce cas, l'égalité $L(\mathcal{A}) = A^*$ est vraie si et seulement si $\mathcal{A}$ est complet et si tous ses états sont finaux.
   (b) Le problème est intéressant si $\mathcal{A}$ n'est pas déterministe. L'automate $\mathcal{A}$ est équivalent à un automate déterministe ayant au plus 2^n états.

Si $L(\mathcal{A}) \neq A^*$, il existe un mot w de longueur inférieure à 2^n qui n'est pas accepté par $\mathcal{A}$. On utilise cette remarque pour construire un algorithme non déterministe en espace polynomial pour décider si $L(\mathcal{A}) \neq A^*$. Grâce au théorème de Savitch, cet algorithme peut être transformé en un algorithme déterministe.

L'algorithme procède la façon suivante. De manière non déterministe, l'algorithme devine un mot w de longueur inférieure à 2^n et simule le déterminisé de $\mathcal{A}$ sur ce mot pour montrer qu'il n'est pas accepté. Pour que l'espace reste polynomial, le mot w n'est pas mémorisé. Seule sa longeur est mémorisée.

- L'algorithme simule le calcul de $\mathcal{A}$ en marquant les états accessibles en lisant le mot w. À chaque étape de calcul, l'algorithme choisit une lettre a de A et calcule les états accessibles en effectuant des transitions.
- L'algorithme s'arrête après 2^n étapes et rejette.
- L'algorithme s'arrête lorsqu'il obtient un groupe d'états comprenant un état non final et accepte.

L'algorithme utilise un espace linéaire pour stocker le nombre d'étapes effectuées et l'ensemble des états accessibles. Le principe de l'algorithme consiste à calculer de manière incrémentale l'automate déterminisé, au lieu de le calculer entièrement avant de l'analyser.

2. *Formules booléennes quantifiées* (QSAT) On considère les formules booléennes avec des quantificateurs existentiels et universels portant sur exactement toutes leurs variables. Les seuls opérateurs autorisés sont $\wedge, \vee, \neg$. La formule suivante est un exemple d'une telle formule.

$$\forall x\ \exists y\ \forall z \quad (1 \wedge y) \vee (y \wedge \neg z) \vee (y \wedge \neg 1)$$

Le problème est de savoir si une formule quantifiée close (sans variable libre) est vraie. La proprositon suivante établit que le problème QSAT peut effectivement être résolu en espace polynomial. On verra que ce problème jour pour la classe PSPACE un rôle identique à celui du problème SAT pour la classe NP.

Le problème QSAT est une généralisation naturelle du problème SAT où il y a une quantification existentielle implicite. Soit φ une formule de la logique propositionnelle sur les variables $x_1, \ldots, x_n$. La formule φ est une instance positive de SAT si te seulement si la formule $\psi = \exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi$ est une instance positive de QSAT.

```
1: SolveQSat(Φ)
2: if Φ n'a pas de quantificateurs then
3:    return eval(Φ)
4: if Φ = ∃x ψ then
5:    return SolveQSat(ψ[x ← 0])∨ SolveQSat(ψ[x ← 1])
6: if Φ = ∀x ψ then
7:    return SolveQSat(ψ[x ← 0])∧ SolveQSat(ψ[x ← 1])
```

Algorithme 11: Algorithme SOLVEQSAT

Proposition 4.28. *Le problème* QSAT *est dans la classe* PSPACE.

Preuve. On résout QSAT à l'aide de l'algorithme récursif SOLVEQSAT qui fonctionne de façon suivante. On suppose la formule Φ en forme prénexe. Si cette formule n'a pas de quantification, elle n'a que des constante et il suffit donc de l'évaluer. Si la formule a au moins une quantification, l'algorithme se rappelle récursivement en remplaçant succesivement la variable quantifiée par les valeurs 0 et 1.

L'algorithme correctement programmé utilise une seule copie de Φ, et une pile de taille proportionnelle au nombre de variables. Il fonctionne donc en espace linéaire. □

4.3.5 PSPACE-complétude

La définition suivante à l'analogue de la NP-complétude pour la classe PSPACE.

Définition 4.29. Un problème A est dit PSPACE-*complet* si :

1. A est PSPACE,
2. Tout problème B de PSPACE se réduit polynomialement *en temps* à A, (c'est-à-dire $B \leq_P A$).

Il est essentielle que la notion de PSPACE-complétude soit définie avec des réductions polynomiales en temps. En effet, comme le théorème de Savitch permet de rendre déterministes les machines de Turing en espace polynomial, tout problème de la classe PSPACE de réduit en espace polynomial au problème trivial.

De manière plus générale, la complétude relative à une classe est toujours définie en utilisant des réductions qui sont plus faibles que les machines de la classe. Le théorème suivant montre qu'il existe des problèmes PSPACE-complets.

Théorème 4.30. *Le problème* QSAT *est* PSPACE-*complet.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ machine en espace polynomial. On veut ramener l'acceptation de w par M au calcul de la valuation d'une formule quantifiée.

On suppose donc qu'un problème B est décidé par une machine de Turing $\mathcal{M}$ en espace polynomial qu'on peut supposer être n^k pour un entier k fixé. Soit w une entrée de $\mathcal{M}$ de taille n. L'existence d'un calcul acceptant w est codé de la manière suivante.

Chaque configuration C de la machine $\mathcal{M}$ est codée par des variables qui décrivent chacun des symboles de la configuration. Puisque chaque configuration est de taille n^k, le nombre de variables nécessaires est au plus $O(n^k)$.

Soient C et C' deux configurations traduites en variables en nombre $O(n^k)$. On construit une formule $\Phi_{t,C,C'}$ qui est vraie si et seulement si il existe un calcul de longueur au plus t de C à C'. La formule $\Phi_{t,C,C'}$ est construite par récurrence sur la valeur de t. Dans les définitions ci-dessous, on s'autorise à quantifier sur les configurations. Il faut voir ces quantifications comme des abréviations des quantifications sur les variables qui codent les configurations.

1. Pour $t = 1$, $\Phi_{1,C,C'}$ est la formule $(C = C') \vee (C \to C')$.
2. Pour $t > 1$, $\Phi_{t,C,C'}$ est la formule

$$\exists\, C'' \quad \forall\, D, D' \\ [(D = C \wedge D' = C'') \vee (D = C'' \wedge D' = C')] \implies \Phi_{\lfloor t/2 \rfloor, D, D'}.$$

La définition de $\Phi_{t,C,C'}$ pour $t > 1$ suscite plusieurs remarques. L'idée générale est de décomposer un calcul de longueur t en deux calculs de longueur $\lfloor t/2 \rfloor$ comme dans la preuve du théorème de Savitch. Cette définition donne une formule équivalente à la formule $\exists C''\ \Phi_{\lfloor t/2 \rfloor,C,C''} \wedge \Phi_{\lfloor t/2 \rfloor,C'',C'}$. Par contre, cette dernière définition ne conduirait pas une formule de taille polynomiale pour $t = 2^{Kn^k}$ puisque la taille serait proportionnelle à t.

Cette définition est inexacte lorsque t est impaire mais c'est sans conséquence car les valeurs de t utilisées sont des puissances de 2. Lorsque $t = 2t' + 1$, le calcul de longueur t devrait être décomposé en une étape de calcul suivie de deux calculs de longueur t'. L'étape de calcul est exprimée en utilisant la formule $\Phi_{1,C,C'}$. □

Pour montrer qu'un problème est PSPACE-complet, on procède par réduction comme pour la NP-complétude en utilisant le lemme suivant.

Lemme 4.31. *Si $B \in$ PSPACE, $A \leq_P B$ et A est* PSPACE*-complet, alors B est aussi* PSPACE*-complet.*

Le lemme découle directement des définitions et de la composition des réductions en temps polynomial.

4.3.6 Espace logarithmique

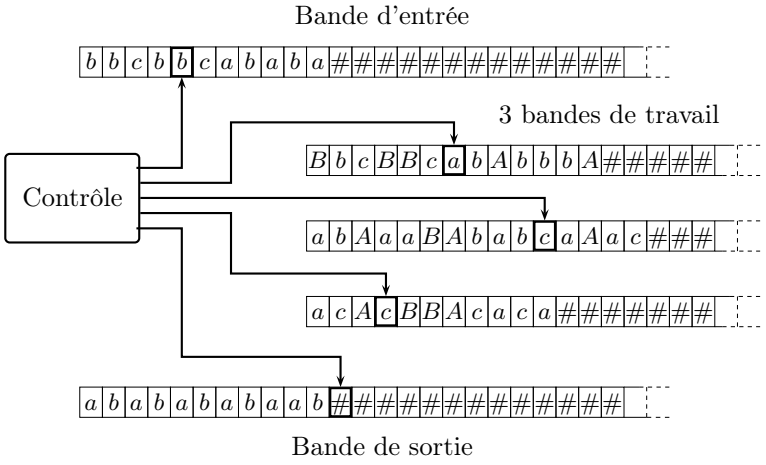


FIG. 4.10 – Machine de Turing avec des bandes d'entrée et de sortie

On s'intéresse à des problèmes qui peuvent être résolus avec un espace logarithmique en la taille de l'entrée. Cette question est uniquement pertinente si l'espace occupé par l'entrée n'est pas pris en compte dans l'espace utilisé par la machine. On introduit pour cela une variante des machines de Turing. Dans cette partie, on suppose que chaque machine à deux bandes spéciales appelée *bande d'entrée* et *bande de sortie*. La machine n'écrit jamais sur la bande d'entrée. Plus formellement, chaque transition écrit sur cette bande le caractère qui vient d'y être lu. Sur la bande de sortie, la tête de lecture ne se déplace que vers

la droite. Cette dernière contrainte signifie que la machine ne peut jamais effacer ce qu'elle y a écrit. Cette bande se comporte un peu comme une imprimante. En contrepartie de ces deux contraintes, l'espace utilisé ne prend pas en compte ces deux bandes particulières. La taille d'une configuration est le nombre de cellules utilisées sur les autre bandes. En utilisant cette convention sur les machines de Turing, on peut définir les deux classes suivantes.

$$\mathrm{L} = \textsc{Space}(\log n) \quad \text{et} \quad \mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log n).$$

La base du logarithme est sans importance puisque toutes les complexités sont définies à un facteur multiplicatif près. Ces deux classes de complexités jouent un rôle important d'une part parce que des problèmes intéressants s'y trouvent et d'autre part parce qu'elles fournissent des sous-classes de P. On commence par donner quelques relations entre ces nouvelles classes de complexité et la classe P.

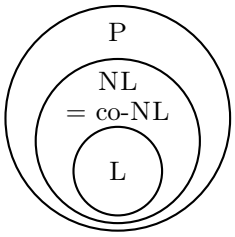


FIG. 4.11 – Inclusions des classes L, NL, co-NL et P

Proposition 4.32. *Les classes de complexité introduites vérifient les inclusions suivantes.*

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} = \text{co-NL} \subseteq \mathrm{P}.$$

Les inclusions entre ces classes sont représentées à la figure 4.11.

