Université de la Polynésie française **Année 2025-2026**
Département de Mathématiques **Licence 1 Maths et SPI**

Calcul matriciel : Fiche TD n°2

Calcul direct

Exercice 1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que* $A^2 = 5A - 4Id_3$.
2. *Calculer l'inverse* A^{-1}.

Exercice 2. *Prenons une matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Établir l'égalité* $A^2 - 3A + 2Id = 0$.
2. *Justifier que* A *est inversible puis donner son inverse.*

Système linéaires

Exercice 3.
1. *Calculer le rang de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.
2. *Résoudre le système linéaire* $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x + y + 3z + 2t = 8 \\ 3x + 4y + 2z + 3t = 12 \end{cases}$

Exercice 4. *Pour tout réel* $t \in \mathbb{R}$, *on considère la matrice* $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Calculer* $B(0)$.
2. *Pour tout réels* $s, t \in \mathbb{R}$, *calculer* $B(s)B(t)$.
   Indication : Écrire les fonctions trigonométriques sous forme exponentielles.
3. *Déterminer l'inverse de* $B(t)$.

Exercice 5. *Soit un réel* $m \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer le rang de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *en fonction de* m.
2. *En fonction du paramètre* m, *résoudre*

$$\begin{cases} x + y - (1-m)z = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$

Une découverte guidée de la diagonalisation

Exercice 6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Calculer* A^2.

2. On admet que pour entier naturel n, on a la matrice $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$.

   Calculer la matrice A^{n+1}, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3 - 2a_n$.

3. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n - 1$.

   (a) Montrez que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (b) Calculer b_n puis a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. En fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$, en déduire la matrice A^n.

Exercice 7. *On s'intéresse à trois suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}^3 \\ a_{n+1} = a_n - 2b_n + c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} = -a_n - 2b_n + 4c_n \end{cases}$$

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Montrons que
$$\forall n \in N, \quad X_n = A^n X_0.$$

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, prouver que P est une matrice inversible puis le déterminer.

3. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, établir l'égalité $A = PDP^{-1}$.

4. En déduire que $\forall n \in N$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n.

6. En déduire les expressions respectives des termes a_n, b_n, c_n en fonction des premiers termes respectifs a_0, b_0, c_0 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemples d'applications

Exercice 8. *Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :*

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 3b_n + c_n \\ c_{n+1} &= 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.

3. Montrer que :
$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. *En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.*

Exercice 9. *Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets. Le brochet est un prédateur naturel du gardon. Sa population d'une année sur l'autre varie donc en fonction*

— *du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction)*

— *du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).*

De la même façon, la population du gardon évolue en fonction

— *du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction)*

— *du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).*

Au premier janvier 2021, on relève 1000 gardons et 100 brochets dans l'étang. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note g_n, respectivement b_n, le nombre de gardons, resp. de brochets, au 1er janvier de l'année $2021 + n$.

1. ***Partie 1.***

   Après une étude, des biologistes ont déterminé que les suites (g_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence croisées suivantes :

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1{,}1\, g_n - 0{,}2\, b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4\, g_n + 0{,}5\, b_n. \end{cases}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et on note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

   1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation lie U_n, U_{n+1} et A ? En déduire une relation entre U_n, A et U_0.*

   1.2. *Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.*

   1.3. *On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.*

   1.4. *Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.*

   1.5. *Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.*

   1.6. *En déduire l'expression de g_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite des deux suites (g_n) et (b_n) ? Quelle interprétation en faites-vous ?*

2. ***Partie 2.***

   Pour enrayer l'extinction des espèces, on décide de relâcher chaque année 30 gardons dans l'étang. Dans cette deuxième modélisation, les deux suites (g_n) et (b_n) vérifient donc maintenant les relations

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1{,}1\, g_n - 0{,}2\, b_n + 30 \\ b_{n+1} = 0{,}4\, g_n + 0{,}5\, b_n \end{cases}$$

   de sorte que, en gardant les mêmes notations, on a $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   2.1. *Démontrer que la matrice $(A - I_2)$ est inversible et calculer son inverse.*

   2.2. *On pose $C = (A - I_2)^{-1}B$. Calculer explicitement C.*

   2.3. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + C$. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$.*

   2.4. *Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0. On note (x_n) et (y_n) les deux suites telles que $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer les limites des deux suites (x_n) et (y_n).*

   2.5. *Quelles sont les limites des suites (g_n) et (b_n) dans ce cas ? Interpréter...*

Cet exercice est inspiré de travaux réels réalisés à la fin du XIXe siècle par deux spécialistes de la dynamique des populations : l'italien Vito Volterra et l'américain James Lotka.

Exercice 10.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Démontrer que P est inversible, et déterminer son inverse.*
2. *On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.*
3. *Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.*
4. *Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On en déduit que pour tout entier n,*

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

   (on ne demande pas de faire le calcul, mais vous pouvez vérifier vos résultats en calculant quelques coefficients).
5. *On considère les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par récurrence, pour u_0, v_0 et w_0 des réels, par*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + w_n}{2} \\ w_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Quelle relation matricielle relie U_{n+1}, U_n et A ?

   En déduire l'expression de U_n en fonction de A^n et de U_0.
6. *Démontrer que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent, et en déduire leur limite.*

Propriétés algébriques

Exercice 11. *Soit A, B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que AB et $A + B$ sont des matrices nilpotentes.*

Exercice 12. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices carrés $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} \geq 0$ et on a*

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des matrices stochastiques.

1. *Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.*
2. *Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{D}$ inversible tel que l'inverse soit dans $\mathcal{D}$.*