Mathématiques générales

Gaetan Bisson

https://gaati.org/bisson/

Introduction

Ce cours introduit les concepts mathématiques fondamentaux en commençant par deux éléments essentiels du langage : la logique et les ensembles. La rigueur qu'ils procurent sera alors appliquée à l'étude des fonctions et des suites, deux objets centraux en analyse.

Table des matières

Chapitre 1

Langage mathématique

En mathématiques, il est extrêmement important de s'exprimer sans ambiguïté. On utilise donc un langage précis et, pour éviter les longues phrases, on a souvent recours à des formules faisant intervenir des symboles spécifiques. Les apprendre permet de lire et d'écrire les mathématiques, et entraîne à penser clairement.

1.1 Propositions

Une proposition est une phrase dont on peut affirmer qu'elle est soit vraie soit fausse. On peut l'écrire soit avec des mots soit avec des symboles — tant qu'ils sont bien définis !

Exemple. *Considérons les phrases :*
- « $2+3=5$ » *: proposition vraie.*
- *« L'UPF est en Écosse » : proposition fausse.*
- *« Si* $x+1=2$*, alors* $x+2=3$ *» : proposition vraie.*
- « $x>2$ » *: pas une proposition ! (Ça dépend de la valeur de* x*.)*

1.2 Ensembles de nombres classiques

En mathématiques, on travaille surtout avec les nombres suivants :
- les entiers naturels : $0, 1, 2, 3\dots$ $\mathbb{N}$
- les entiers relatifs : $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\dots$ $\mathbb{Z}$
- les nombres rationnels : $\frac{x}{y}$ avec x et y entiers et $y \neq 0$ (un quart, $\frac{-2}{3}$, etc.) $\mathbb{Q}$
- les nombres réels : quantités mesurables (nombres décimaux, $\sqrt{2}$, π, etc.) $\mathbb{R}$
- les nombres complexes : $a+b\,i$ avec a et b réels pour la quantité i vérifiant $i^2=-1$ $\mathbb{C}$

Exemple. *Ces propositions sont vraies :*
- *Si* x *est dans* $\mathbb{Q}$*, alors* x *est dans* $\mathbb{R}$*.*
- *Pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$*, si* $x>2$*, alors* $x^2>4$*.*
- *Si* x *est dans* $\mathbb{Z}$*, alors* x^2 *est dans* $\mathbb{N}$*.*
- *Il existe un unique* x *dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $2x=1$*.*
- *Tout réel admet un entier plus grand que lui.*

1.3 Quantificateurs

Pour écrire ces propositions de manière plus succincte, on utilise les symboles :

— $\forall$: « pour tout »
— $\exists$: « il existe au moins un »
— $\exists!$: « il existe un unique »
— $\in$: « appartient à »

Dans le langage courant, une phrase peut exprimer une propriété universelle sans qu'aucun mot particulier (comme « pour tout ») n'y figure. Cependant, en mathématiques, le quantificateur doit toujours figurer explicitement dans l'expression.

Exemple. *On peut donc ré-écrire les propositions ci-dessus en :*
— $\forall x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.
— $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \in \mathbb{N}$.
— $\exists! x \in \mathbb{R}, 2x = 1$.
— $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant x$.

Attention. L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental : inverser-les dans la dernière proposition ci-dessus et elle devient fausse. Toutefois, on peut intervertir deux quantificateurs de même type (« pour tout » ou « il existe ») lorsqu'ils se succèdent.

Exemple. — *Considérons la proposition$P(x, y)$ qui signifie « x aime y ». Le sens des deux phrases suivantes est très différent :*

$$\forall x \exists y, P(x, y) \quad \textit{et} \quad \exists y \forall x, P(x, y).$$

— *La proposition $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, p \geqslant n$ est fausse mais $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p \geqslant n$ est vraie.*

Exercice. *La proposition « $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x^2 - y = 0$ » est-elle vraie ? Et « $\exists x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{R}, (1 + x)y = 0$ » ?*

1.4 Opérateurs

On utilise les symboles suivants pour combiner des propositions.

1.4.1 Conjonction « et »

La conjonction $p \wedge q$ est vraie si et seulement si p et q sont vraies.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple, « $(2 + 3 = 5) \wedge$ (L'UPF est en Écosse) » est une proposition fausse.

1.4.2 Disjonction « ou »

La disjonction $p \vee q$ est vraie si et seulement si au moins l'une de p ou q est vraie.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Par exemple, « $(2+3=5) \vee$ (L'UPF est en Écosse) » est une proposition vraie.

Exercice. *La proposition « $\forall x \in \mathbb{N}, \big((x>2) \wedge (x^2>4)\big) \vee (x<3)$ » est-elle vraie ?*

Exercice. *Écrire la table de vérité de $p \wedge (q \vee r)$. Écrire celle de $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$. Qu'en déduire ?*

1.4.3 Équivalence « équivaut à »

L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est vraie si et seulement si p et q ont la même valeur de vérité.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Par exemple, « $(2+2=5) \Leftrightarrow$ (L'UPF est en Écosse) » est une proposition vraie.

1.4.4 Implication « implique »

L'implication $p \Rightarrow q$ est vraie si et seulement si q est vraie ou p est fausse.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Par exemple, « $(2+2=5) \Rightarrow$ (L'UPF est en Écosse) » est une proposition vraie.

Remarque. *Lorsque la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une condition suffisante pour q.*

Lorsque la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que q est une condition nécessaire pour p.

Lorsque la proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on dit que p est une condition nécessaire et suffisante pour q.

1.4.5 Négation « non »

La négation $\neg p$ est vraie si et seulement si p est fausse.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Par exemple, « $\neg(2+2=5)$ » est une proposition vraie.

Exercice. *La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, (x>0) \Rightarrow (x^3<0)$ est-elle vraie ? Et « $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, (x+y=0) \wedge (\neg(xy=0))$ » ?*

Exercice. *Écrire la table de vérité de « $\neg p \vee q$ » ; comparer avec « $p \Rightarrow q$ » ; qu'en déduire ?*

1.4.6 Identités

On a vu que certaines propositions étaient équivalentes ; par exemple « $\neg p \vee q$ » et $p \Rightarrow q$ ». Plus généralement, on peut transformer une proposition suivant les règles suivantes sans changer sa valeur (on pourra vérifier ces règles par table de vérité).

$$
\begin{array}{lll}
\text{« } p \wedge (q \vee r) \text{ » équivaut à « } (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ »} \\
\text{« } p \Rightarrow (q \wedge r) \text{ » équivaut à « } (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \text{ »} \\
\text{« } \neg(p \wedge q) \text{ » équivaut à « } \neg p \vee \neg q \text{ »} \\
\text{« } \neg(p \vee q) \text{ » équivaut à « } \neg p \wedge \neg q \text{ »} \\
\text{« } \neg(p \Rightarrow q) \text{ » équivaut à « } p \wedge \neg q \text{ »} \\
\text{« } \neg(\exists x, p(x)) \text{ » équivaut à « } \forall x, \neg p(x) \text{ »} \\
\text{« } \neg(\forall x, p(x)) \text{ » équivaut à « } \exists x, \neg p(x) \text{ »}
\end{array}
$$

Attention. La négation d'une proposition ne s'obtient pas bêtement en prenant la négation de tous ses symboles ! Par exemple, trouver la négation de « $(\forall x \in \mathbb{Z}, (x > 0) \Rightarrow (x \in \mathbb{N}))$ » grâce aux identités ci-dessus.

