Université de la Polynésie française **Année 2024-2025**
Département de Mathématiques **Licence 1 Maths et Sciences pour l'Ingénieur**

Calcul numérique et algébrique

Fiche 3 : Polynômes ;

Exercice 1 *Soit $P = 1 - X + X^2$, $Q = 1 + X^4$ et $S = 1 - X^3 + X^6$.*

1. *Donner le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants, sans faire le calcul complet.*
$$P + Q \qquad (P - Q)S \qquad PQS$$
2. *Faire le calcul complet.*

Exercice 2 1. *Calculer le degré et les trois premiers monômes de*

$$P(X) = (X^2 + X + 1)^4(3X^3 - 2X + 1)^2$$

.

2. *Soit $Q(X) = X^3 - X^2 + 1$, Calculer le degré et les trois premiers monômes $Q(X^2 - X + 1)$.*

Exercice 3 Trouver les diviseurs de $X^4 + 2X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $X - 1 \mid X^n - 1$ (pour $n > 1$).
2. Calculer les divisions euclidiennes de A par B avec $A = X^4 - 1$, $B = X^3 - 1$. Puis $A = 4X^3 + 2X^2 - X - 5$ et $B = X^2 + X$; $A = 2X^4 - 9X^3 + 18X^2 - 21X + 2$ et $B = X^2 - 3X + 1$; $A = X^5 - 2X^4 + 6X^3$ et $B = 2X^3 + 1$.
3. Déterminer le pgcd de $A = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $B = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$. Trouver les coefficients de Bézout U, V. Mêmes questions avec $A = X^5 - 1$ et $B = X^4 + X + 1$.
4. Montrer que si $AU + BV = 1$ avec $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$ alors les polynômes U, V sont uniques.

Exercice 4 Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1,\ P(1) = 0,\ P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4.$$

Exercice 5 Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$;
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$;

3. $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$;

4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 6 À quelle condition sur a, b, $c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 7 1. Déterminer les pgcd des polynômes suivants :

(a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$

(b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1$

(c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$

(d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

(a) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$

(b) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 8 1. Factoriser dans $R[X]$ et $C[X]$ les polynômes suivants :

$$(a)\ X^3 - 3,\ \ (b)\ X^{12} - 1\ \ (c)\ X^6 + 1\ \ (d)\ X^9 + X^6 + X^3 + 1.$$

2. Factoriser les polynômes suivants :

$$(a)\ X^2 + (3i - 1)X - 2 - i\ \ (b)\ X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3.$$

Exercice 9 Pour quelles valeurs de a le polynôme

$$(X + 1)^7 - X^7 - a$$

admet-il une racine multiple réelle?