Université de la Polynésie française **Année 2024-2025**
Département de Mathématiques **Licence 1 Maths et Sciences pour l'Ingénieur**

Calcul numérique et algébrique

Fiche 1 : Nombres rationnels et nombres réels ; équations et inéquations - identités remarquables

Exercice 1 Utiliser les identités remarquables pour transformer les expressions suivantes:

$$x^2 - 9\,;\ 25x^2 - 10x + 1\,;\ x^2 - 0,01\,;\ x^4 + 2x^2y^3 + y^6\,;\ z^6 - 2z^3t^8 + t^{16}\,;\ 2r - 1 - r^2.$$

Exercice 2 Résoudre les équations et les inéquations suivantes:

1. $3x - 2 = 5 + 7x$; $3x - 2 \leq 5 + 7x$;
2. $3x - 2 \geq 2x^2 - 6x + 1$; $x^2 - 5x + 6 < 0$; $x^2 - 5x + 7 \geq 1$.
3. $\frac{1-x}{3+2x} > 0$; $\frac{2}{x-2} < \frac{3}{x+1}$; $\frac{2x+1}{x+2} \geq 3$.
4. $x^3 - x = 0$; $x^3 + 1 = 0$; $x^2 - 7x = 2x - 14$; $x^2 + x + 1 = 1$.

Exercice 3 Calculer les nombres suivants:

$$\sqrt{16}\,;\ 16^{\frac{1}{4}}\,;\ 27^{\frac{1}{3}}\,;\ \sqrt{7^2}\,;\ \sqrt{(-7)^2}\,;\ (\sqrt{\alpha})^2\,;\ \sqrt{\alpha^2}\,;\ \sqrt{3^2 + 5^2.}$$

Exercice 4 [Autour des rationnels]

1. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
2. Notons D l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{3} \notin D$. Trouver $x \in D$ tel que $1234 < x < 1234,001$.
3. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\log_{10}(2) \notin \mathbb{Q}$ (on rappelle que $\log_{10}(2)$ est le logarithme décimal de 2 : c'est le nombre réel tel que $10^{\log_{10}(2)} = 2$).
5. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction :

$$0,1212\ ;\ 0,1212\cdots\ ;\ 78,33\,456\,456...\ ;\ \sum_{i=1}^{i=9} 0,iii...$$

6. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel. Qu'en est-il pour les irrationnels ?

Exercice 5 Montrer qu'entre deux nombres réels on peut toujours intercaler un nombre décimal.

Exercice 6 Soit $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \cdots + a_n$ avec $a_i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $p(x)$ a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_n et β divise a_0.

2. En utilisant la question 1) trouver une racine rationnelle du polynôme

$$5x^3 - 28x^2 + 45x - 18.$$

   Trouver ensuite toutes ses racines.

3. On considère le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; montrer que son carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.