Exercice. *Développer « $\neg(\forall x, p(x) \Rightarrow q(x))$ » ; vérifier l'équivalence obtenue par table de vérité.*

1.5 Énoncés et preuves

Jusqu'à présent, pour savoir si une proposition était vraie ou fausse, nous l'avons comprise et utilisé notre intuition mathématique ; mais nous aurions pu nous tromper.

Pour prouver qu'une proposition est vraie, on en fait une démonstration. Cela consiste à réduire cette proposition en des propositions plus simples jusqu'à ce qu'elles soient évidentes. Pour cela, on utilise les identités ci-dessus ainsi que les règles suivantes.

1.5.1 Équivalences

Pour prouver une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on la remplace systématiquement par la conjonction $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Exercice. *Prouver que* $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4 \Leftrightarrow (x = -1)$.

1.5.2 Démonstration par contre exemple

Pour prouver que la proposition $\forall x, p(x)$ est fausse, on trouve un x_0 tel que $\neg p(x_0)$ soit vraie.

Exercice. *La proposition suivante est-elle vraie ?* $\forall x \in \mathbb{R}, x > -x$.

1.5.3 Démonstration par contraposition

Prouver que $p \Rightarrow q$ revient à prouver que $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Exercice. *Prouver que* $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \neq 1) \Rightarrow (x \neq 1) \wedge (x \neq -1)$.

1.5.4 Démonstration par l'absurde

Prouver p revient à prouver que $\neg p \Rightarrow F$.

Cela consiste à supposer que p est fausse et arriver à une contradiction, c'est-à-dire une proposition q telle que q et $\neg q$ soient vraies. On peut alors conclure que la proposition p est vraie.

Exercice. *Prouver* $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$.

Exemple. *Pour prouver que le nombre* $\sqrt{2}$ *est irrationnel, supposons qu'on puisse l'écrire sous la forme* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *avec* p *et* q *des entiers. On peut supposer que* p *et* q *n'ont pas de facteur commun. Mettant l'égalité au carré, on obtient* $2q^2 = p^2$*, ce qui montre que* p *est divisible par* 2*. Ainsi* $2q^2 = 4p'^2$ *et* q *est lui aussi divisible par* 2*. Cela contredit notre hypothèse.*

1.5.5 Démonstration par disjonction des cas

On exploite la règle qui veut que $p \vee \neg p$ soit toujours vrai.

Exemple. *Montrons que pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *la fraction* $\frac{n(n+1)}{2}$ *est entière.*

Si n *est pair alors le résultat est évident. Sinon,* $n+1$ *l'est et il en va de même.*

Exemple. *Montrons qu'il existe un nombre irrationnel* x *tel que* $x^{\sqrt{2}}$ *soit rationnel.*

De deux choses l'une, soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *est rationnel, soit il est irrationnel.*

S'il est rationnel, alors $x = \sqrt{2}$ *fournit une solution à notre problème.*

S'il est irrationnel, alors $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *fournit une solution à notre problème.*

1.5.6 Démonstration par analyse-synthèse

Cette méthode permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Elle consiste pour cela en deux étapes successives :

1. L'analyse : On prouve que, si l'objet existe, alors il est nécessairement égal à un objet explicite. (Ceci assure l'unicité.)
2. La synthèse : On s'assure que l'objet explicite obtenu satisfait effectivement les propriétés données. (Ceci assure l'existence.)

Exercice. *Montrer que toute fonction réelle* f *peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

1.5.7 Énoncés mathématiques

Lorsque l'on énonce une proposition, il est important d'indiquer son statut. Est-ce une hypothèse ? Une conclusion ? Les énoncés mathématiques doivent donc porter l'une de ces indications :

- Définition.
- Lemme.
- Proposition.
- Théorème.
- Corollaire.
- Conjecture.

1.6 Ensembles

On a vu les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$. On peut aussi former des ensembles d'objets plus généraux.

Définition. *Un ensemble est une collection d'objets définis et distincts.*

On appelle ces objets les éléments de l'ensemble ; on note $x \in A$ lorsque l'objet x est élément de l'ensemble A.

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. $(A = B) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

L'ensemble qui n'a aucun élément est appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$.

On note les ensembles en écrivant leurs éléments entre accolades, et on peut soit les écrire explicitement soit les caractériser par des propriétés. Par exemple, pour les entiers pairs : $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} = \{k \in \mathbb{N} : 2|k\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2|k\}$.

Exercice. *Lesquels des ensembles ci-dessous sont égaux ?*

— $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$,
— $\{$*nombres pairs*$\}$,
— $\{$*nombres premiers*$\}$,
— $\{$*diviseurs de* $64\}$,
— $\{$*puissances de* 2 *inférieures à* $100\}$,
— $\{$*entiers n tels que $n/2$ est aussi entier*$\}$,
— $\{$*triangles du plan*$\}$,
— $\{$*triangles isocèles du plan*$\}$,
— $\{$*fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}\}$.

1.6.1 Inclusion

Définition. *On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A est élément de B.*

$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Par exemple, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple. *L'ensemble* $\{2, 3, 5, 7\}$ *est inclus dans l'ensemble* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Exercice. *Lesquels des ensembles de la liste ci-dessus (après élimination des doublons) sont inclus dans quels autres ?*

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si on a $A \subset B$ et $B \subset A$. Cette équivalence, même si triviale, mérite d'être retenue car c'est souvent le moyen le plus directe de prouver que deux ensembles sont égaux.

1.6.2 Réunion

Définition. *La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble dont les éléments sont exactement les objets qui sont éléments de A ou de B.* $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.

Voir la figure 1.1.

Exemple. *L'union de* $\{2, 3, 5, 7\}$ *et de* $\{2, 4, 8, 16\}$ *est* $\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 16\}$.

Exercice. *Montrer que l'union des entiers de la forme* $4k + 1$ *et de ceux de la forme* $4k + 3$ *donne les nombres impairs.*

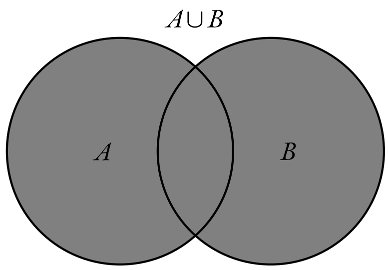


FIGURE 1.1 – Union de deux convexes du plan.

1.6.3 Intersection

Définition. *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble dont les éléments sont exactement les objets qui sont éléments de A et de B. $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.*

Voir la figure 1.2.

Exemple. *L'intersection de* $\{2, 3, 5, 7\}$ *et de* $\{2, 4, 8, 16\}$ *est* $\{2\}$.

1.6.4 Différence

Définition. *La différence de A et de B est l'ensemble $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.*

Voir la figure 1.3.

Exemple. *La différence de* $\{2, 3, 5, 7\}$ *et de* $\{2, 4, 8, 16\}$ *est* $\{3, 5, 7\}$.

Dans le cas où $A \subset B$, on appelle aussi $B \setminus A$ le complémentaire de A dans B.

Exercice. *Quelle est la différence de l'ensemble des nombres impairs et de ceux de la forme* $4k + 1$ *?*

1.6.5 Différence symétrique

Définition. *La différence symétrique de A et de B est l'ensemble $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*

Voir la figure 1.4.

Exemple. *La différence symétrique de* $\{2, 3, 5, 7\}$ *et de* $\{2, 4, 8, 16\}$ *est* $\{3, 4, 5, 7, 8, 16\}$.