Preuve. L'inclusion $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$ découle directement des définitions. L'égalité entre les classes NL et co-NL est une conséquence directe du théorème d'Immerman et Szelepcsényi.

Pour l'inclusion $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, on montre que le nombre de configurations de la machine est polynomial en la taille de l'entrée. Comme une machine qui s'arrête toujours ne peut pas passer deux fois par la même configuration, le temps de calcul est polynomial. Comme la tête lecture de la bande de sortie se déplace uniquement vers la droite, cette ne lit que des symboles # et n'influe pas sur le déroulement du calcul et cette bande peut être ignorée dans le calcul des configurations. Comme la tête de lecture de la bande d'entrée ne peut pas écrire sur cette bande, seule la position de la tête de cette bande doit être prise en compte dans la configuration. Le nombre de ces positions est bien sûr linéaire. Il reste à compter les contenus des bandes de travail et les positions de leurs têtes de lecture. Comme l'espace utilisé sur ces bandes est logarithmique, le nombre de contenus est polynomial et le nombre de positions des têtes est logarithmique. Au total, on obtient un nombre polynomial de configurations globales. □

On commence par donner un exemple de problème de la classe L puis un exemple de problème de la classe NL. Ce dernier problème joue pour la classe NL

un rôle similaire à celui de SAT pour la classe NP. Il est complet pour cette classe et il est en quelque sorte générique.

Exemple 4.33. Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le langage $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ est dans la classe L. Aucune des machines données aux exemples 3.8, 3.16 et 4.14 pour ce langage ne fonctionne en espace logarithmique. Par contre la machine à deux bandes de l'exemple 3.16 peut facilement être modifiée pour fonctionner en espace logarithmique. Au lieu de mémoriser la différence entre les nombres de a et de b lus par la position de sa tête de lecture sur la deuxième bande, elle peut écrire cette différence en binaire sur la deuxième bande. L'incrémentation et la décrémentation de cet entier nécessitent alors plusieurs transitions mais l'espace utilisé devient logarithmique.

Exemple 4.34. Le problème PATH de savoir s'il existe un chemin entre deux sommets donnés s et t d'un graphe orienté G est dans la classe NL.

Une machine non déterministe cherche un chemin de s à t en partant de s puis en suivant les arêtes du graphe pour passer d'un sommet à un autre. Si la machine atteint t, elle accepte l'entrée car elle a trouvé un chemin. En même temps que la machine découvre le chemin, celle-ci compte le nombre de sommets parcourus. Si ce nombre dépasse le nombre de sommets du graphe, la machine s'arrête et rejette l'entrée. La machine s'arrête donc sur toutes les entrées puisqu'elle visite des sommets en nombre au plus égal au nombre de sommets de G. La machine peut repasser plusieurs fois par un même sommet car elle ne mémorise pas les sommets déjà visités comme cela est fait dans les parcours en largeur ou en profondeur d'un graphe. Sinon, l'espace utilisé ne serait pas logarithmique. S'il existe un chemin de s à t, la machine a au moins un calcul acceptant car il existe toujours un chemin de longueur inférieure au nombre de sommets. Lors de sa recherche, la machine mémorise au plus deux sommets pour suivre les arêtes et le nombre de sommets visités. Toute cette information occupe un espace au plus logarithmique.

Il a été montré par Reingold en 2005 que l'accessibilité dans un graphe non orienté est dans la classe L mais c'est un résultat très difficile.

On introduit maintenant la notion de réduction en espace logarithme. On commence par définir la notion de fonction calculable en espace logarithmique.

Une fonction $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ est calculable en espace logarithmique s'il existe une machine déterministe en espace logarithmique, qui pour toute entrée w, calcule $f(w)$ sur sa bande de sortie. Comme la taille de $f(w)$ n'est pas prise en compte dans l'espace de la machine, cette taille n'est pas nécessairement logarithmique. Par contre, l'inclusion $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{P}$ montre que la taille de $f(w)$ est polynomiale en la taille de w.

Définition 4.35 (Réduction logarithmique)**.** Soient A et B, des problèmes codés respectivement par L_A et L_B sur les alphabets Σ_A et Σ_B. Une *réduction logarithmique* de A à B est une fonction $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$ calculable en espace logarithmique par une machine de Turing déterministe telle que :

$$w \in L_A \iff f(w) \in L_B.$$

L'existence d'une réduction polynomiale de A à B se note $A \leq_{\log} B$.

La proposition suivante montre que la relation $\leq_{\log}$ est bien transitive.

Proposition 4.36. *La composée de deux fonctions calculables en espace logarithmique est encore calculable en espace logarithmique.*

Contrairement au résultat similaire pour les fonctions calculables en temps polynomial, la preuve de cette proposition n'est pas complètement immédiate. En effet, le résultat intermédiaire de la première fonction ne peut pas être stocké sur une bande de travail car sa taille n'est pas nécessairement logarithmique.

Preuve. Soient f et g des fonctions calculables en espace logarithmique par des machines de Turing déterministes $\mathcal{M}_f$ et $\mathcal{M}_g$ ayant respectivement m et n bandes de travail. On construit une nouvelle machine $\mathcal{N}$ calculant la composée $f \circ g$ ayant $m+n+2$ bandes de travail. Les m premières bandes de $\mathcal{N}$ servent à la simulation de $\mathcal{M}_f$ et les n suivantes à la simulation de $\mathcal{M}_g$. Les deux dernières bandes sont utilisées pour mémoriser les positions des têtes de lecture de la bande d'entrée de $\mathcal{M}_f$ et de la bande de sortie de $\mathcal{M}_g$. Comme $g(w)$ est de taille polynomiale, ces deux positions peuvent être représentées par des entiers dont les écritures en base 2 sont de taille logarithmique. La machine $\mathcal{N}$ simule chaque étape de calcul de la machine $\mathcal{M}_f$. Pour chacune de ces étapes, la machine $\mathcal{N}$ simule entièrement le calcul de la machine $\mathcal{M}_g$ sur l'entrée w depuis le début jusqu'à ce que celle-ci écrive le symbole lu par la machine $\mathcal{M}_f$. Il est possible de retrouver ce symbole grâce aux deux bandes supplémentaires de $\mathcal{N}$ qui mémorisent les positions des têtes de lecture. □

La machine $\mathcal{N}$ donnée dans la preuve précédente simule la machine $\mathcal{M}_g$ depuis la configuration initiale à chaque étape calcul de $\mathcal{M}_f$. C'est uniquement nécessaire lorsque la machine $\mathcal{M}_g$ déplace sa tête de lecture vers la gauche. Lorsqu'elle déplace sa tête de lecture vers la droite, il suffit de prolonger le calcul de $\mathcal{M}_g$ déjà simulé pour obtenir le symbole suivant. Cette optimisation n'améliore en rien le temps de calcul théorique de $\mathcal{N}$.

Le temps de calcul de la machine $\mathcal{N}$ est catastrophique puisque on a $t_{\mathcal{N}}(n) = O(t_{\mathcal{M}_f}(n)t_{\mathcal{M}_g}(n))$. L'espace logarithmique de la machine $\mathcal{N}$ est obtenu au sacrifice du temps de calcul. Les deux corollaires suivants découlent directement de la proposition.

Corollaire 4.37. *La réduction logarithmique $\leq_{\log}$ est transitive.*

Corollaire 4.38. *Si $A \leq_{\log} B$ et B est dans la classe* L*, alors A est aussi dans la classe* L*.*

Le théorème de Cook et Levin (théorème 4.17) établit que le problème 3Sat est NP-complet. Lorsque la formule en forme normale conjonctive a au plus deux littéraux par clause, le problème de la satisfiabilité devient beaucoup plus facile. Afin d'illustrer la réduction $\leq_{\log}$ nous allons montrer que le problème 2Sat de la satisfiabilité d'une formule avec deux littéraux par clause se réduit en espace logarithmique au problème Path de l'accessibilité.

Proposition 4.39. *L'insatisfiabilité d'une formule en forme normale conjonctive avec deux littéraux par clause se réduit en espace logarithmique au problème* Path*.*

Il faut noter que ce n'est pas 2Sat mais sa négation qui est considérée dans la proposition précédente. Il découle de cette proposition que le problème 2Sat appartient à la classe co-NL et donc à NL puisque ces deux classes sont égales.

Une conséquence directe de la proposition précédente est que le probléme 2SAT est dans la classe P. Ce résultat montre la différence importante entre 2SAT et 3SAT puisque ce dernier est NP-complet.

Preuve. Soit φ une formule en forme normale conjonctive avec au plus deux littéraux par clause. On associe à φ un graphe orienté G_φ. Les sommets de G_φ sont les variables x_i de φ et leurs négations $\bar{x}_i$. Les arêtes de G_φ sont les paires $\bar{l} \to l'$ où $l \vee l'$ est une clause de φ. Chaque clause $l \vee l'$ induit donc les deux arêtes $\bar{l} \to l'$ et $\bar{l}' \to l$ de G_φ. Il faut remarquer que si $l \to l'$ est une arête de G_φ, alors $\bar{l}' \to \bar{l}$ est aussi une arête de G_φ. Il s'ensuit que s'il y a un chemin de l à l' dans G_φ, alors il y a aussi un chemin de de $\bar{l}'$ à $\bar{l}$ dans G_φ.

La propriété clé du graphe G_φ ainsi construit est l'équivalence suivante entre la satisfiabilité de φ et l'absence de certaines paires de chemins dans G_φ.

$$\varphi \text{ satisfiable} \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{pour toute variable } x, \text{ il n'existe pas dans } G_\varphi \\ \text{des chemins de } x \text{ à } \bar{x} \text{ et de } \bar{x} \text{ à } x. \end{array} \right.$$

La propriété ci-dessus signifie que φ est satisfiable si et seulement si x et $\bar{x}$ ne sont jamais dans la même composante fortement connexe de G_φ. On commence par montrer cette propriété puis on montre ensuite comment elle permet de réduire l'insatisfiabilité de φ à l'accessibilité.

Supposons que φ soit satisfiable et soit v une affectation des variables telle que $v(\varphi) = 1$. Montrons que s'il y a un chemin de l à l' dans G_φ et $v(l) = 1$ alors $v(l') = 1$. Il suffit de le montrer si le chemin de l à l' est de longueur 1. Le résultat s'établit alors pour tous les chemins par récurrence sur la longueur. Si $l \to l'$ est une arête de G_φ, alors $\bar{l} \vee l'$ est une clause de φ et par conséquent $v(l') = 1$. Cette propriété implique qu'il ne peut y avoir simultanément dans G_φ des chemins de x à $\bar{x}$ et de $\bar{x}$ à x pour une variable x.

Supposons maintenant que pour toute variable x, il n'existe pas simultanément des chemins de x à $\bar{x}$ et de $\bar{x}$ à x. On montre qu'il existe une affectation telle que $v(\varphi) = 1$. Dans la construction de cette affectation, on s'autorise, par un abus de langage, à écrire qu'une valeur $b \in \mathbb{B}$ est affectée à un littéral l. Ceci signifie que l'on fixe $v(x) = b$ si $l = x$ ou $v(x) = \bar{b}$ si $l = \bar{x}$.

