Université de la Polynésie française **Année 2026-2027**
Département de Mathématiques **Licence 1 Maths et Sciences pour l'Ingénieur**

Calcul numérique et algébrique
Fiche 2 bis : Exercices supplémentaires

Exercice 1. Mettre sous la forme algébrique $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{2+i}{1-2i}$;
2. $\dfrac{3-i}{2+i} - \dfrac{1+2i}{1-2i}$;
3. $(1+i)^6$;
4. $\dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^3}$.

Déterminer ensuite la partie réelle et la partie imaginaire du nombre obtenu au 4..

Exercice 2. Soit

$$z = 2 - 2\sqrt{3}\, i.$$

1. Déterminer $|z|$ et un argument de z.
2. Écrire z sous forme exponentielle.
3. En déduire une forme exponentielle de z^{10} puis sa forme algébrique.
4. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z^3}{(\bar{z})^2}$.

Exercice 3. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 2\}$;
2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z+1|\}$;
3. $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|^2 + |z+1|^2 = 8\}$;
4. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 - 4 = 0\}$.

Pour l'ensemble C, écrire l'équation sous la forme cartésienne $x^2 + y^2 =$ constante puis identifier précisément l'ensemble obtenu.

Exercice 4. On pose

$$z_1 = 1 - i, \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

1. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme exponentielle de $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire la forme algébrique de z.
4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5. Déterminer toutes les racines carrées complexes des nombres suivants :

$$-5i, \qquad 3 - 4i, \qquad -7 + 24i.$$

Puis résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$z^2 + z + 1 = 0, \qquad 2z^2 - (4+2i)z + (3+i) = 0.$$

Pour chacune des deux équations, donner les solutions sous forme exponentielle lorsque cela est raisonnablement simple.

Exercice 6. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2}.$$
2. En déduire le module et un argument de
$$e^{i\pi/3} + e^{i\pi/6}.$$
3. Faire de même pour
$$e^{i3\pi/4} + e^{-i\pi/4}.$$

Exercice 7. À l'aide de la formule de Moivre, développer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
Puis, à l'aide de la formule d'Euler, linéariser
$$\cos^4 x, \qquad \sin^4 x, \qquad \sin^3 x \cos x.$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner toutes les solutions sous forme exponentielle :
$$z^3 = 2 + 2i,$$
$$z^4 = 16e^{-i\pi/3},$$
$$z^5 = -32.$$
Pour chaque équation, représenter les solutions dans le plan complexe en indiquant leur répartition sur le cercle correspondant.

Exercice 9. Soient A et B les points d'affixes $a = 1$ et $b = -1$. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que
$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = k,$$
selon les valeurs de $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Traiter séparément le cas $k = 1$, puis le cas $k \neq 1$. Dans ce dernier cas, déterminer le centre et le rayon du cercle obtenu.

Exercice 10. Déterminer l'équation complexe de la droite passant par les points d'affixes 1 et i.
Déterminer ensuite l'équation complexe du cercle de centre d'affixe $1+2i$ passant par le point d'affixe i.
Enfin, résoudre géométriquement l'équation
$$\frac{|z-i|}{|z-1|} = 2$$
en donnant une équation cartésienne du lieu obtenu et son centre.

Exercice 11. Soit $P(z) = z^2 + bz + c$, où $b, c \in \mathbb{C}$, et soient z_1, z_2 ses racines.

1. Montrer que $z_1 + z_2 = -b$ et $z_1 z_2 = c$.
2. On suppose maintenant que $z_1 + z_2 = i$ et $z_1 z_2 = 1$. Déterminer z_1 et z_2.
3. Plus généralement, montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si z est une racine de P, alors $\bar{z}$ est également une racine.

Exercice 12. **Problème.** Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et écrivons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. On considère
$$w = z + \frac{1}{z}.$$

1. Exprimer w sous la forme algébrique en fonction de ρ, θ.
2. Calculer $|w|^2$ et montrer que
$$|w|^2 = \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\cos(2\theta).$$
3. En déduire que, lorsque $|z| = 1$, on a
$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta.$$
4. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z + \frac{1}{z} = 1.$$