La différence symétrique possède de nombreuses propriétés utiles. Notamment, on peut aussi l'écrire $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. En outre, $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.

1.6.6 Parties d'un ensemble

Définition. *L'ensemble des parties d'un ensemble A, noté $\mathfrak{P}(A)$, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de A. $(x \in \mathfrak{P}(A)) \Leftrightarrow (x \subset A)$*

Exemple. *L'ensemble des parties de* $\{1, 2, 3\}$ *est* $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Proposition. *L'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments contient 2^n éléments.*

Démonstration. Numérotons les éléments de notre ensemble de 0 à $n - 1$. Alors on associe à tout entier dont la décomposition binaire est $\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$ le sous-ensemble contenant les éléments i pour lesquels $b_i = 1$. Cela donne exactement tous les sous-ensembles. $\square$

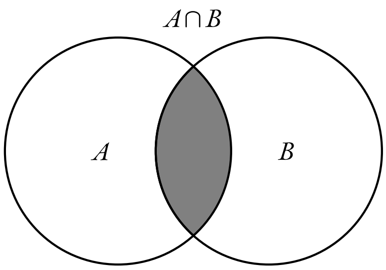


FIGURE 1.2 – Intersection de deux convexes du plan.

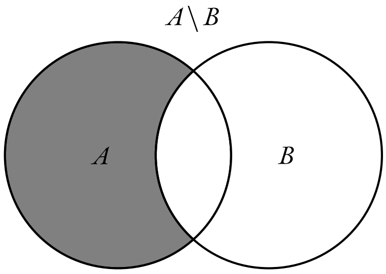


FIGURE 1.3 – Différence de deux convexes du plan.

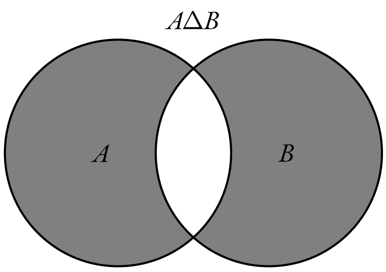


FIGURE 1.4 – Différence symétrique de deux convexes du plan.

1.6.7 Identités

Comme les opérations sur les ensembles reposent sur les opérateurs logiques (la réunion correspond à la disjonction, l'intersection à la conjonction, etc.) on retrouve les identités correspondantes. Notamment :

$$\begin{aligned}
A\cap(B\cap C)&=(A\cap B)\cap C\\
A\cup(B\cup C)&=(A\cup B)\cup C\\
A\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\
A\cup(B\cap C)&=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\
A\setminus(B\cap C)&=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\\
A\setminus(B\cup C)&=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)
\end{aligned}$$

1.7 Intervalles

Les intervalles sont des ensembles de nombres réels délimités par deux nombres donnés.

Définition. *On définit :*
- $[a;b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\leqslant b\}$
- $[a;b[=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x< b\}$
- $]a;b]=\{x\in\mathbb{R} : a< x\leqslant b\}$
- $]a;b[=\{x\in\mathbb{R} : a< x< b\}$

On peut aussi utiliser $a=-\infty$ *ou* $b=\infty$ *pour dénoter un intervalle sans borne inférieure ou supérieure :*
- $]-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R} : x\leqslant b\}$
- $]-\infty;b[=\{x\in\mathbb{R} : x< b\}$
- $[a;\infty[=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\}$
- $]a;\infty[=\{x\in\mathbb{R} : a< x\}$

On a en particulier $]a;a[=\emptyset$, $[a;a]=\{a\}$, et $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

Proposition. *L'intersection de deux intervalles est encore un intervalle.*

1.8 Produit cartésien

Définition. *Le produit cartésien* $A\times B$ *de deux ensembles* A *et* B *est l'ensemble de tous les couples* (a,b) *avec* $a\in A$ *et* $b\in B$.

Exemple. *On a* $\{1,2,3\}\times\{x,y\}=\{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$.

Remarque. *Pour tout ensemble* A *on a* $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$.

On peut généraliser ce produit à n éléments :

Définition. *Soient n ensembles* $A_1,\dots,A_n$. *On définit le produit cartésien* $A_1\times\cdots\times A_n$ *comme l'ensemble de tous les n-uplets* $(a_1,\dots,a_n)$ *avec* $\forall k\in\{1,\dots,n\}a_k\in A_k$.

On note les produits répétés par des puissances, c'est-à-dire que $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots A}_{n\text{ fois}}$.

Exemple. *Le produit cartésien de* $\{1,2,3\}$ *et* $\{2,3\}$ *est l'ensemble* $\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

Exemple. *Le produit cartésien* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *est le plan euclidien* $\mathbb{R}^2$.

1.9 Exercices

Exercice. *Lesquelles des propositions suivantes sont vraies :*

- *Ce cours ne contient aucune proposition vraie.*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x^2 - 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, y > 0 \wedge xy > 1)$

Exercice. *Écrire les négations des propositions suivantes :*

- *Je suis polynésien.*
- *J'ai un ami polynésien.*
- *Tous les étudiants de l'UPF sont polynésiens.*
- $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, (xyz \neq 0) \wedge (x^n + y^n + z^n = 0)$
- $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x^x$

Exercice. *Montrer que les propositions* $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 0) \vee (\exp(x) \geqslant 1)$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geqslant 0) \Rightarrow (\exp(x) \geqslant 1)$ *sont équivalentes.*

Exercice. *Montrer que les propositions* $\neg(p \Rightarrow q)$ *et* $(p \wedge \neg q)$ *sont équivalentes.*

Exercice. *Prouver que « pour tout entier n, si* n^2 *est impair alors n l'est aussi » en prouvant sa contraposée. Écrire sa réciproque et la montrer elle aussi.*

Exercice. *Montrer par disjonction des cas que* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0$.

Exercice. *Calculer l'ensemble* $(\{\textit{îles de Polynésie}\} \setminus \{\textit{îles de moins de } 10^5 \textit{ habitants}\}) \cap \{\textit{îles avec lagon}\}$.

Exercice. *Calculer l'intersection de l'ensemble des parties de* $\{1, 2, 3\}$ *avec celui de* $\{3, 5, 7\}$ *?*

Exercice. *Quelle est l'intersection des intervalles* $]-\infty, 3[$ *et* $[2, 5]$ *? Et leur union ?*
Et dans le cas des intervalles $]-\infty, 3[$ *et* $[4, 5]$ *?*

Exercice. *Combien d'éléments y a-t-il dans l'ensemble* $\{n \in \mathbb{N} : n < 100\} \setminus (\{2k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\})$ *?*

Exercice. *Combien d'éléments de* $\mathfrak{P}(\{2, 3, 4, 5, 6, 7\})$ *contiennent le chiffre* 7 *?*

Exercice. *Donner deux ensembles dont la réunion vaut* $\mathbb{R}$ *mais dont l'intersection est vide.*
Exhiber un ensemble différent de $\mathbb{R}$ *dont l'intersection avec tout intervalle ouvert est non-vide.*

Exercice. *Montrer que l'ensemble des réels de la forme* $2x + 1$ *avec* $x \in [2; 3[$ *est un intervalle.*
Faire de même avec les réels de la forme $x^2 + x$.