Cette affectation est construite de la façon suivante. Aucune valeur n'est affectée aux variables au départ et une valeur est successivement affectée à chaque variable. On affecte d'abord la valeur 1 à chaque littéral l tel qu'il existe un chemin de $\bar{l}$ à l, ainsi qu'à chaque littéral l' tel qu'il existe un chemin de l à l'. Il peut éventuellement rester des variables auxquelles aucune valeur n'a été affectée. On procède de la façon suivante jusqu'à épuisement des variables sans valeur. Une de ces variables est choisie arbitrairement et la valeur 1 lui est affectée ainsi qu'à chaque littéral l' tel qu'il existe un chemin de x à l'.

Il reste à vérifier que l'affectation ainsi construite est cohérente, c'est-à-dire que les deux valeurs 0 et 1 n'ont pas été successivement affectées à une même variable, et que l'affectation vérifie $v(\varphi) = 1$. Cette dernière propriété découle du fait que s'il existe un chemin de l à l' et si $v(l) = 1$ alors $v(l') = 1$.

Supposons par l'absurde que les valeurs 0 et 1 aient été successivement affectées à la variable x. Si cela s'est produit pendant la première phase, il existe des littéraux l_1 et l_2 avec des chemins $\bar{l}_1 \to l_1 \to x$ et $\bar{l}_2 \to l_2 \to \bar{x}$. Par construction de G_φ, il existe aussi des chemins $\bar{x} \to \bar{l}_1$ et $x \to \bar{l}_2$. En combinant tous ces chemins, on obtient un chemin $l_1 \to \bar{l}_1$ en contradiction avec l'hypothèse. On

montre de la même façon que cela ne peut pas se produire pendant la seconde phase.

Pour conclure, il reste à montrer que le graphe G_φ peut être calculé en espace logarithmique et que la condition sur G_φ se réduit à l'accessibilité. Ces deux propriétés sont évidentes. □

Exercice 4.40. On considère le langage de Dyck D_n^* sur n paires de parenthèses (cf. exemple 2.8 p. 71 pour la définition).

1. Montrer qu'il peut peut être décidé en temps linéaire si un mot appartient au langage de Dyck D_n^*.
2. Montrer qu'il peut peut être décidé en espace logarithmique si un mot appartient au langage de Dyck D_n^*.

Solution.

1. On considère l'automate à pile déterministe construit à l'exercice 2.68 qui accepte le langage de Dyck. Le nombre de transitions effectuées par cet automate sur un mot d'entrée de taille m est au plus $m+1$. Il est facile de transformer cet automate à pile en une machine de Turing qui fonctionne en temps linéaire.
2. Soit un mot w égal à $b_1 \cdots b_m$ sur l'alphabet $A_n = \{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$. Le mot w appartient au langage de Dyck si et seulement si il satisfait la propriété suivante. Pour tous entiers i et k tels que $b_i = a_k$ il existe un entier $j > i$ tel que le facteur $v = a_i \cdots a_j$ satisfait les trois conditions suivantes.
   i) La lettre b_j est $\bar{a}_k$,
   ii) pour tout $1 \leq \ell \leq n$, $|v|_{a_\ell} = |v|_{\bar{a}_\ell}$
   iii) pour tout $1 \leq \ell \leq n$ et tout préfixe u de v, $|u|_{\bar{a}_\ell} \leq |u|_{a_\ell}$.
   Cette propriété peut facilement être vérifiée par une machine de Turing qui utilise un nombre fixe de compteurs et donc un espace logarithmique.

4.3.7 NL-complétude

On montre que parmi les problèmes de la classe NL, certains sont les plus compliqués dans le mesure où chaque problème de NL se réduit en espace logarithmique à ces problèmes. On commence par la définition de la NL-complétude qui est l'analogue de la NP-complétude. Les réductions polynomiales sont remplacées par les réductions en espace logarithmique.

Définition 4.41 (NL-difficile et NL-complet)**.** Un problème A est dit NL-*difficile* si tout problème B de NL se réduit en espace logarithmique à A, *i.e.* $B \leq_{\log} A$. Si de plus il est dans la classe NL, il est dit NL-*complet*.

L'intérêt de cette définition réside bien sûr dans l'existence de problèmes NL-complets comme l'établit le théorème suivant. Nous montrons successivement que les problèmes PATH et 2SAT sont NL-complets.

Théorème 4.42. *Le problème* PATH *est* NL-*complet.*

L'idée directrice de la preuve du théorème est assez similaire à la preuve du théorème de Cook et Levin qui établit que SAT est NP-complet.

Preuve. Il a déjà été montré que le problème PATH est dans la classe NL. Il reste à montrer que tout problème de NL se réduit en espace logarithmique à PATH. Soit A un problème de NL qui est décidé par une machine $\mathcal{M}$ non déterministe en espace logarithmique. Une entrée w est acceptée par $\mathcal{M}$ s'il existe un calcul acceptant à partir de la configuration initiale. Dans le cas d'une machine en espace logarithmique, la configuration initiale n'est pas $q_0 w$ car celle-ci ne prend pas en compte le contenu de la bande d'entrée.

Une entrée w est acceptée par $\mathcal{M}$ s'il existe un chemin dans le graphe des configurations de la configuration initiale à une configuration acceptante. Quitte à modifier la machine pour qu'elle efface les bandes de travail avant d'accepter, on peut toujours supposer qu'il y a une unique configuration acceptante. Comme la machine $\mathcal{M}$ utilise un espace logarithmique, il suffit de considérer les configurations de taille logarithmique.

La réduction consiste donc à associer a une entrée w de taille n, le graphe des configurations restreint aux configurations de taille au plus $K \log n$ pour une constante K. Ce graphe restreint peut bien sûr être calculé par une machine en espace logarithmique. La machine commence par énumérer par ordre lexicographique toutes les configurations de tailles $K \log n$ puis toutes les paires (C, C') de configurations telles $C \to C'$. Ceci montre que le problème A se réduit en espace logarithmique à PATH. □

Puisque le problème PATH est NL-complet, il suffit maintenant d'utiliser une réduction en espace logarithmique pour montrer qu'un autre problème est NL-complet.

Théorème 4.43. *Le problème* 2SAT *est* NL*-complet.*

Preuve. Comme les classes NL et co-NL coïncident, il est équivalent de montrer que le complémentaire de 2SAT est NL-complet. Comme le problème PATH est NL-complet, il suffit de prouver que ce problème se réduit en espace logarithmique au complémentaire de 2SAT. À toute instance (G, s, t) de PATH, on associe une formule φ qui a la propriété d'être insatisfiable si et seulement si il y a un chemin de s à t dans G. La construction est inspirée de la construction utilisée dans la preuve que 2SAT se réduit en espace logarithmique à PATH. Il s'agit en fait de la construction inverse. Soit (G, s, t) une instance du problème PATH. On suppose pour simplifier qu'il n'y a aucune arête arrivant sur le sommet s et aucune arête sortant du sommet t. On construit alors une formule φ dont l'ensemble des variables est l'ensemble V des sommets du graphe G. On définit une fonction μ qui à chaque sommet v de G associe un littéral par la formule suivante.

$$\mu(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \neq t, \\ \bar{s} & \text{si } v = t. \end{cases}$$

La formule φ est alors donnée de façon suivante.

$$\varphi = s \wedge \bigwedge_{(u,v) \in E} \overline{\mu(u)} \vee \mu(v)$$

où E est l'ensemble des arêtes de G. La preuve que cette formule est insatisfiable si et seulement si il y a un chemin de s à t dans G est identique à la preuve de la proposition 4.39. Comme la formule φ est évidemment calculable en espace logarithmique à partir de (G, s, t), on a montré que 2SAT est NL-complet. □

Exercice 4.44. 1. Montrer que le problème de savoir si un automate déterministe accepte un mot w est dans la classe L.

2. Montrer que le problème de savoir si un automate non déterministe accepte un mot w est NL-complet.

Solution. Il faut faire attention au fait que la donnée est ici le couple $(\mathcal{A}, w)$ formé de l'automate $\mathcal{A}$ et du mot w. Il s'agit du problème *uniforme* par opposition au problème où l'automate $\mathcal{A}$ est fixé. Dans ce cas, le problème de savoir si un mot w est accepté peut être décidé en temps linéaire et en espace constant que $\mathcal{A}$ soit déterministe ou non. Si $\mathcal{A}$ n'est pas déterministe, on le remplace par un automate déterministe équivalent. L'automate déterministe peut alors être considéré comme une machine de Turing qui fonctionne en temps linéaire et sans espace de travail auxiliaire.

1. La machine de Turing mémorise l'état courant de l'automate et la lettre courante du mot w. Pour ces deux informations, la machine mémorise en fait leurs positions dans l'entrée avec un espace logarithmique. Pour chaque lettre du mot w, la machine recherche dans l'automate la transition qui peut être effectuée et change l'état courant. Elle accepte si le dernier état final.
2. Pour montrer que ce problème est NL-complet, il faut d'abord montrer que ce problème est bien dans la classe NL et qu'il est NL-difficile. Si on remplace la machine de la question précédente par une machine non déterministe qui choisit la transition à effectuer dans l'automate, on obtient que le problème est dans NL. Pour montrer qu'il est NL-difficile, on donne une réduction en espace logarithmique de PATH à notre problème. À chaque instance (G, s, t) de PATH où $G = (V, E)$, on associe l'automate $\mathcal{A} = (V, \{a\}, E, \{s\}, \{t\})$ sur un alphabet unaire. En ajoutant la transition $t \xrightarrow{a} t$, il y a chemin de s à t dans G si et seulement si le mot $w = a^{|V|}$ est accepté par $\mathcal{A}$. L'automate $\mathcal{A}$ et le mot w peuvent bien sûr être calculés en espace logarithmique à partir de (G, s, t).

Exercice 4.45. 1. S'inspirer de la preuve du théorème de Savitch pour montrer que le problème PATH peut être décidé par une machine déterministe en temps $\log^2 n$.

2. En déduire l'inclusion $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{L}^2$ où L^2 désigne la classe des problèmes décidables par une machine déterministe en temps $\log^2 n$.

4.4 Théorèmes de hiérarchie

On montre que si le temps ou l'espace alloué est augmenté, la classe des problèmes qui peuvent être résolus croît strictement. Il est cependant nécessaire de supposer que la ressource supplémentaire soit réellement utilisable. Ceci fait l'objet de la définition suivante.

Définition 4.46. Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est dite *constructible* en temps (resp. en espace) s'il existe une machine de Turing qui calcule pour une entrée 1^n le mot $1^{f(n)}$ en temps $O(f(n))$ (resp. en espace $O(f(n))$).

