

Calcul numérique et algébrique

Fiche 3 : Polynômes ;

Exercice 1 Trouver les diviseurs de $X^4 + 2X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $X - 1 \mid X^n - 1$ (pour $n > 1$).
2. Calculer les divisions euclidiennes de A par B avec $A = X^4 - 1$, $B = X^3 - 1$. Puis $A = 4X^3 + 2X^2 - X - 5$ et $B = X^2 + X$; $A = 2X^4 - 9X^3 + 18X^2 - 21X + 2$ et $B = X^2 - 3X + 1$; $A = X^5 - 2X^4 + 6X^3$ et $B = 2X^3 + 1$.
3. Déterminer le pgcd de $A = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $B = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$. Trouver les coefficients de Bézout U, V . Mêmes questions avec $A = X^5 - 1$ et $B = X^4 + X + 1$.
4. Montrer que si $AU + BV = 1$ avec $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$ alors les polynômes U, V sont uniques.

Exercice 2 Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4.$$

Exercice 3 Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$;
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$;
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$;
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 4 À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5 1. Déterminer les pgcd des polynômes suivants :

- (a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$
- (b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1$
- (c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$
- (d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

- (a) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
(b) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 6 1. Factoriser dans $R[X]$ et $C[X]$ les polynômes suivants :

(a) $X^3 - 3$, (b) $X^{12} - 1$ (c) $X^6 + 1$ (d) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

2. Factoriser les polynômes suivants :

(a) $X^2 + (3i - 1)X - 2 - i$ (b) $X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3$.

Exercice 7 Pour quelles valeurs de a le polynôme

$$(X + 1)^7 - X^7 - a$$

admet-il une racine multiple réelle?