Exercice. *Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de plus grand nombre premier.*

Exercice. *Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si leurs ensembles des parties sont égaux.*

Exercice. *On note* $\#A$ *le nombre d'éléments d'un ensemble A.*
Étant donnés deux ensembles A et B, montrer que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
En déduire que deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ *dont la somme des cardinaux est strictement supérieure à n ont au moins un élément en commun.*
Étant donnés trois ensembles A et B, montrer que $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)$.

Chapitre 2

Fonctions

2.1 Définitions

En mathématiques, on étudie très souvent des objets au travers de leur transformations. Dans le cas le plus élémentaires des ensembles, ces transformations s'appellent des applications.

Définition. *On appelle fonction (ou application), tout objet f qui associe à chaque élément x d'un ensemble E, un unique élément y d'un ensemble F. Formellement, cela se note :*

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto y = f(x) \end{cases}$$

L'ensemble de départ E s'appelle le domaine (de définition) de f, et l'ensemble d'arrivé F s'appelle le codomaine de f. On dit que $y = f(x)$ est l'image de x par f, et que x est un antécédent de y par f.

Exemple. *Vous connaissez déjà de nombreuses fonctions :*
- *La fonction* $\sin$*, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui associe à un nombre le sinus de l'angle qu'il représente en radians. L'image de $\frac{\pi}{2}$ par* $\sin$ *vaut* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$*, donc $\frac{\pi}{2}$ est un antécédent de* 1 *par* $\sin$.
- *La fonction* $\tan$*, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui associe à un nombre la tangente de l'angle qu'il représente en radians. L'image de π par* $\tan$ *vaut* 0*, donc π est un antécédent de* 0 *pour cette fonction.*
- *La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; un antécédent de $\frac{1}{5}$ par cette fonction est* 4.
- *Pour tout ensemble E, la fonction qui à $x \in E$ associe x s'appelle la fonction identité; on la note* id_E*. Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, on peut dire que l'image de* 2 *à travers* $\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}$ *est* 2*, et que* 2 *est un antécédent de* 2 *pour* $\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}$.
- *Pour tout couple d'ensembles (E, F) et tout objet $y \in F$, on peut définir la fonction $x \in E \mapsto y \in F$ qui à tout élément $x \in E$ associe la valeur fixe $y \in F$; on l'appelle la fonction constante de valeur y.*

Lorsque l'on définit une fonction, il est important de toujours donner son ensemble de départ et celui d'arrivée. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ définie sur $\mathbb{N}$ vaut 0 tout le temps et 1 n'a donc pas d'antécédent par elle ; elle est bien différente de la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Définition. *Deux fonctions $f : E \to F$ et $g : G \to H$ sont dites égales si :*

1. $E = G$;
2. $F = H$;
3. $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

On peut aussi formaliser la notion de représentation graphique :

Définition. *Le graphe d'une fonction réelle $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ formée des couples $(x, f(x))$ pour $x \in E$.*

Cet ensemble est formé de points qui représentent les couples antécédent/image de la fonction.

Exemple. *Si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x + 1$, alors le graphe de f est une droite.*

Si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^2 + 1$, alors le graphe de f est une parabole.

2.2 Constructions

On construit très souvent de nouvelles fonctions en combinant de différentes manières des fonctions déjà connues.

Définition. *Soient f et g deux fonctions de même domaine E et même codomaine F ; si ce codomaine est un ensemble comme $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ muni d'une addition et d'une multiplication, on définit :*

— $f + g : x \in E \mapsto f(x) + g(x) \in F$
— $f - g : x \in E \mapsto f(x) - g(x) \in F$
— $f \cdot g : x \in E \mapsto f(x) \cdot g(x) \in F$
— $f/g : x \in E \setminus \{x \in E : g(x) = 0\} \mapsto f(x)/g(x) \in F$

Définition. *Soit $f : E \to F$ une fonction.*

Pour $H \subset E$, la restriction de f à H est l'application $f|_H : x \in H \mapsto f(x) \in F$.

Pour $G \subset F$ vérifiant $\forall x \in E, f(x) \in G$, la corestrction de f à G est l'application $f|^G : x \in E \mapsto f(x) \in G$.

On peut parfois restreindre ou corestreindre des fonctions implicitement, mais c'est relativement dangereux : il faut toujours savoir quels sont les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions que l'on utilise.

Définition. *Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions avec $H \subset E$. Leur composition est :*

$$f \circ g : \begin{cases} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(g(x)) \end{cases}$$

Formellement, on peut donc dire que la fonction $\sin(x^2)$ est la composée de la fonction sin avec le produit de la fonction identité avec elle-même.

Exercice. *Dans la liste ci-dessous, trouver les fonctions qui sont égales :*

— $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$
— $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$
— $\tan \circ \arctan$
— $\sin \circ (n \in \mathbb{Z} \mapsto \pi n \in \mathbb{R})$
— $f \circ f$, *avec* $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$
— $g \circ g$, *avec* $g : x \in \mathbb{R}^\times \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$
— $x \in \mathbb{Z} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$

2.3 Notions ensemblistes

On peut généraliser la notion d'image et de préimage aux ensembles, en prenant l'union des images ou préimages de leurs éléments.

2.3.1 Images et préimages

Définition. *Soit $f : E \to F$ une fonction.*

L'image d'un sous-ensemble G de E par f est l'ensemble $f(G) = \{f(x) : x \in G\}$.

La préimage (ou image réciproque) d'un sous-ensemble H de F par f est l'ensemble $f^{-1}(H) = \{x \in E : f(x) \in H\}$.

Exercice. *Quelles sont les images, par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$, de :*

— 2

— $\{2\}$

— $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

— $]0; 1[$

— $\mathbb{R}_+^\star$

Comme les fonctions ne font que transporter des éléments d'un ensemble à un autre, elles se comportent bien vis-à-vis des opérations sur les ensembles.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une fonction. Pour tout sous-ensembles A et B de E, on a :*

1. $f(\emptyset) = \emptyset$
2. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une fonction. Pour tout sous-ensembles A et B de F, on a :*

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Ces propositions, tout comme l'ensemble du cours, ne doivent pas nécessairement être apprises par cœur : il suffit de savoir les retrouver le jour de l'examen. Une fois que l'on prend l'habitude de travailler avec des fonctions, elles deviennent toutes naturelles.

Exemple. *Considérons la fonction sinus. L'image de $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ est $\{0, 1\}$ et celle de $\{0, \frac{5}{2}\pi, 5\pi\}$ est $\{0, 1\}$. L'intersection des images vaut donc $\{0, 1\}$, mais l'image de l'intersection vaut seulement $\{0\}$.*

2.3.2 Surjectivité et injectivité

Les propriétés suivantes liées aux images et préimages sont très importantes pour la fonction elle-même.

Définition. *Soit $f : E \to F$ une fonction.*

On dit que f est surjective si $f(E) = F$.

On dit que f est injective si, lorsque x et y sont deux éléments distincts de E, on a $f(x) \neq f(y)$.

On dit que f est bijective si elle est à la fois surjective et injective.

Moins formellement, une application est injective si chaque élément de son codomaine est l'image d'au plus un élément du domaine. Et une application est surjective si tout élément du codomaine est l'image d'au moins un élément du domaine. Les applications bijectives sont donc celles pour lesquelles tout élément du codomaine est l'image d'exactement un élément du domaine.

Exemple. *La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est si surjective ni injective.*
Sa corestriction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ est surjective mais pas injective.
Sa restriction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est injective mais pas surjective.
Sa double restriction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ est bijective.