Il est facile de vérifier que la classe des fonctions constructibles en temps ou en espace contient toutes les fonctions usuelles $n \mapsto \lfloor \log n \rfloor$, $n \mapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, etc. et

qu'elle est close pour la somme, le produit, l'exponentiation, la composition et toutes les opérations raisonnables.

Théorème 4.47 (de hiérarchie)**.** *Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux fonctions telles que $g = o(f)$. Si f est constructible en temps (resp. en espace), l'inclusion* $\textsc{Time}(g(n)) \subsetneq \textsc{Time}(f(n))$ *(resp.* $\textsc{Space}(g(n)) \subsetneq \textsc{Space}(f(n))$*) est stricte.*

La preuve que chacune des inclusions est stricte est basée sur un argument diagonal. Il est important de noter que ces inclusions ne concernent que les classes de complexités des machines déterministes.

Preuve. La preuve est pratiquement identique pour les deux inclusions. On construit une machine de Turing déterministe qui fonctionne en temps (ou en espace) $O(f(n))$ et qui accepte un langage qui ne peut pas pas être accepté par une machine déterministe en temps (ou en espace) $O(g(n))$.

On suppose fixé un codage des machines de Turing sur un alphabet Σ. On ajoute un nouveau symbole \$ et on construit une machine $\mathcal{M}_0$ d'alphabet d'entrée $\Sigma \cup \{\$\}$. La machine $\mathcal{M}_0$ accepte des entrées de la forme $\langle \mathcal{M} \rangle \$^k$ où $\mathcal{M}$ est une machine de Turing sur l'alphabet $\Sigma \cup \{\$\}$ et k est un entier. Si une entrée w n'est pas de cette forme, elle est rejetée par $\mathcal{M}_0$. Si l'entrée w est de la forme $\langle \mathcal{M} \rangle \$^k$, $\mathcal{M}_0$ simule la machine $\mathcal{M}$ sur l'entrée w en ne dépassant pas le temps (ou l'espace) $f(|w|)$. Pour ce faire, $\mathcal{M}_0$ a au préalable calculé $1^{f(|w|)}$ sur une bande. Si la simulation de la machine $\mathcal{M}$ dépasse le temps (ou l'espace) $f(|w|)$, l'entrée w est rejetée par $\mathcal{M}_0$. Si la simulation de $\mathcal{M}$ sur w aboutit, $\mathcal{M}_0$ accepte si et seulement si $\mathcal{M}$ rejette. □

Corollaire 4.48. *Les inclusions* $\mathrm{P} \subsetneq \textsc{ExpTime}$ *et* $\mathrm{PSpace} \subsetneq \textsc{ExpSpace}$ *sont strictes.*

Preuve. Le théorème précédent montre que l'inclusion $\textsc{Time}(2^n) \subsetneq \textsc{Time}(2^{n^2})$ est stricte. Comme on a bien sûr l'inclusion $\mathrm{P} \subset \textsc{Time}(2^n)$, on a le résultat pour la complexité en temps. Le résultat pour la complexité en espace s'obtient de la même façon. □

4.5 Machines alternantes

Nous introduisons des machines de Turing dites alternantes qui généralisent les machines non déterministes. D'une certaines façon, les machines alternantes sont aux machines non déterministes ce que ces dernières sont aux machines déterministes. Dans une machine déterministe, il y a un unique calcul possible pour chaque entrée. Le non déterministe rend possibles plusieurs calculs sur une même entrée. Celle-ci est acceptée si au moins un de ces calculs est acceptant. L'acceptation utilise donc une quantification existentielle qui constitue une certaine dissymétrie entre un langage et son complémentaire. L'idée des machines alternante est de rétablir la symétrie en introduisant une quantification universelle dans la notion de calcul.

4.5.1 Définitions et exemples

Une machine alternante est très proche d'une machine de Turing usuelle. Elle possède en plus une partition de ces états en deux classes. La différence se situe véritablement dans la notion de calcul.

Définition 4.49 (Machine alternante)**.** Une *machine alternante* est une machine de Turing où l'ensemble Q des états est partitionné $Q = Q_\vee \uplus Q_\wedge$. Les états de $Q_\vee$ et $Q_\wedge$ sont appelés états *existentiels* et *universels*. Par extension, une configuration $C = uqv$ est dite existentielle (resp. universelle) si q est existentiel (resp. universel).

Un calcul d'une machine non déterministe est une suite de configurations consécutives. Par contre, un calcul pour une machine alternante est un arbre.

Définition 4.50 (Calcul)**.** Un *calcul* d'une machine alternante est un arbre fini, étiqueté par des configurations et vérifiant les deux conditions suivantes.

i) Si un nœud x de l'arbre est étiqueté par une configuration existentielle C, alors x a un seul fils étiqueté par une configuration C' tel que $C \to C'$.

ii) Si un nœud x de l'arbre est étiqueté par une configuration universelle C, alors x a un fils étiqueté C' pour chaque configuration C' telle que $C \to C'$.

Il faut faire attention à une confusion. Chaque calcul d'une machine déterministe est une suite de configurations. L'ensemble de ses calculs forme donc un arbre. Pour une machine alternante, chaque calcul est déjà un arbre en soi.

Cette notion de calcul peut être visualisée de la façon suivante. Lorsque la machine est dans un état existentiel, elle choisit une transition comme le ferait une machine déterministe et et l'effectue pour modifier dans sa configuration. Lorsque la machine est dans un état universelle, elle se clône en autant de copies que de transitions possibles. Chacune des copie prend alors en charge une des transitions et commence une nouvelle branche du clacul. Il faut donc imaginer que lors d'un calcul, il existe de multiples copies de la machine. Chacune de ces copies a bien sûr un état et des bandes de travail propres.

Les machines alternantes constituent bien une généralisation des machines non déterministes. Si tous les états d'une machines alternantes sont existentiels, un calcul est un arbre où chaque nœud a seul fils. On retrouve le fonctionnement usuel d'une machine de Turing non déterministe. Si une machine alternante $\mathcal{M}$ est en fait déterministe, son fonctionnement comme machine alternante est identique à son fonctionnement usuel. Puisque pour toute configuration C il existe au plus une seule configuration C' telle que $C \to C'$, tout calcul se réduit à une seule branche. On retrouve alors la définition d'un calcul pour une machine de Turing classique.

Définition 4.51 (Acceptation)**.** Une branche d'un calcul est *acceptante* si au moins un état final apparaît sur celle-ci. Un calcul est *acceptant* si

i) l'étiquette de la racine est la configuration initiale $q_0 w$,

ii) toutes ses branches sont acceptantes.

Le fait que chacune des branches doit être acceptante signifie que lorsque la machine se clone dans un état universel, chacune des copies doit atteindre un état acceptant pour que le calcul soit globalement acceptant. Les états universels réalisent donc un *et logique*. Au contraire, les états existentiels réalisent un *ou logique* dans la mesure où la machine, dans un de ces états, doit trouver au moins une transition qui conduit à un état acceptant. Ceci justifie les notations $Q_\vee$ et $Q_\wedge$ pour les ensembles d'états existentiels et universels.

Pour illustrer la notion de machine alternante, nous donnons une machine alternante qui décide le problème QSat. Rappelons qu'une instance de ce problème est une formule booléenne quantifiée et close (cf. exemple 4.27). L'instance

est positive si la formule est vraie. La machine de Turing est décrite sous la forme d'un algorithme. Il est possible de le traduire en une description explicite d'une machine de Turing même si c'est relativement fastidieux.

L'algorithme fonctionnement de la façon suivante. Il reçoit une formule close avec des variables et des constantes 0 et 1. On suppose pour simplifier la formule mise en forme prénexe. Si la formule est sans quantificateur, elle ne contient que des constantes et des opérateurs. Il suffit donc de l'évaluer. Cette évaluation peut être programmée en temps linéaire dans n'importe quel langage de programmation en manipulant son arbre syntaxique. Ceci conduit à une machine de Turing déterministe en temps polynomial pour l'évaluation.

Si la formule contient au moins une quantification, celle-ci est traitée de la façon suivante. Si le quanficateur est existentiel, la machine choisit la valeur 0 ou 1 pour remplacer la variable et continue avec la formule obtenue. Si le quantificateur est universel, la machine utilise un état universel pour se cloner. Un première copie continue avec la variable remplacée par 0 et une seconde copie continue avec la variable remplacée par 1.

```
1: AlterQSat(Φ)
2: if Φ sans quantification then
3:    eval(Φ)
4: if Φ = ∃ψΦ then
5:    AlterQSat(Φ[ψ ← 0])∨ AlterQSat(Φ[ψ ← 1])
6: if Φ = ∀ψΦ then
7:    AlterQSat(Φ[ψ ← 0])∧ AlterQSat(Φ[ψ ← 1])
```

Algorithme 12: Algorithme alternant pour résoudre QSat

Cet algorithme est très semblable à l'algorithme SolveQSat utilisé pour montrer que le problème QSat est dans la classe PSpace. La méthode de résolution est identique mais le mode de fonctionnement est foncièrement différent. Dans l'algorithme alternant, les deux appels ne sont pas des appels récursifs. L'algorithme n'a pas besoin de revenir pour combiner les résultat des deux appels. Cela est implicitement réalisé par le caractère existentiel ou universel de l'état. Les deux exécutions sont effectuées en parallèle alors que les deux appels récursifs sont effectués l'un après l'autre dans l'algorithme SolveQSat.

Le temps d'exécution de l'algorithme AlterQSat est linéaire en la taille de la formule Φ. Nous verrons que le temps polynomial des machines alternantes correspond à l'espace polynomial des machines classiques : AP = PSpace (cf. théorème 4.58).

4.5.2 Complémentation

Les machines de Turing alternantes rendent très simple le passage d'une machine acceptant un langage à une machine acceptant le complémentaire. Ceci contraste avec les machines non déterministes pour lesquelles il est nécessaire de déterminiser la machine.

Soit $\mathcal{M}$ une machine alternante que nous pouvons supposer normalisée. Ceci signifie qu'elle a deux états particuliers q_+ et q_-, que q_+ est le seul état final et qu'elle se bloque uniquement sur ces deux états. Pour toute configuration $C = uqv$ avec q différent de q_+ et q_-, il existe au moins une configuration C' telle

que $C \to C'$. La procédure de normalisation décrite à la section 3.2.5 s'applique encore à une machine alternante. Cette procédure ajoute une seul étape de calcul $C \to C'$ si aucune n'était possible. Le fait qu'une configuration C soit existentielle ou universelle n'a aucune incidence sur les calculs lorsqu'il existe une seule configuration C' telle que $C \to C'$.

La *machine duale* d'une machine alternante normalisée $\mathcal{M}$ est la machine obtenue en échangeant les états existentiels avec les états universels et en échangeant aussi le rôle de q_+ et q_- comme état final. Plus précisément soit $Q = Q_\vee \uplus Q_\wedge$ la partition des états de $\mathcal{M}$ en états existentiels et universels et soit q_+ son unique état final. Les ensembles d'états existentiels et universels de la machine duale sont respectivement $Q_\wedge$ et $Q_\vee$ et son unique état final est q_-.

