DÉTERMINANTS

Dans tout ce qui suit, $n \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Calcul du déterminant en dimension deux

Fixons une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Définition 1.1. *On définit le déterminant de la matrice M par*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

1.1. **Le déterminant comme outil géométrique : En dimension deux.**

On se place sur $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien usuel. Le déterminant peut servir à calculer des aires. Prenons deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on sait que ces deux vecteurs définissent un parallélogramme (qui peut être plat). Le couple (X, X') induit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 1.2. *On a l'égalité* $\det(A) = ||X|| \times ||X'|| \sin(X, X')$. *De plus,* $|\det(A)|$ *est l'aire du parallélogramme engendré par X et X'.*

On en déduit aisément :

Corollaire 1.3. *Le vecteur X est colinéaire a vecteur X' si et seulement si le déterminant* $\det(A) = 0$ *est nul. Autrement dit, le parallélogramme est plat.*

1.2. **Exemple.**

Calculons le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Par définition :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 1 = 12 - 2 = 10.$$

Interprétation géométrique. Les vecteurs $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ engendrent un parallélogramme d'aire $|\det(M)| = 10$. Comme $\det(M) \neq 0$, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. Calcul dans le cas général

On commence par introduire une notation :

Définition 2.1. *Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera $A_{i,j}$ la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. L'élément* $\det(A_{i,j})$ *est appelé mineur du terme $a_{i,j}$.*

On présente dans cette section, la méthode de Laplace ou méthode des mineurs (ou encore des cofacteurs). Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carré de taille n.

Proposition 2.2. *On a deux méthodes :*

— *En développant suivant la ligne i :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

— *En développant suivant la colonne j :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Définition 2.3. *Le terme* $a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ *est appelé le cofacteur du coefficient* $a_{i,j}$.

2.1. **Propriétés algébriques.**
La propriété centrale à retenir est la suivante :

Théorème 2.4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, la matrice* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*.*

On a plusieurs propriétés avec le déterminant.

Proposition 2.5. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *deux matrices.*

— $\det({}^tA) = \det(A)$

— $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

— $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

De manière similaire au pivot de Gauss, on dispose aussi d'un certain nombre d'opérations élémentaires dans le calcul du déterminant.

Proposition 2.6. — *si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul*

— *on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant*

— *si l'on multiplie tous les termes d'une même ligne ou d'une même colonne par un réel k, le déterminant est multiplié par k*

— *si l'on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe.*

Corollaire 2.7. *Si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul.*

3. En dimension trois

Prenons une matrice $A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on se propose de donner le calcul de son déterminant en le développant par la colonne 1.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}(-1)^{i+j} \det(A_{i,1}) \\
&= a_{1,1}(-1)^{1+1}\det(A_{1,1}) + a_{2,1}(-1)^{2+1}\det(A_{2,1}) + a_{3,1}(-1)^{3+1}\det(A_{3,1}) \\
&= a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{2,1}\det(A_{2,1}) + a_{3,1}\det(A_{3,1}) \\
&= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

On se propose également de donner le calcul en développant suivant la **ligne 1**.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{3} a_{1,j}(-1)^{1+j} \det(A_{1,j}) \\
&= a_{1,1}(-1)^{1+1}\det(A_{1,1}) + a_{1,2}(-1)^{1+2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}(-1)^{1+3}\det(A_{1,3}) \\
&= a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}\det(A_{1,3}) \\
&= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

3.1. **Le déterminant comme outil géométrique : En dimension trois.**
On se place sur $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien usuel. Le déterminant peut servir à calculer des volumes. Prenons deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, X" = \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on sait que ces deux vecteurs définissent un parallélépipède (qui peut être plat). Le couple $(X, X', X")$ induit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Proposition 3.1. *Le déterminant* $|\det(A)|$ *est le volume du parallélépipède engendré par* X*,* X' *et* $X"$*.*

On en déduit aisément :

Corollaire 3.2. *Les vecteurs* $X, X', X"$ *sont dans un même plan si et seulement si le déterminant* $\det(A) = 0$ *est nul. Autrement dit, le parallélépipède est plat.*

3.2. **Exemple.**
Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Développement suivant la colonne 1.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{1,1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \big((-1)(5) - (4)(0)\big) - 3 \cdot \big((2)(5) - (0)(0)\big) + 2 \cdot \big((2)(4) - (0)(-1)\big) \\
&= 1 \cdot (-5) - 3 \cdot (10) + 2 \cdot (8) \\
&= -5 - 30 + 16 = -19.
\end{aligned}
$$

Développement suivant la ligne 1.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{1,1}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\
&= 1\cdot\big((-1)(5)-(4)(0)\big) - 2\cdot\big((3)(5)-(4)(2)\big) + 0\cdot\big((3)(0)-(-1)(2)\big)\\
&= 1\cdot(-5) - 2\cdot(7) + 0\\
&= -5 - 14 = -19.
\end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat $\det(A) = -19$ par les deux méthodes, ce qui illustre l'indépendance du développement de Laplace vis-à-vis du choix de la ligne ou de la colonne.