Exercice. *Lesquelles des fonctions suivantes sont surjectives ? Injectives ? Bijectives ?*
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$
- $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
- $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \frac{1}{1+x} \in \mathbb{R}$

Proposition. *La composée de deux applications injectives est injective.*
La composée de deux applications surjectives est surjective.
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice. *Démontrer cette proposition.*

2.3.3 Application réciproque

Définition. *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective, sa réciproque est la fonction de F dans E qui associe à $y \in F$ l'unique préimage de y par f.*

Si f est une fonction réelle bijective alors dans un repère orthonormé (O, x, y) son graphe est celui de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = y$.

Exemple. *Vous connaissez déjà de nombreuses fonctions réciproques :*
- *La fonction* $\log : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *est par définition la réciproque de $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}_+^\star$.*
- *La fonction $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est par définition la réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$.*
- *Quel que soit $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie comme la réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^k \in \mathbb{R}_+$.*

2.4 Fonctions réelles

Le but de cette section et des suivantes est de développer les outils nécessaires pour pouvoir étudier efficacement le comportement d'une classe particulière de fonctions qui est omniprésente : les fonctions réelles.

Définition. *On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

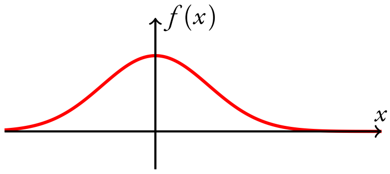
En effet, la plupart des fonctions réelles ne sont définies que sur des sous-ensembles stricts de $\mathbb{R}$, comme les exemples que nous avons déjà considérés : $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. D'autres exemples, moins évident à quantifier, incluent le cours de la bourse, la précipitation moyenne en fonction de la latitude, la pression d'un avion en fonction du temps de vol, etc.

Lorsque l'on aura une fonction réelle à étudier, on procédera généralement ainsi :

— déterminer son ensemble de définition
— réduire l'intervalle d'étude si possible (parité, périodicité)
— déterminer ses variations (calculer la dérivée, regarder son signe, limites/asymptotes aux bornes)
— trouver des points particuliers éventuels (zéros)
— tracer la courbe

Exemple. *Prenons la fonction* $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

— *Elle est définie sur l'ensemble* $\mathbb{R}$ *tout entier.*
— *Comme* $f(-x) = f(x)$, *il suffit donc d'étudier* f *sur* $\mathbb{R}_+$.
— *Sa dérivée vaut* $-2x\exp(-x^2)$ *ce qui est toujours négatif; la fonction tend vers* 0 *en* $+\infty$.
— *Comme valeur particulière, on a* $f(0) = 1$.
— *On trouve alors*



2.5 Symétries

Définition. *Une fonction* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite :*

— *paire si* $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$;
— *impaire si* $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$;
— *périodique si* $\exists \lambda > 0, \forall x \in E, f(x + \lambda) = f(x)$.

Dans ce dernier cas, on dit que λ *est une période de* f.

Proposition. *Le graphe d'une fonction paire possède une symétrie d'axe* $(0, y)$.

Le graphe d'une fonction impaire possède une symétrie de centre $(0, 0)$.

Le graphe d'une fonction périodique est invariant sous translation de vecteur $(\lambda, 0)$.

Exercice. *Quelles symétries possèdent les fonctions suivantes ? Tracer leurs graphes.*

— $x \mapsto x^2 - 1$
— $x \mapsto x^3 - 3x$
— $x \mapsto \cos(\pi x) + 1$

2.6 Limites

Pour commencer, regardons le comportement d'une fonction au voisinage d'un point, c'est à dire que l'on regarde ses valeurs sur un intervalle ouvert contenant ce point mais de diamètre de plus en plus petit.

Définition. *Soit* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $z \in \mathbb{R}$ *un réel.*

On dit que f *admet comme limite à gauche en* z *le réel* y *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad x \in]z - \eta, z[\cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[.$$

On dit que f admet comme limite à droite en z le réel y si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad x \in]z, z+\eta[\cap E \quad \Rightarrow \quad f(x) \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[.$$

On note respectivement $y = \lim_{x\to z^-} f(x)$ et $y = \lim_{x\to z^+} f(x)$.

Si en un point une fonction admet une limite à gauche et une limite à droite de même valeur, alors on dit simplement qu'elle admet une limite en ce point et l'on note $y = \lim_{x\to z} f(x)$.

D'après cette définition, on peut distinguer les cas suivants :

— Souvent, la limite d'une fonction f en un réel z existe et vaut simplement $f(z)$.
— Parfois, la limite d'une fonction en un point existe mais est différente de sa valeur en ce point.
— Parfois, la limite à gauche et à droite d'une fonction en un même point existent mais diffèrent.
— Parfois, la limite à gauche ou à droite existe mais pas l'autre.
— Parfois, ni la limite à gauche ni celle à droite n'existent.
— Parfois, une fonction croît vers l'infini en un point, et n'admet donc pas de limite au sens ci-dessus.

Exemple. *Vérifier que les fonctions ci-dessous sont des exemples des cinq cas ci-dessus :*

— *La fonction* $x \mapsto x^2$ *en* 0.
— *La fonction* $x \mapsto 0^x$ *en* 0.
— *La fonction* $x \mapsto |x|/x$ *en* 0.
— *La fonction* $x \mapsto \sin(\exp(1/x))$ *en* 0.
— *La fonction* $x \mapsto \sin(1/x)$ *en* 0.
— *La fonction* $1/x$ *en* 0.

Nous avons autorisé $+\infty$ et $-\infty$ à être utilisés comme bornes d'intervalles. Ils jouent en fait un rôle très complémentaire des nombres réels finis. Il est donc important d'introduire aussi le concept de limite infinie en un point, de limite en l'infini, et de limite infinie en l'infini.

Définition. *Considérons une fonction $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comme limite infinie à droite ou à gauche en $z \in \mathbb{R}$, elle peut admettre :*

$$-\infty = \lim_{x\to z^-} f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall G \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, x \in]z-\eta, z[\cap E \Rightarrow f(x) < G)$$
$$-\infty = \lim_{x\to z^+} f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall G \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, x \in]z, z+\eta[\cap E \Rightarrow f(x) < G)$$
$$+\infty = \lim_{x\to z^-} f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall G \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, x \in]z-\eta, z[\cap E \Rightarrow f(x) > G)$$
$$+\infty = \lim_{x\to z^+} f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall G \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, x \in]z, z+\eta[\cap E \Rightarrow f(x) > G)$$

Comme limite finie $y \in \mathbb{R}$ en l'infini, elle peut admettre :

$$y = \lim_{x\to +\infty} f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0, \exists G \in \mathbb{R}, x > G \wedge x \in E \Rightarrow f(x) \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[)$$
$$y = \lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0, \exists G \in \mathbb{R}, x < G \wedge x \in E \Rightarrow f(x) \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[)$$

Il est grossièrement inutile de retenir ces propositions par cœur ! La bonne approche consiste à les comprendre afin de savoir calculer les limites à gauche et à droite, finies et infinies, en un point fini ou infini, lorsque l'on nous donne une fonction concrète ; idéalement, on devrait pouvoir retrouver ces propositions par la réflexion.