Proposition 4.52. *Soit $\mathcal{M}$ une machine alternante normalisée $\mathcal{M}$ qui s'arrête sur toutes les entrées. La machine duale de $\mathcal{M}$ accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{M}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}'$ la machine duale de $\mathcal{M}$ et soit w une entrée de la machine $\mathcal{M}$. Nous montrons que pour toute configuration C accessible de la configuration initiale q_0w, il existe un calcul acceptant partant de C dans $\mathcal{M}$ si et seulement si il n'existe pas de calcul acceptant partant de C dans $\mathcal{M}'$. La preuve est par induction sur la profondeur maximale d'un calcul partant de C (acceptant ou non). Le fait que C soit accessible de q_0w et que la machine $\mathcal{M}$ s'arrête toujours garantit l'existence de cette profondeur maximale. Il faut remarquer que cette profondeur maximale est la longueur maximale d'une suite d'étapes de calcul $C \to C_1 \to \cdots \to C_n$ et qu'elle est la même dans $\mathcal{M}$ et dans $\mathcal{M}'$.

Puisque la machine $\mathcal{M}$ est normalisée, cette profondeur maximale d'un calcul partant de C est nulle si et seulement si l'état de C est q_+ ou q_-. Dans ce cas, le résultat est immédiat puisque q est final dans $\mathcal{M}$ si et seulement si q n'est pas final dans $\mathcal{M}'$.

On suppose maintenant que cette profondeur est un entier n strictement positif. L'état q de la configuration C est différent de q_+ et q_-. On suppose que q est un état existentiel dans $\mathcal{M}$ et donc universel dans $\mathcal{M}'$. Le cas où q est universel dans $\mathcal{M}$ est symétrique. Soient $C_1, \ldots, C_k$ la liste des configurations C' telles que $C \to C'$. Par définition, la profondeur maximale d'un calcul partant d'une des configurations C_i est inférieure à n et l'hypothèse de récurrence s'applique à chacune des configurations C_i. Supposons qu'il existe un calcul acceptant partant de C. Comme C est existentielle, il existe un calcul acceptant partant d'une configuration C_{i_0}. Par hypothèse de récurrence, il n'existe pas de calcul acceptant partant de C_{i_0} dans $\mathcal{M}'$. Comme C est universelle dans $\mathcal{M}'$, il n'existe pas de calcul acceptant partant de C dans $\mathcal{M}'$. Le cas où il n'existe pas de calcul acceptant partant de C dans $\mathcal{M}$ se traite de la même façon. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Il a été remarqué lors de la preuve de la proposition précédente que pour toute entrée w, la profondeur maximale d'un calcul sur w est la même dans $\mathcal{M}$ et sa machine duale. Cette remarque peut être étendue à la taille d'une configuration apparaissant dans un calcul sur w. Les complexités en temps et en espace de $\mathcal{M}$ et sa machine duale sont identiques. Comme la normalisation d'une machine ne change pas ses complexités en temps et en espace, les classes de complexité que nous allons définir pour les machines alternantes sont toutes autoduales.

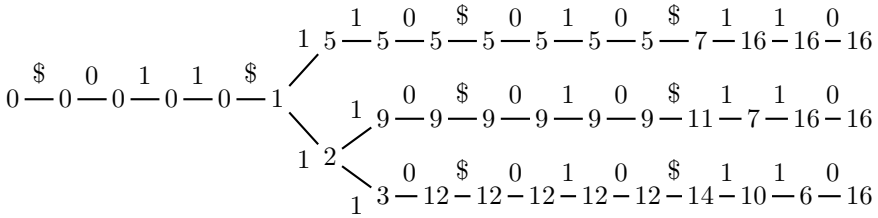


FIG. 4.12 – Calcul sur le mot \$011\$110\$010\$110

Lorsqu'une machine $\mathcal{M}$ est déterministe, le fait qu'un état soit existentiel ou universel est sans importance. On retrouve dans la preuve de la proposition précédente la preuve faite pour les machines déterministes. Il suffit pour une machine déterministe et normalisée d'échanger le rôle de q_+ et q_- comme état final pour avoir une machine qui accepte le complémentaire.

4.5.3 Automates alternants

Nous avons introduit le concept d'alternance pour les machines de Turing mais il s'applique également aux automates. Un automate alternant peut être vu comme une machine de Turing alternante dont toutes les transitions écrivent le symbole lu et déplacent la tête de lecture vers la droite. Toutes les transitions sont de la forme $p, a \to q, a, \triangleright$ où a est une lettre de l'alphabet d'entrée. Les seules configurations possibles dans un calcul sont alors les configurations de la forme uqv ou $w = uv$ est l'entrée.

Pour assurer qu'un automate parcoure entièrement l'entrée avant d'accepter, la notion de calcul pour un automate alternant est légèrement modifiée. Un calcul est encore un arbre étiqueté par des configurations mais on impose que toutes les branches ont même longueur que l'entrée. Le calcul est alors acceptant si toutes les feuilles dun calcul sont étiquetées par des configurations finales. Une autre façon de définir ces calculs serait d'imposer que les transitions conduisant à un état final q soient de la forme $p, \# \to q, \#, \triangleright$. Cela reviendrait à ajouter un marqueur $\#$ à la fin du mot qui permet à l'automate de détecter la fin du mot. Nous préferrons calquer la notion de calcul sur celle des automates classique où un calcul acceptant un mot w est de même longueur que w.

Comme toutes le transitions de l'automate avancent la tête de lecture, toutes les configurations à profondeur k d'un calcul sont de la forme uqv où u est préfixe de longueur k de l'entrée w.

Exemple 4.53. Soit l'automate alternant représenté à la figure 4.13 où les états universels sont marqués par un double cercle. Soit w le mot \$011\$110\$010\$110 sur l'alphabet $\{0, 1, \$\}$. Un calcul acceptant le mot w est donné à la figure 4.12. Chaque nœud du calcul est uniquement étiqueté par l'état au lieu de la configuration complète. Chaque arête de l'arbre est étiquetée par la lettre de w qui est lue par la transition effectuée. Le mot w est bien sûr l'étiquette de chacune des branches.

La proposition suivante assure que l'ensemble des mots acceptés par un automate alternant est un langage rationnel.

Proposition 4.54. *Pour tout automate alternant à n états, il existe un automate non déterministe ayant au plus 2^n états qui accepte le même langage.*

Comme le passage d'un automate non déterministe à un automate déterministe, le passage d'un automate alternant à un automate non déterministe provoque une explosion expoentielle du nombre d'états. L'exemple 4.55 ci-dessous montre qu'il existe même des automate alternants pour lesquels le passage direct à un automate déterministe est doublement exponentiel.

Preuve. La preuve se fait grâce une construction très proche de la construction par sous-ensembles utilisée pour la déterminisation d'un automate. Soit $\mathcal{A}$ un automate alternant et soit Q son ensemble d'états. On construit un automate non déterministe $\mathcal{B}$ dont chaque état est une partie de Q. L'ensemble des états de $\mathcal{B}$ est donc $\mathfrak{P}(Q)$. Les états initiaux sont les singletons $\{i\}$ où i est un état initial de $\mathcal{A}$. Les états finaux sont les parties P incluses dans l'ensemble F des états finaux de $\mathcal{A}$. Les transitions sont les transitions $P \xrightarrow{a} P'$ où les parties P et P' vérifient les conditions suivantes. Pour tout état p et toute lettre a, on note $\delta(p, a)$ l'ensemble $\{q \mid p \xrightarrow{a} q\}$ des états accessibles de p par une transition étiquetée par a. La transition $P \xrightarrow{a} P'$ est une transition de $\mathcal{B}$ si et seulement si

i) pour tout état existentiel p de P, $\delta(p, a) \cap P' \neq \varnothing$,

ii) pour tout état universel p de P, $\delta(p, a) \subseteq P'$.

On montre facilement par récurrence sur la longueur de w qu'il existe un chemin $\{i\} \xrightarrow{w} P$ dans $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe un calcul de $\mathcal{A}$ dont la racine est étiquetée par iw et dont l'ensemble des états apparaissant aux feuilles est exactement P. Puisque les états finaux de $\mathcal{B}$ sont les parties contenant uniquement des états finaux, il est clair que $\mathcal{B}$ accepte les mêmes mots que $\mathcal{A}$. □

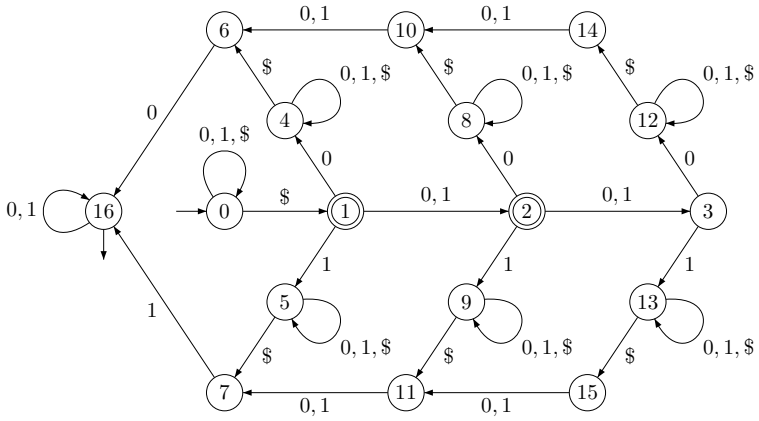


FIG. 4.13 – Exemple d'automate alternant

Exemple 4.55. Soit n un entier positif et soit le langage L_n défini sur l'alphabet $A = \{0, 1, \$\}$ par la formule

$$L_n = \{\$w_1\$w_2\$ \cdots \$w_k\$w \mid w_i, w \in (0+1)^* \text{ et } \exists i \;\; w_i[1, n] = w[1, n]\},$$

où $w[1, n]$ désigne le préfixe de longueur n de w. L'automate de la figure 4.13 accepte le langage L_3. Sur la figure, les états universels sont marqués par un double cercle. Cet automate fonctionne de la façon suivante. L'état initial qui est existentiel permet de choisir un mot w_i dont le préfixe de longueur n coïncide

avec celui de w. Ensuite les états universels vérifient que chacune des n premières lettres de w_i est égal à la lettre à la même position dans w. Pour tout $n \geq 1$, un automate similaire avec $5n+2$ états peut être construit. Par contre, il n'est pas difficile de démontrer que tout automate déterministe acceptant L_n possède au moins 2^{2^n} états. Cet exemple montre la puissance de l'alternance.

Exercice 4.56.
1. Montrer que tout automate déterministe acceptant le langage L_n de l'exemple 4.55 possède au moins 2^{2^n} états.
2. Montrer que le nombre minimal d'états d'un automate non déterministe acceptant L_n est de l'ordre de 2^n. On pourra montrer que ce nombre est compris entre 2^{Kn} et $2^{K'n}$ pour deux constantes K et K'.

Solution.

