Calcul numérique et algébrique
TD extra – 24 novembre 2025

Problème 1. On considère $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, $\overline{z} = \frac{1}{z}$ si et seulement si z est de module 1.
2. Montrer que z_0 est solution de $z_0^5 - 1 = 0$ et donc de $z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0$
3. Soit $x_1 = z_0 + \frac{1}{z_0}$. Montrer que $z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} = x_1^2 - 2$ et donc que x_1 vérifie $x_1^2 + x_1 - 1 = 0$.
4. Déterminer x_1.
5. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$.
6. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 2. En vous inspirant de l'exercice précédent, montrer que $cos(\frac{2\pi}{7})$ est racine du polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1$.