

Racines carrées complexes de i

But : Déterminer tous les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = i$.

Méthode 1

Comme $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on peut écrire

$$i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = e^{i\pi/2}$$

Posons $\omega = re^{it}$ donc on veut résoudre $re^{2it} = e^{i\pi/2}$.

Ainsi $r = 1$ car $|i| = 1$ et on a $2t = \pi/2 + 2k\pi$ donc $t = \pi/4 \pmod{\pi}$.

Ainsi, les racines carrées de i sont données par $z = e^{i(\pi/4+k\pi)}$ avec $k \in \{0, 1\}$ (on rappelle qu'on calcule une racine carrée).

Pour $k = 0$, on a $z = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Pour $k = 1$, on a $z = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Vérification

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(2i) = i.$$

Conclusion

Les deux racines carrées complexes de i sont donc $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Méthode 2

On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

En identifiant les parties réelle et imaginaire avec $i = 0 + i$, on obtient le système d'équation :

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ et } 2xy = 1.$$

De la première équation, on tire $x^2 = y^2$, donc $y = \pm x$.

Si $y = -x$, alors $2x(-x) = -2x^2 = 1$, donc $x^2 = -\frac{1}{2}$, impossible.

Si $y = x$, alors $2x^2 = 1$, d'où $x^2 = \frac{1}{2}$ et par conséquent $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $y = x$, on obtient $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.