1. On montre que le nombre de quotients à gauche de L_n est au moins égal à 2^{2^n}. Pour un ensemble $P = \{w_1, \ldots, w_k\}$ de mots de longueur n, on note u_P le mot $\$w_1\$w_2\$\cdots\$w_k\$$. L'égalité $u_P^{-1}L_n \cap (0+1)^n = P$ montre que les quotients $u_P^{-1}L_n$ sont deux à deux disjoints quand P parcourt toutes les parties de $(0+1)^n$. Comme le nombre de telles parties est justement 2^{2^n}, on obtient le résultat.
2. Le langage L_n est accepté par un automate alternant ayant $5n+2$ états. la méthode pour passer d'un automate alternant à un automate non déterministe montre que L_n est accepté par un automate non déterministe ayant au plus 2^{5n+2} états. D'autre part la méthode de déterminisation montre que tout langage accepté par un automate non déterministe à m états est accepté par un automate déterministe ayant au plus 2^m. D'après le résultat de la question précédente, tout automate non déterministe acceptant L_n a au moins 2^n états.

À la fin du chapitre précédent, nous avons évoqué des automates boustrophédons qui peuvent avancer ou reculer la tête de lecture à chaque transition. Nous avons en particulier montré que les langages acceptés par ces automates sont rationnels. Il est possible d'introduire des automates alternants boustrophédons. Les langages acceptés par ces automates sont encore rationnels.

4.5.4 Classes de complexité

Le temps d'un calcul d'une machine de Turing alternante est par définition la profondeur de l'arbre. L'espace du calcul est la taille maximale d'une configuration apparaissant dans le calcul.

Définition 4.57. Pour une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on définit les classes
- $\text{ATIME}(f(n))$ est l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing alternante en temps $O(f(n))$.
- $\text{ASPACE}(f(n))$ est l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing alternante en espace $O(f(n))$.

On définit alors les classes de complexité suivantes.

$$\text{AP} = \bigcup_{k\geq 0} \text{ATIME}(n^k)$$

$$\text{AL} = \text{ASPACE}(\log n) \qquad \text{APSPACE} = \bigcup_{k\geq 0} \text{ASPACE}(n^k)$$

Nous avons introduit ces classes particulières car elles sont reliées à d'autres classes déjà introduites pour les machines classiques. Il est bien sûr possible de reprendre toutes les classes déjà vues dans le cadre des machines alternantes. Pour la classe AL, il faut bien sûr considérer des machines avec une bande d'entrée et une bande de sortie non prises en compte dans l'espace comme nous l'avons fait pour l'espace logarithmique.

Le théorème suivant relie les classes de complexité pour les machines alternantes aux classes pour les machines classiques. On retrouve que les classes de complexité des machines alternantes sont autoduales. Elles sont en relation avec des classes de machines déterministes ou en espace qui sont autoduales.

Théorème 4.58. *Si la fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ vérifie $t(n) \geq n$ pour n assez grand, on a*

$$\text{ATime}(t(n)) \subseteq \text{Space}(t(n)) \subseteq \text{ATime}(t^2(n))$$
$$\text{AP} = \text{PSpace}.$$

Si la fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ vérifie $t(n) \geq \log n$ pour n assez grand, on a

$$\text{ASpace}(t(n)) = \text{Time}(2^{O(t(n))})$$
$$\text{AL} = \text{P} \quad \textit{et} \quad \text{APSpace} = \text{ExpTime}$$

L'intérêt des machines alternantes est multiple. D'une part, elles offrent un modèle de calcul avec un certain parallélisme et d'autre part, elles fournissent d'autres caractérisations de classes déjà introduites comme P, PSpace et ExpTime. Il faut reconnaître que le parallélisme de ces machines alternantes est assez théorique et très éloigné des parallélismes mis en œuvre en pratique. Le nombre de processus, c'est-à-dire la largeur d'un calcul n'est pas borné. La communication entre processus s'effectue uniquement à la terminaison de ceux-ci.

Preuve. On commence par montrer l'inclusion $\text{ATime}(t(n)) \subseteq \text{Space}(t(n))$. Soit $\mathcal{A}$ une machine alternante en espace $t(n)$ et soit w une entrée de taille n. La machine déterministe $\mathcal{M}$ effectue un parcours en profondeur du graphe des configurations pour déterminer si la configuration initiale peut donner un calcul acceptant. Au cours du calcul, la machine $\mathcal{M}$ ne mémorise pas la configuration courante. Elle se contente de mettre dans une pile les transitions effectuées. Comme le nombre de transitions effectuées est borné par $t(n)$, l'espace de $\mathcal{M}$ est de taille $O(t(n))$.

On montre ensuite l'inclusion $\text{Space}(t(n)) \subseteq \text{ATime}(t^2(n))$. Soit $\mathcal{M}$ une machine en espace $t(n)$ et soit w une entrée de taille n. La machine alternante $\mathcal{A}$ simule l'algorithme donné pour la preuve du théorème de Savitch. Cet algorithme détermine s'il existe un calcul de longueur k d'une configuration C à une configuration C' en trouvant une configuration C'' telle qu'il existe un calcul de longueur $\lceil k/2 \rceil$ de C à C' et un calcul de longueur $\lfloor k/2 \rfloor$ de C'' à C'. La machine $\mathcal{A}$ utilise des configurations existentielles pour déterminer la configuration intermédiaire C'' et elle utilise une configuration universelle pour vérifier que d'une part, il existe un chemin de C à C'' et que d'autre part il existe un chemin de C'' à C'. La machine $\mathcal{A}$ fonctionne en temps $(O(t^2(n))$.

On montre maintenant l'inclusion $\text{ASpace}(t(n)) \subseteq \text{Time}(2^{O(t(n))})$. Soit $\mathcal{A}$ une machine alternante en espace $t(n)$ et soit w une entrée de taille n. La machine déterministe $\mathcal{M}$ construit le graphe des configurations de la machine $\mathcal{A}$

qui sont accessibles à partir de la configuration initiale q_0w. Ce graphe est de taille $2^{O(t(n))}$ et il peut être construit en temps $2^{O(t(n))}$. Ensuite la machine $\mathcal{M}$ marque toutes les configurations qui sont le début d'un calcul acceptant de $\mathcal{A}$. Elle commence par marquer toutes les configurations acceptantes. Une configuration existentielle C est marquée dès qu'une configuration C' telle $C \to C'$ est marquée. Une configuration universelle C est marquée dès que toutes les configurations C' telle $C \to C'$ sont marquées. Ce processus de marquage se poursuit jusqu'à ce que plus aucune configuration ne puisse être marquée. L'entrée w est acceptée si la configuration initiale q_0w est marquée. Ce marquage peut être mené de façon déterministe en temps $2^{O(t(n))}$.

On montre finalement la dernière inclusion $\text{TIME}(2^{O(t(n))}) \subseteq \text{ASPACE}(t(n))$. C'est la construction la plus astucieuse. Soit $\mathcal{M}$ une machine déterministe en temps $2^{O(t(n))}$ et soit w une entrée de taille n. La machine alternante $\mathcal{A}$ vérifie que le tableau introduit dans la preuve du théorème de Cook et Levin peut être rempli. Comme la machine $\mathcal{M}$ est déterministe, ce tableau peut être rempli de manière unique. La machine $\mathcal{A}$ utilise des configurations universelles pour vérifier que chaque case de la dernière ligne peut être remplie. Le contenu de la case est choisi par une configuration existentielle. Ensuite, la machine utilise à nouveau des configurations universelles pour vérifier que le contenu de chaque case est cohérent avec les contenus des cases au dessus qui sont à leur tour choisies. La machine ne stocke pas le tableau. Elle utilise uniquement un nombre fini de pointeurs sur des cases du tableau. Elle utilise donc un espace $O(t(n))$. □

4.6 Compléments

4.6.1 Machines à une bande en temps $o(n \log n)$

On montre dans cette partie que toute machine de Turing à une seule bande qui fonctionne en temps $o(n \log n)$ accepte un langage rationnel. L'ingrédient essentiel de la preuve est l'utilisation des suites de franchissements (*cutting sequences* en anglais) qui constituent un outil très classique. L'intérêt du théorème suivant est autant dans le résultat que dans la technique de preuve.

Théorème 4.59 (Hartmanis 1968)**.** *Une machine de Turing à une seule bande qui fonctionne en temps $o(n \log n)$ accepte nécessairement un langage rationnel.*

Pour montrer que ce résultat est optimal, on commence par donner un exemple de machine de Turing à une seule bande qui fonctionne en temps $O(n \log n)$ et qui accepte un langage non rationnel.

Exemple 4.60. La machine représentée à la figure 4.14 accepte l'ensemble $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a et de b. Le temps de calcul de cette machine pour une entrée de longueur n est de l'ordre $n \log n$. Comme ce langage n'est pas rationnel, le théorème précédent implique que cette machine est optimale.

Cette machine fonctionne de la manière suivante. Elle vérifie que le nombre d'occurrences de a est égal au nombre d'occurrences de b en remplaçant progressivement les a et les b par des 0. Lors d'un premier passage sur l'entrée, la machine remplace par 0 un a sur 2 et un b sur 2, tout en vérifiant que la parité du nombre de a est égale à la parité du nombre de b. Ceci est réalisé par les états de 1 à 4. L'état 5 ramène la tête de lecture au début de la bande. Lors

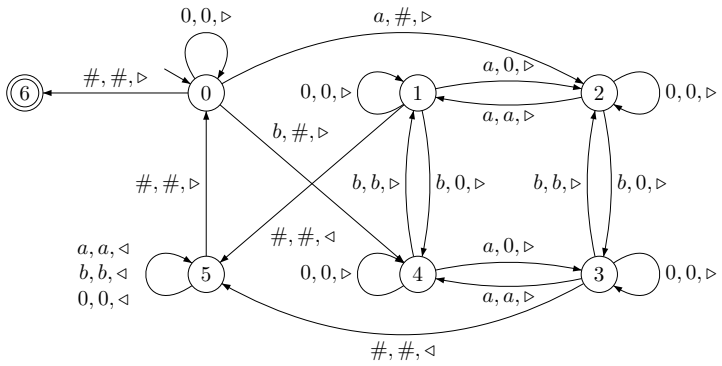


FIG. 4.14 – Machine acceptant $\{w \in (a+b)^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

d'un second passage, la machine ignore les 0 et remplace par 0 un a sur 2 qui reste et un b sur 2 qui reste, tout en vérifiant encore que la parité du nombre de a est égale à la parité du nombre de b. La machine poursuit ainsi ses passages qui divisent par 2 les nombres de a et de b restant. La machine accepte quand il ne reste plus aucun a ou b sur la bande. Le nombre de passages effectués est proportionnel à $\log_2 n$ et la machine fonctionne bien en temps $O(n \log n)$. Si $|w|_a \neq |w|_b$, la machine échoue au k-ième passage où k est le plus petit entier tel que $|w|_a \not\equiv |w|_b \mod 2^k$.

