

## Calcul numérique et algébrique

### Fiche 1 : Nombres rationnels et nombres réels ; équations et inéquations - identités remarquables

Voir aussi tous les mini-exercices du cours pour mémoriser et utiliser les définitions et résultats du cours.

**Exercice 1** Utiliser les identités remarquables pour transformer les expressions suivantes:

$$x^2 - 9; 25x^2 - 10x + 1; x^2 - 0,01; x^4 + 2x^2y^3 + y^6; z^6 - 2z^3t^8 + t^{16}; 2r - 1 - r^2.$$

**Exercice 2** Résoudre les équations et les inéquations suivantes:

1.  $3x - 2 = 5 + 7x$  ;  $3x - 2 \leq 5 + 7x$  ;
2.  $3x - 2 \geq 2x^2 - 6x + 1$  ;  $x^2 - 5x + 6 < 0$  ;  $x^2 - 5x + 7 \geq 1$ .
3.  $\frac{1-x}{3+2x} > 0$  ;  $\frac{2}{x-2} < \frac{3}{x+1}$  ;  $\frac{2x+1}{x+2} \geq 3$ .
4.  $x^3 - x = 0$  ;  $x^3 + 1 = 0$  ;  $x^2 - 7x = 2x - 14$  ;  $x^2 + x + 1 = 1$ .

**Exercice 3** Calculer les nombres suivants:

$$\sqrt{16}; 16^{\frac{1}{4}}; 27^{\frac{1}{3}}; \sqrt{7^2}; \sqrt{(-7)^2}; (\sqrt{\alpha})^2; \sqrt{\alpha^2}; \sqrt{3^2 + 5^2}.$$

**Exercice 4** [Autour des rationnels]

1. Sachant  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , montrer que  $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  et  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ .
2. Notons  $D$  l'ensemble des nombres de la forme  $\frac{a}{2^n}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\frac{1}{3} \notin D$ . Trouver  $x \in D$  tel que  $1234 < x < 1234,001$ .
3. Montrer que  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$ .
4. Montrer que  $\log_{10}(2) \notin \mathbb{Q}$  (on rappelle que  $\log_{10}(2)$  est le logarithme décimal de 2 : c'est le nombre réel tel que  $10^{\log_{10}(2)} = 2$ ).
5. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction :

$$0,1212; 0,1212\ldots; 78,33456456\ldots; \sum_{i=1}^{i=9} 0,iii\ldots$$

6. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel. Qu'en est-il pour les irrationnels ?

**Exercice 5** Montrer qu'entre deux nombres réels on peut toujours intercaler un nombre décimal.

**Exercice 6** Déterminer  $\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_2$  avec  $\mathbb{D} := \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$  et  $\mathbb{D}_2 := \left\{ \frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

**Exercice 7** Soit  $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \cdots + a_n$  avec  $a_i \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que si  $p(x)$  a une racine rationnelle  $\frac{\alpha}{\beta}$  (avec  $\alpha$  et  $\beta$  premiers entre eux) alors  $\alpha$  divise  $a_n$  et  $\beta$  divise  $a_0$ .
2. En utilisant la question 1) trouver une racine rationnelle du polynôme

$$5x^3 - 28x^2 + 45x - 18.$$

Trouver ensuite toutes ses racines.

3. On considère le nombre  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ; montrer que son carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent que  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  n'est pas rationnel.

**Exercice 8** *Autour de la racine carrée*

- Définir  $\sqrt{a}$  pour  $a \in \mathbb{N}$  comme le supremum d'un ensemble.
- Pour  $a \in \mathbb{N}$  fixé, on définit  $u_n$  entier tel que  $u_n^2 \leq 10^{2n}a < (u_n + 1)^2$ . Trouver comment on calcule  $u_{n+1}$  à partir de  $u_n$  (indication on cherchera  $u_{n+1} = 10u_n + c_n$  où  $c_n$  est un chiffre.
- On utilise cela pour poser le calcul d'une racine carrée à la main. Continuer le calcul suivant de  $\sqrt{13}$  pour au moins les 3 décimales suivantes :

|            |                                                                  |
|------------|------------------------------------------------------------------|
| 13         | 3,605...                                                         |
| - 9        | $3^2 = 9 \leq 13$                                                |
| = 4 00     | $20 \times 3 \times C + C^2 = 396 \leq 400$                      |
| - 3 96     | $60 \times 6 + 6^2 = 396 \leq 400$                               |
| = 4 00     | $20 \times 36 \times C + C^2 = 0 \leq 400$                       |
| - 0        | $720 \times 0 + 0^2 = 0 \leq 400$                                |
| = 4 00 00  | $30 \times 360 \times C + C^2 \times 5 + 5^2 = 36025 \leq 40000$ |
| - 3 60 25  | $7200 \times 5 + 5^2 = 36025 \leq 40000$                         |
| = 39 75 00 | ...                                                              |
| ...        | ...                                                              |