Exercice. *Écrire une proposition stipulant que la fonction $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet comme limite $-\infty$ en $+\infty$?*

Proposition. *Soient f et g deux fonctions réelles admettant une limite en un point α. Alors, on a les limites suivantes :*

— $\lim_{x\to\alpha} f(x)+g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x)+\lim_{x\to\alpha} g(x)$
— $\lim_{x\to\alpha} f(x)-g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x)-\lim_{x\to\alpha} g(x)$
— $\lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot\lim_{x\to\alpha} g(x)$
— $\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x)/\lim_{x\to\alpha} g(x)$

Attention à bien noter que les quantités $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $0/0$ et ∞/∞ sont indéterminées.

Proposition. *Pour tous réels $a>0$ et $b>0$ on a*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^b}=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{x^b}=0.$$

Exercice. *Déterminer les limites en 1 et en $-\infty$ des fonctions suivantes :*

— $x\mapsto x^2$
— $x\mapsto \frac{1}{x}$
— $x\mapsto \frac{1}{1-x}$
— $x\mapsto \frac{3-3x}{|1-x|}$

Théorème. *Soient $f\leqslant g$ deux fonctions réelles. Lorsque ces limites existent, on a $\lim_{x\to\alpha} f(x)\leqslant \lim_{x\to\alpha} g(x)$.*

Théorème (dit « des gendarmes »)**.** *Soient $f\leqslant g\leqslant h$ trois fonctions réelles. Si f et h admettent une même limite en α, alors il en va de même pour g.*

2.7 Asymptotes

Certains types de limites en l'infini sont extrêmement visuels sur le graphe d'une fonction ; ce sont les asymptotes.

Définition. *Soit $f : E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction.*

On dit qu'elle admet une asymptote verticale en $x=\alpha$ si les limites de f en α à gauche à droite sont toutes deux infinies.

On dit qu'elle admet une asymptote oblique $y=ax+b$ en $\pm\infty$ si la fonction $x\mapsto f(x)-(ax+b)$ a pour limite 0 en $\pm\infty$.

Si $a=0$ on dit que l'asymptote est horizontale.

Remarque. *Pour déterminer l'équation d'une asymptote oblique, on calcule $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis $b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$. Ensuite, pour savoir de quel côté de l'asymptote la fonction se trouve, il suffit de calculer le signe de leur différence.*

Exercice. *Déterminer toutes les asymptotes des fonctions suivantes :*

— $x\mapsto \frac{1}{x}$
— $x\mapsto \frac{x}{1+x}$
— $x\mapsto \frac{x^2}{1+x}$

2.8 Continuité

Définition. *Une fonction réelle est dite continue en un point de son ensemble de définition si elle y admet des limites à gauche et à droite qui coïncident avec sa valeur en ce point.*

Elle est dite continue si elle l'est en chaque point de son ensemble de définition.

Exemple. *Les fonctions usuelles ci-dessous sont continues sur leurs domaines de définition :*
- *les constantes* $x \mapsto \alpha$ *;*
- *les puissances* $x \mapsto x^\alpha$ *;*
- *les exponentielles* $x \mapsto \alpha^x$ *;*
- *les logarithmes* $\log_\alpha(x) = \log(x)/\log(\alpha)$*;*
- *les fonctions trigonométriques :* sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan.

Il découle directement des résultats sur les limites vus précédemment que la somme, la différence, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions continues sont continues sur leurs domaines de définition.

Exemple. *Tous les polynômes, c'est-à-dire toutes les fonctions de la forme* $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_k) \in \mathbb{R}^n$*, sont continus sur* $\mathbb{R}$ *entier.*

Définition. *Soit* f *une fonction continue sur* $]a,b[\cup]b,c[$*. Si* f *admet une limite finie en* b*, alors on dit qu'elle est prolongeable par continuité en* b*. On appelle alors prolongement par continuité de* f *en* b *la fonction :*

$$\tilde{f} : x \in]a,c[\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq b \\ \lim_b f & \text{si } x = b \end{cases}$$

Théorème (dit « des valeurs intermédiaires »)**.** *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Intuitivement cela signifie qu'on peut tracer cette fonction sans lever le crayon.

Exercice. *Dire lesquelles des fonctions suivantes sont continues :*
- $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto x^3 - x + 1$
- $x \mapsto \sqrt{|x|}$
- $x \mapsto \frac{x}{|x|}$
- $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$
- $x \mapsto (1+x^3)^{-1}$
- $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

2.9 Dérivabilité

Définition. *Une fonction réelle* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite dérivable en* $\alpha \in E$ *si la limite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f *en* α *et on la note* $f'(\alpha)$ *ou encore* $\frac{df}{dx}(\alpha)$*.*

La dérivée sert à mesurer à quelle vitesse une fonction croît en un point. Si une fonction est dérivable en un point, alors elle y est forcément continue — prouvez le ! La réciproque, en revanche, n'est pas vrai en général.

Exercice. *Calculer la dérivée de* $x^3 + x$ *en* 2.

Naturellement, la dérivée se comporte bien par rapport aux opérations habituelles sur les fonctions.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions réelles, α un point commun à leurs domaines de définition, λ un réel, et n un entier. Alors on a*
- $(\lambda f)'(\alpha) = \lambda f'(\alpha)$
- $(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$
- $(f-g)'(\alpha) = f'(\alpha) - g'(\alpha)$
- $(f\cdot g)'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot g(\alpha) + f(\alpha)\cdot g'(\alpha)$
- $(f\circ g)'(\alpha) = g'(\alpha)\cdot f'(g(\alpha))$
- $(f/g)'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}$

Définition. *Une fonction réelle $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite dérivable si elle l'est sur tout son ensemble de définition E. Dans ce cas, la fonction $f' : x \in E \mapsto f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ s'appelle simplement la fonction dérivée de f.*

Remarque. *On rappelle les dérivées classiques suivantes, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\log(x) = 1/x$$

Il en découle notamment :
- $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}x^{-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx}\alpha^x = \frac{d}{dx}e^{x\log(\alpha)} = \log(\alpha)e^{x\log(\alpha)} = \log(\alpha)\alpha^x$

N'oubliez pas non plus les dérivées des fonctions trigonométriques :
- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$
- $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Lorsque nous tracerons à main levée le graphe d'une fonction, il nous sera utile de nous appuyer sur des objets géométriques simples, comme des droites. Le plus élémentaire est la tangente ; c'est, en termes intuitifs, la droite qui « approche » le mieux le comportement de la fonction autour de ce point.

Définition. *Si $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle dérivable en $\alpha \in E$, la tangente de cette fonction en ce point est la droite d'équation*

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Les fonctions dérivées forment un sous-ensemble assez particulier de celui des fonctions réelles. On a notamment le résultat suivant dont il découle notamment que ce sous-ensemble est propre.

Théorème (dit « des accroissements finis »). *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Le cas particulier où $f(a) = f(b)$ est connu sous le nom de théorème de Rolle.

2.10 Variations

Définition. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est :*
- *constante si $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y)$;*
- *croissante si $\forall x \in E, \forall y \in E, x > y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$;*
- *décroissante si $\forall x \in E, \forall y \in E, x > y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$;*
- *strictement croissante si $\forall x \in E, \forall y \in E, x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$;*
- *strictement décroissante si $\forall x \in E, \forall y \in E, x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*

Il n'existe pas d'approche générale pour étudier les variations des fonctions non dérivables ; mais dans le cas des fonctions dérivables presque partout, cela est relativement aisé lorsque la fonction dérivée peut être évaluée explicitement.