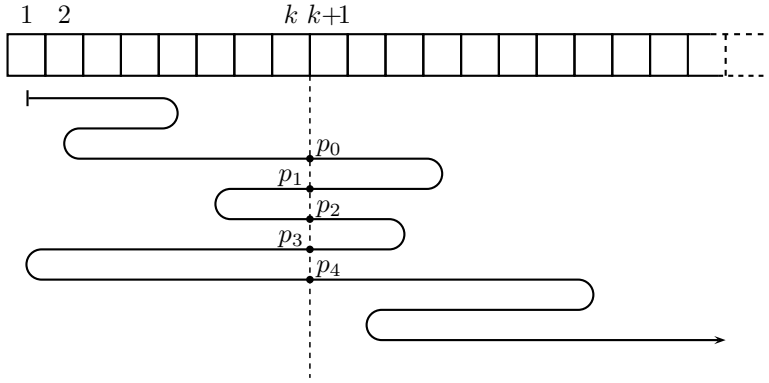


FIG. 4.15 – Franchissements en k

Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing et soit $k \geq 1$ un entier. On dit qu'une étape de calcul $C \to C'$ de $\mathcal{M}$ *franchit* la frontière entre les cases k et $k+1$ si $C = upav$, $C' = ubqv$ et $|u| = k$ en appliquant une transition $p, a \to q, b, R$ ou si $C = ucpav$, $C' = uqcbv$ et $|u| = k$ en appliquant une transition $p, a \to q, b, L$. Soit $\gamma = C_0 \to \cdots \to C_n$ un calcul de $\mathcal{M}$ où chaque configuration C_i est égale à $u_i q_i v_i$. Soit $i_0 < \cdots < i_m$ la suite des indices où les étapes $C_i \to C_{i+1}$ franchissent la frontière k. On appelle *suite de franchissements* de γ en k, la suite d'états $p_0, \ldots, p_m$ où $p_j = q_{i_j+1}$. C'est l'état de la machine juste après le franchissement qui est pris en considération (cf. figure 4.15).

On commence par démontrer quelques propriétés des suites de franchisse-

ments puis on montre un résultat intermédiaire où on suppose que la machine fonctionne en temps linéaire. Dans la suite, on appelle *contenu de bande*, un mot infini $x = a_0a_1a_2\ldots$ constitué de symboles blancs # à partir d'un certain rang. On dit que γ est un calcul sur un contenu de bande x si x est le contenu de la bande au début de γ. On appelle le *type* d'un calcul le fait qu'il soit acceptant ou non. Pour une machine $\mathcal{M}$, on note respectivement $t_{\mathcal{M}}(n)$ et $r_{\mathcal{M}}(n)$ la longueur maximale d'un calcul et la longueur maximale d'une suite de franchissements d'un calcul sur une entrée de longueur n. On note $|Q|$ le nombre d'états de $\mathcal{M}$.

Le lemme suivant permet de combiner deux calculs où apparaît la même suite de franchissements.

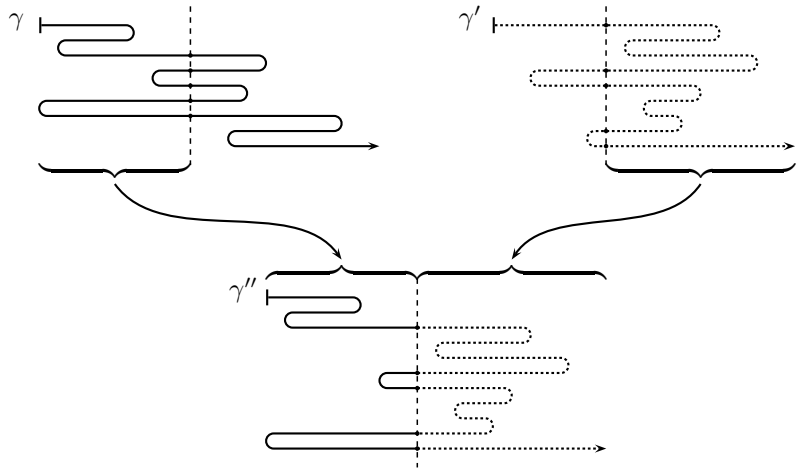


FIG. 4.16 – Jonction de calculs

Lemme 4.61. *Soient $x = uy$ et $x' = u'y'$ deux contenus de bande. Soient γ et γ' deux calculs sur x et x' tels que la suite de franchissements de γ en $|u|$ est identique à la suite de franchissements de γ' en $|u'|$. Alors, il existe un calcul γ'' sur uy' qui est identique à γ sur u et à γ' sur y'.*

Si la suite de franchissements commune à γ et γ' en $|u|$ et en $|u'|$ est de longueur paire, le chemin γ'' se termine comme γ. Si au contraire, cette suite est de longueur impaire, le chemin γ'' se termine comme γ'. L'idée de la preuve est illustrée à la figure 4.16.

Preuve. On construit un calcul γ'' sur uy' en combinant les deux calculs γ et γ'. Soit $p_0, \ldots, p_n$ la suite de franchissements de γ en $|u|$ et de γ' en $|u'|$. Le calcul γ'' est obtenu en raccordant les calculs γ et γ' au niveau des franchissements en $p_0, \ldots, p_n$. Le début de γ'' est le début de γ jusqu'au premier franchissement en p_0. Ensuite le calcul γ'' se poursuit comme le calcul γ' après le premier franchissement et ceci jusqu'au deuxième franchissement en p_1. Après le deuxième franchissement, il reprend comme γ jusqu'au troisième franchissement en p_2. L'alternance se poursuit ainsi jusqu'au dernier franchissement. Le calcul γ'' se termine comme le calcul γ si n impair et comme γ' si n est pair. □

Corollaire 4.62. *Soit γ un calcul sur une entrée $x = uvy$ tel que les suites de franchissements en $|u|$ et $|uv|$ sont identiques. Il existe alors des calculs sur uy et $uvvy$ de même type que γ.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent au deux factorisations $x = u \cdot vy = uv \cdot y$ de l'entrée x. □

Proposition 4.63. *Une machine de Turing $\mathcal{M}$ à une seule bande telle que $r_{\mathcal{M}}(n) \leq K$ pour tout $n \geq 0$ accepte nécessairement un langage rationnel.*

On rappelle qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble E *sature* un sous-ensemble F de E si toute classe d'équivalence de $\sim$ est soit incluse dans F soit disjointe de F. Dans ce cas, F est égal à l'union des classes qui l'intersectent.

On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur A^* est dite *régulière à droite* si $w \sim w'$ implique $wa \sim w'a$ pour tous mots w et w' et toute lettre $a \in \Sigma$. Une telle relation est en quelque sorte une demi congruence puisqu'une congruence est une relation d'équivalence qui est simultanément régulière à droite et à gauche. Un langage L est rationnel s'il est saturé par une relation d'équivalence d'indice fini qui est régulière à droite. D'une part, la congruence syntaxique est bien sûr régulière à droite. D'autre part, il est très facile de construire un automate déterministe à partir d'une relation d'équivalence régulière à droite. Il suffit de prendre pour états les classes de cette relation d'équivalence et les transitions de la forme $[w] \xrightarrow{a} [wa]$ où $[w]$ dénote la classe de w.

Preuve. On commence par remplacer la machine $\mathcal{M}$ par une machine $\mathcal{M}'$ qui accepte uniquement en rencontrant un symbole #. On suppose la machine $\mathcal{M}$ normalisée avec un état acceptant q_+. On ajoute une transition $q_+, a \to q_+, a, R$ pour chaque symbole $a \in \Gamma \setminus \{\#\}$ et une transition $q_+, \# \to q_{++}, \#$ où q_{++} est un nouvel état qui devient l'état final. La nouvelle machine $\mathcal{M}'$ vérifie $r_{\mathcal{M}'}(n) \leq K + 1$.

Pour un mot d'entrée w, on note F_w l'ensemble des suites de franchissements en $|w|$ des calculs sur une entrée de la forme wv pour un mot v. On définit la relation $\sim$ sur Σ^* par $w \sim w'$ si et seulement si $F_w = F_{w'}$. Comme les suites de franchissements de $\mathcal{M}$ sont de longueur bornée par K, la relation $\sim$ est d'indice fini.

Il reste à montrer que la relation $\sim$ est régulière à droite et qu'elle sature le langage L accepté par $\mathcal{M}$. Soient w et w' deux mots tels que $w \sim w'$ et soit a une lettre de Σ. Soit $p_0, \ldots, p_n$ une suite de franchissements de F_{wa}. Il existe un mot v tel que $p_0, \ldots, p_n$ est la suite de franchissements en $|wa|$ d'un calcul γ sur une entrée wav. Puisque $F_w = F_{w'}$, il existe un calcul γ' sur une entrée $w'v'$ ayant même suite de franchissements en $|w'|$ que γ en $|w|$. En appliquant le lemme 4.61, on trouve un chemin γ'' sur l'entrée $w'' = w'av$ ayant même suite de franchissements en $|w'|$ que γ en $|w|$ et qui se comporte comme γ sur la partie av de l'entrée. Ceci montre que $p_0, \ldots, p_n$ est aussi la suite de franchissements de γ'' en $w'a$ et appartient donc à $F_{w'a}$. Par symétrie, on a $F_{wa} = F_{w'a}$ et la relation $\sim$ est donc régulière à droite.

Si w est mot d'entrée accepté par la machine $\mathcal{M}$, il existe un calcul acceptant γ sur w qui se termine sur un symbole #. Si w' vérifie $w' \sim w$, il existe un calcul γ' sur une entrée $w'v$ ayant même suite de franchissements en $|w'|$ que γ en $|w|$. En appliquant à nouveau le lemme 4.61, il existe un calcul γ'' sur w' ayant même suite de franchissements en $|w'|$. Ce calcul peut être choisi acceptant et w' est aussi accepté par $\mathcal{M}$. □

Lemme 4.64. *Soit une machine $\mathcal{M}$ telle que $t_{\mathcal{M}}(n) \leq Kn$ pour une constante K. Il existe une machine $\mathcal{M}'$ équivalente à $\mathcal{M}$ telle que $t_{\mathcal{M}'}(n) \leq 2Kn$ et qui n'utilise que la partie de la bande où est écrite l'entrée.*

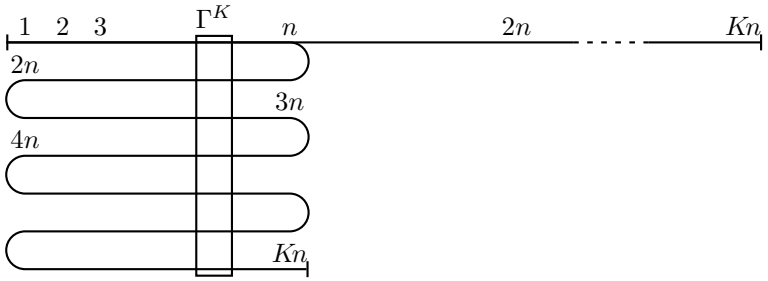


FIG. 4.17 – Repliement des Kn cellules sur les n premières cellules

Preuve. Comme la machine $\mathcal{M}$ vérifie $t_{\mathcal{M}}(n) \leq Kn$, elle utilise au plus Kn cellules de bande. L'idée générale de la construction est de replier la bande sur ses n premières cellules. Ceci revient à travailler sur le nouvel alphabet Γ^K. La nouvelle machine $\mathcal{M}'$ effectue une transition de plus lorsqu'elle passe sur les positions où est repliée la bande. Comme il y a au plus une telle transition supplémentaire pour chaque transition de $\mathcal{M}$, on a la majoration $t_{\mathcal{M}'} \leq 2Kn$. □

La proposition suivante due à Hennie est une première étape dans la preuve du théorème.