Théorème. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable avec E un intervalle.*
- *Si $\forall x \in E, f'(x) = 0$ alors f est constante.*
- *Si $\forall x \in E, f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante.*
- *Si $\forall x \in E, f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante.*
- *Si $\forall x \in E, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.*
- *Si $\forall x \in E, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Attention, les réciproques des deux dernières assertions sont fausses.

Pour connaître les variations d'une fonction dérivable, il suffit de découper son domaine de définition en intervalles où sa fonction dérivée est de signe constant.

2.11 Extrema

Il est important de savoir borner l'ampleur des variations d'une fonction.

Définition. *On dit qu'une fonction réelle $f : E \to \mathbb{R}$:*
- *est minorée par m si $\forall x \in E, f(x) \geqslant m$*
- *est majorée par M si $\forall x \in E, f(x) \leqslant M$*
- *admet un minimum global en α si $\forall x \in E, f(x) \geqslant f(\alpha)$*
- *admet un maximum global en α si $\forall x \in E, f(x) \leqslant f(\alpha)$*
- *admet un minimum local en α si $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon], f(x) \geqslant f(\alpha)$*
- *admet un maximum local en α si $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon], f(x) \leqslant f(\alpha)$*

Les extrema (pluriel de « extremum ») dénotent l'ensemble des minima et des maxima.

Par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont toutes deux majorées par 2 et minorées par $-3/2$; remarquons à cette occasion que les majorants et minorants ne sont jamais uniques.

Pour les fonctions dérivables on dispose d'un critère permettant de déterminer les extrema de manière particulièrement aisée.

Proposition. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable admettant en α un extremum local ou global. Si $\exists \varepsilon > 0,]\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon[\subset E$ alors $f'(\alpha) = 0$.*

Exemple. *Déterminer les maximum et minimum globaux des fonctions suivantes :*
- $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto x^3$
- $x \mapsto x - x^2$
- $x \mapsto \exp(x) - x$
- $x \mapsto \exp(x) - 2x$

2.12 Exercices

Exercice. *Étudier puis tracer le graphe de la fonction* $x \mapsto \frac{e^x - x^2}{1+x}$.

Chapitre 3

Suites numériques

La théorie des fonctions est parfois bien trop riche pour certaines tâches. Lorsque l'on veut étudier la croissance asymptotique d'une quantité, par exemple, il est peu pertinent de considérer une fonction définie sur l'entièreté de $\mathbb{R}$. Les suites sont essentiellement des fonctions définies sur $\mathbb{N}$. La structure de $\mathbb{N}$ en fait des outils bien plus fins que les fonctions générales, ce que le principe de récurrence dénote tout spécialement.

3.1 Définitions

Définition. *Soit E un ensemble. Une suite à valeurs dans E est une fonction x de $\mathbb{N}$ dans E.*
Sa n^e valeur $x(n)$ se note x_n, et l'on écrit la suite $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$.
Dans le cas $E = \mathbb{R}$, on parle de suites numériques (ou encore réelles).

Pour définir une suite, il suffit de donner un moyen de calculer sa valeur pour tout indice n.

Exemple. *On peut définir les suites suivantes :*
- *la suite nulle, de valeur $x_n = 0$ pour tout n ;*
- *la suite constante, de valeur $x_n = 1$ pour tout n ;*
- *la suite identité, de valeur $x_n = n$ pour tout n ;*
- *la suite racine carrée, de valeur $x_n = \sqrt{n}$ pour tout n ;*
- *la suite de Fibonacci donnée par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ pour tout $n > 1$.*
- *la suite de Syracuse donnée par $x_0 = 7$ et $x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{si } x_n \text{ est impair} \\ x_n/2 & \text{si } x_n \text{ est pair} \end{cases}$ pour tout $n > 1$.*

Exercice. *Calculer les cinq premiers termes de toutes les suites ci-dessus.*

Comme pour les fonctions, on peut combiner des suites en effectuant des opérations terme à terme.

Définition. *Si x et y sont deux suites réelles, on définit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*
- *λx, la suite de terme général $(\lambda x)_n = \lambda x_n$;*
- *$x + y$, la suite de terme général $(x + y)_n = x_n + y_n$;*
- *$x \cdot y$, la suite de terme général $(x \cdot y)_n = x_n \cdot y_n$;*

3.2 Principe de récurrence

Pour montrer de nombreux résultats sur les suites, on utilisera le principe de récurrence. Il exploite la structure remarquable de l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$, à savoir que chacun de ses sous ensembles admet un plus petit élément.

Théorème. *Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n qui vérifie :*

— *$P(0)$ est vraie ;*

— $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En pratique, on rédigera donc un raisonnement par récurrence en deux parties : l'initialisation, consistant à vérifier la véracité de $P(0)$, et l'hérédité, consistant à montrer que $P(n)$ implique $P(n+1)$. On pourra alors conclure que $P(n)$ est vérifiée quel que soit n.

Exemple. *Montrons que 6 divise $7^n - 1$ pour tout n.*

Pour $n = 0$, c'est évident car $7^0 - 1 = 0$.

Supposons maintenant cette égalité vérifiée au rang n, c'est à dire qu'il existe un entier k vérifiant $7^n - 1 = 6k$. Alors, en multipliant cette égalité par 7 on obtient $7^{n+1} - 7 = 7 \cdot 6k$ soit encore $7^{n+1} - 1 = 6(7k+1)$; la proposition est ainsi encore vérifiée au rang $n+1$. On conclue par récurrence.

Pour prouver un résultat par récurrence, il faut souvent en connaître la forme d'avance.

Exercice. *Montrer les formules*

$$0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k} = 2-\frac{1}{2^n}.$$

3.3 Sommations et produits formels

Comme ci-dessus, nous allons souvent rencontrer des sommes ou des produits longs voire de taille arbitraire. Aussi est-il opportun d'introduire une notation concise pour cela.

Définition. *Soit u une suite et $a < b$ deux entiers. On note $\sum_{i=a}^{b} u_i$ la somme des termes u_i pour $i \in \{a, a+1, \ldots, b\}$, et on note $\prod_{i=a}^{b} u_i$ leur produit.*

Exercice. *Calculer les sommes et les produits suivants.*

$$\prod_{i=2}^{5}(2i+1) \qquad \sum_{j=1}^{4}(-2)^i \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1) \qquad \prod_{k=0}^{n}(-1) \qquad \sum_{n=3}^{k}\frac{1}{2^n}$$

3.4 Suites linéaires

Les suites vérifiant les relations de récurrences les plus simples, à savoir les relations linéaires, sont appelées suites arithmético-géométrique.

Définition. *On dit qu'une suite x est :*

— *arithmétique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $x_{n+1} = x_n + a$.*

— *géométrique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $x_{n+1} = a x_n$.*

— *arithmético-géométrique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $x_{n+1} = a x_n + b$.*

Le nombre a s'appelle la raison de la suite.

Ces relations de récurrences sont suffisamment simple pour pouvoir calculer le terme général.

Proposition. *Le terme général d'une suite arithmétique est* $na + x_0$.
Le terme général d'une suite géométrique est $a^n x_0$.
Le terme général d'une suite arithmético-géométrique est $a^n(x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$.

Exercice. *Prouver ces résultats.*

Proposition. *On a*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Exercice. *Prouver ces résultats.*

Exercice. *En déduire la somme des n premiers termes d'une suite vérifiant* $x_{n+1} = x_n + a$.
Faire de même pour une suite vérifiant $x_{n+1} = a x_n + b$.

3.5 Suites récurrentes linéaires

Définition. *On dit qu'une suite u est récurrente linéaire s'il existe des nombres* $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ *tels que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} a_i u_{n+i}.$$

Le plus petit entier k pour lequel de tels nombres existent s'appelle l'ordre de u.

Exemple. *La suite de Fibonacci est définie par* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *et* $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ *est récurrent linéaire d'ordre deux.*
La suite définie par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ *et* $u_{n+3} = 3u_{n+2} - u_n$ *est récurrent linéaire d'ordre trois.*

On peut exprimer le terme général de toute suite récurrente linéaire de manière relativement explicite. Cela fait intervenir leur polynôme caractéristique.

Définition. *On appelle polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence* $u_{n+k} - \sum_{i=0^k} a_i u_{n+i} = 0$ *le polynôme* $x^k - \sum_{i=0^k} a_i x^i$.

Théorème. *Si le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence que vérifie la suite u se factorise comme* $\prod_i (x-\lambda_i)^{e_i}$*, alors il existe des coefficients* $c_{i,j}$ *tels que, pour tout entier n, on ait*

$$u_n = \sum_i \sum_{j=0}^{e_i - 1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n.$$

Ce résultat général s'énonce plus simplement dans le cas de l'ordre deux.

Corollaire. *Soit une suite u vérifiant* $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$*. On pose*

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \qquad \beta = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

les deux racines complexes du polynôme $x^2 - ax - b$.
Alors il existe des coefficients $a, b \in \mathbb{C}$ *tels que :*
— *si* $\alpha \neq \beta$*, on ait* $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

— *si* $\alpha = \beta$, *on ait* $u_n = a\alpha^n + bn\alpha^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Remarque. *Pour calculer les coefficients a et b il suffit de résoudre le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} u_0 = a + b \\ u_1 = a\alpha + b\beta \end{cases}$$

dans le premier cas et

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = a\alpha + b\alpha \end{cases}$$

dans le deuxième.

3.6 Limites

Pour les suites, seule la notion de limite en l'infini a un sens, car c'est la seule place admettant une base de voisinages non vides.

Définition. *On dit qu'une suite x admet une limite s'il existe un réel* ℓ *vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n > m, x_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[.$$

Dans ce cas, on dit que ℓ *est la limite de la suite x et on note* $\ell = \lim x$.

Exemple. *Les limites des suites ci-dessous sont relativement évidentes.*
— *La limite d'une suite constante est sa valeur.*
— *La limite de la suite de terme général* $\frac{1}{n}$ *est* 0.
— *La suite de terme général* α^n *admet une limite nulle si* $|\alpha| < 1$ *et infinie si* $|a| > 1$.
— *La suite de terme général* $(-1)^n$ *n'admet pas de limite.*
— *La limite de la suite de Fibonacci est infinie.*

Les limites des suites ont naturellement les même propriétés que les limites des fonctions :

Proposition. *Si x et y sont deux suites réelles admettant pour limite respectives* ℓ *et m, et* λ *un scalaire réel.*
— λx *admet comme limite* $\lambda\ell$.
— $x + y$ *admet comme limite* $\ell + m$.
— $x \cdot y$ *admet comme limite* ℓm.

Proposition. *Soit* u_n *une suite admettant une limite finie* ℓ *et f une fonction réelle continue en* ℓ. *Alors la suite* $f(u_n)$ *admet* $f(\ell)$ *comme limite.*

Exercice. *Montrer que la suite de terme général* $\cos(\frac{1}{n}) + \exp(\frac{n+1}{n})$ *admet une limite et la calculer.*

Exercice. *Soit la fonction*

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que la suite de terme général $f(\frac{1}{n})$ *admet une limite ; vaut-elle* $f(0)$ *?*

Exercice. *Soit x une suite vérifiant* $x_{n+1} = ax_n + b$ *avec* $a > 1$. *Quelle est sa limite en l'infini ? Et dans le cas* $a < 1$ *?*

3.7 Bornes et monotonie

Les notions de variation des suites sont celles de fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

Définition. *On dit qu'une suite x est :*

- *minorée par M si, pour tout n, on a $x_n \geqslant M$.*
- *majorée par M si, pour tout n, on a $x_n \leqslant M$.*
- *bornée si elle admet un majorant et un minorant.*
- *croissante si, pour tout n, on a $x_{n+1} \geqslant x_n$.*
- *décroissante si, pour tout n, on a $x_{n+1} \leqslant x_n$.*

Proposition. *Soient x et y deux suites vérifiant $x_n \leqslant y_n$. Si elles admettent toutes deux des limites, alors* $\lim x \leqslant \lim y$.

Remarque. *Lorsque $x_n < z_n$, on ne peut pas généralement conclure que* $\lim x < \lim z$. *Prendre par exemple $x_n = \frac{1}{n}$ et $z_n = 0$.*

Proposition. *Le produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée admet zéro comme limite.*

Proposition (gendarmes). *Soient x, y et z trois suites vérifiant $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ pour tout n. Si x et z admettent la même limite, alors il en va de même pour y.*

Théorème. *Toute suite croissante et majorée admet une limite.*

Toute suite décroissante et minorée admet une limite.

Exercice. *Déterminer lesquelles des suites de terme général ci-dessous admettent une limite.*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$

Proposition (suites adjacentes). *Soient une suite croissante x et une suite décroissante y vérifiant* $\lim(y-x) = 0$. *Alors x et y admettent la même limite.*

Exercice. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est croissante. À n fixé, on pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$. Montrer alors qu'elle est adjacente à la suite $v_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$. Par définition, leur limite est e^x.*

Exercice. *Soit deux réels $a \geqslant b$. On se propose d'itérer le calcul des moyennes arithmétique $\frac{a+b}{2}$ et géométrique $\sqrt{ab}$.*

Soit donc u et v les suites vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} .$$

Calculer les trois premiers termes de u et de v pour $a = b = 10$ puis pour $a = 0$ et $b = 20$.

Montrer que $u_n \geqslant v_n$ pour tout n.

Montrer que u décroît et que v croît.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Leur limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique.

3.8 Sous suites extraites

Extraire une suite d'une autre consiste à en éliminer certaines valeurs. La suite ainsi obtenue s'appelle sous suite ou encore suite extraite.

Définition. *Soit u une suite. On dit que v est une sous suite de u s'il existe une fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.*

La majorité des propriétés sont conservées des suites aux sous suites.

Proposition. *Si une suite u est croissante/décroissante, alors il en va de même pour toutes ses sous suites.*

Si une suite u est majorée/minorée, alors il en va de même pour toutes ses sous suites.

Si une suite u admet une limite ℓ (finie ou infinie), alors toutes ses sous suites admettent la même limite.

Cependant les suites ne reflètent pas toujours les propriétés de (une partie de) leurs sous suites.

Remarque. *Certaines sous suites peuvent cependant admettre une limite sans que la suite converge. Considérer notamment la suite de terme général $(-1)^n$ et sa sous-suite formée des termes d'indices pairs.*

Exercice. *Soit u une suite. On suppose que les sous suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers une même limite. Montrer que u converge aussi vers cette limite.*

Soit u une suite. On suppose que les sous suites extraites u_{2n}, u_{2n+1} et u_{3n} convergent. Montrer que leurs limites sont égales et que u converge aussi vers cette limite.

Exercice. *Soit u une suite monotone. On suppose qu'une de ses sous suites extraites admet une limite. Montrer qu'il en va de même de u.*

Théorème (Bolzano–Weierstrass). *De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*