Proposition 4.65 (Hennie 1965)**.** *Une machine de Turing $\mathcal{M}$ à une seule bande telle que $t_{\mathcal{M}}(n) \leq Kn$ accepte nécessairement un langage rationnel.*

La preuve de la proposition est basée sur le lemme suivant.

Lemme 4.66. *Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing à une seule bande telle que $t_{\mathcal{M}}(n) \leq Kn$ et qui n'utilise que la partie de la bande où est écrite l'entrée. Si un calcul a une suite de franchissements de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$, alors il existe au moins trois suites de franchissements identiques de longueur strictement inférieure à K.*

Preuve. Soit γ un calcul sur une entrée de longueur n ayant au moins une suite de franchissements de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$. Pour $i \geq 1$, la longueur de la suite de franchissements de γ en i est notée l_i. Puisque la machine est supposée n'utiliser que la partie de la bande où est écrite l'entrée, la valeur de l_i est égale à 0 pour tout $i > n$. La longueur de γ est égale à la somme $\sum_{i=1}^{n} l_i$. Puisque la machine vérifie $t_{\mathcal{M}}(n) \leq Kn$, on a l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} l_i \leq Kn$. Soit L le nombre de suites de franchissement de longueur strictement inférieure à K. Parmi les $n - L$ suites de franchissements de longueur au moins égale à K, au moins une est de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$. On a alors les inégalités

$$2K|Q|^K + K + (n - L - 1)K \leq \sum_{i=1}^{n} l_i \leq Kn.$$

En simplifiant, on obtient la minoration $L \geq 2|Q|^K$. Le nombre de suites différentes de longueur strictement inférieure à K est $1 + |Q| + \cdots + |Q|^{K-1}$ qui est majoré par $|Q|^K - 1$. Comme $L \geq 2|Q|^K$, il existe au moins trois suites égales de longueur strictement inférieure à K. □

On est maintenant en mesure d'établir la proposition 4.65.

Preuve de la proposition 4.65. Grâce au lemme 4.64, il peut être supposé que la machine $\mathcal{M}$ utilise uniquement la portion de la bande où est écrite l'entrée. On montre que $r_{\mathcal{M}}(n)$ est borné par $2K|Q|^K + K$. Supposons par l'absurde qu'il existe un calcul sur une entrée w qui a une suite de franchissements de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$. Le chemin est en outre choisi de telle sorte que w soit de longueur minimale. D'après le lemme précédent, il existe trois suites de franchissements identiques de longueur inférieure à K. Deux au moins parmi ces trois suites se situent du même côté de la suite de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$. Grâce au corollaire 4.62, il existe un autre calcul sur une entrée strictement plus courte que w ayant encore une suite de franchissements de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$. Ceci contredit le choix de w et montre que $r_{\mathcal{M}}(n)$ est effectivement borné par $2K|Q|^K + K$. Grâce à la proposition 4.63, le langage accepté par la machine $\mathcal{M}$ est rationnel. □

On termine par la preuve du théorème 4.59 qui utilise des arguments similaires à la preuve de la proposition 4.65 mais de manière plus fine.

Preuve du théorème 4.59. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing à une seule bande telle que $\lim_{n\to\infty} t_{\mathcal{M}}(n)/\log n = 0$. Si $(r_{\mathcal{M}}(n))_{n\geq 0}$ est bornée, le résultat est acquis grâce à la proposition 4.63. On suppose donc maintenant que $(r_{\mathcal{M}}(n))_{n\geq 0}$ n'est pas bornée. On définit par récurrence une suite d'entiers $(n_i)_{i\geq 0}$ de la façon suivante. On pose $n_0 = 0$ et n_i étant défini, on choisit pour n_{i+1} le plus petit entier tel que $r_{\mathcal{M}}(n_{i+1}) > r_{\mathcal{M}}(n_i)$. Par construction, la suite $(n_i)_{i\geq 0}$ vérifie $r_{\mathcal{M}}(n_0) < r_{\mathcal{M}}(n_1) < r_{\mathcal{M}}(n_2) < \cdots$ et elle est strictement croissante. Pour chaque $i \geq 0$, soit γ_i un calcul sur une entrée w_i tel que w_i est de longueur n_i et γ_i a une suite de franchissements de longueur $r_{\mathcal{M}}(n_i)$.

Chaque calcul γ_i n'a pas trois suites de franchissements identiques parmi les n_i premières suites. Sinon, deux de ces suites de franchissements se situent du même côté de la suite de longueur $r_{\mathcal{M}}(n_i)$. Grâce au corollaire 4.62, il existe un autre calcul sur une entrée strictement plus courte que w_i ayant encore une suite de franchissements de longueur $r_{\mathcal{M}}(n_i)$. Ceci contredit le choix de n_i. Le nombre de suites de franchissements distinctes de longueur inférieure ou égale à $r_{\mathcal{M}}(n_i)$ est $1 + |Q| + \cdots + |Q|^{r_{\mathcal{M}}(n_i)}$. Ce nombre est majoré par $|Q|^{r_{\mathcal{M}}(n_i)+1} - 1$. Comme chaque suite de franchissements apparaît au plus deux fois parmi les n_i premières, on obtient l'inégalité $2|Q|^{r_{\mathcal{M}}(n_i)+1} \geq n_i$. En prenant le logarithme, on a $r_{\mathcal{M}}(n_i) \geq \log_{|Q|} n_i - \log_{|Q|} 2 - 1 \geq \log_{|Q|} n_i - 2$. Le temps minimal d'un calcul γ_i survient lorsque toutes les suites de franchissements de longueur j pour $0 \leq j \leq r$ apparaissent deux fois, l'entier r étant le plus petit possible pour que ces suites soient distinctes. On obtient donc l'inégalité

$$t_{\mathcal{M}}(n_i) \geq 2\sum_{j=1}^{r} j|Q|^j \geq 2r|Q|^r \quad \text{où} \quad r = \lfloor \log_{|Q|} n_i \rfloor - 3.$$

En utilisant finalement l'inégalité $r \geq \log_{|Q|} n_i - 3$, on arrive à l'inégalité $t_{\mathcal{M}}(n_i) \geq 2(\log_{|Q|} n_i - 3)n_i|Q|^{-3}$ qui implique que $t_{\mathcal{M}}(n_i)/n_i \log n_i$ ne tend pas vers 0 contrairement à l'hypothèse de départ. Ceci montre que la $r_{\mathcal{M}}(n)$ est en fait borné et que le langage accepté par $\mathcal{M}$ est rationnel. □

Bibliographie

[ABB97] J.-M. Autebert, J. Berstel, and L. Boasson. Context-free languages and pushdown automata. In *Handbook of formal languages*, volume 1, pages 111–174. Springer, 1997.

[Alm94] J. Almeida. *Finite Semigroups and Universal Algebra*. World Scientific, 1994.

[ASU86] Alfred V. Aho, Ravi Sethi, and Jeffrey D. Ullman. *Compilers : Principles, Techniques, and Tools*. Addison-Wesley, 1986.

[Aut87] J.-M. Autebert. *Langages algébriques*. Masson, 1987.

[Aut92] J.-M. Autebert. *Calculabilité et Décidabilité*. Masson, 1992.

[BB90] J. Berstel and L. Boasson. Context-free languages. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 2, pages 59–102. Elsevier, 1990.

[BBC93] G. Beauquier, J. Berstel, and P. Chrétienne. *Éléments d'algorithmique*. Masson, 1993.

[BP84] J. Berstel and D. Perrin. *Theory of Codes*. Academic Press, 1984.

[Cas02] J. Cassaigne. *Algebraic Combinatorics on Words*, chapter Unavoidable patterns. Cambridge University Press, 2002.

[HU79] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, 1979.

[Koz97] D. C. Kozen. *Automata and Computability*. Springer, 1997.

[Lib04] L. Libkin. *Elements of Finite Model theory*. Springer, 2004.

[Lot83] M. Lothaire. *Combinatorics on Words*, volume 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.

[Pap95] C. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1995.

[Per90] D. Perrin. Finite automata. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 1, pages 1–57. Elsevier, 1990.

[Pin84] J.-É. Pin. *Variétés de Langages Formels*. Masson, 1984.

[Sak03] J. Sakarovitch. *Éléments de théorie des automates*. Vuibert, 2003.

[Sip97] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. PWS publishing Company, 1997.

[Ste90] J. Stern. *Fondements mathématiques de l'informatique*. McGraw-Hill, 1990.

[Str94] H. Straubing. *Finite Automata, Formal Logic and Circuits Complexity.* Progress in theoretical computer science. Birkhäuser, 1994.

[vLW92] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics.* Cambridge University Press, 1992.

La bibliographie a été délibérément limitée aux références essentielles. Elle propose uniquement des livres et des chapitres de livres destinés à des non spécialistes. Les articles originaux ont été écartés au profit de documents plus pédagogiques. Par contre, beaucoup des ouvrages cités contiennent une bibliographie plus complète sur chacun des sujets traités.

Certains livres couvrent l'ensemble des quatre chapitres du cours. Dans cette catégorie, la référence la plus classique est [HU79]. D'autres livres comme [Sip97] ou [Koz97] proposent un traitement un peu plus moderne.

Un certain nombre de chapitres de livres de référence sont cités. Ces chapitres présentent l'intérêt de couvrir un sujet tout en étant relativement concis. Les chapitres [Per90] et [BB90] traitent ainsi des langages rationnels et des langages algébriques. Le chapitre [Cas02] est consacré aux motifs inévitables.

Des livres plus spécialisés offrent un approfondissement de certains sujets. Le livre [Sak03] traite de manière très complète les langages rationnels. Le livre [Pap95] donne un survol très complet de la théorie de la complexité.

D'autres livres couvrent des sujets à peine effleurés dans ce cours. Le livre [BBC93] couvre l'algorithmique. Un de ses chapitres traite la minimisation d'automates et l'algorithme d'Hopcroft. Le livre [vLW92] contient une preuve du théorème de Ramsey. Les livres [Pin84] et [Alm94] développent la théorie des semigroupes. Le livre [Str94] couvre très bien les liens entre automates, semigroupes et logique. Le livre [Lib04] traite de la théorie des modèles et en particulier des liens entre les automates et la logique.

Index