Année de stage au lycée Honoré Daumier

Keva Djambaé

2023/2024

Résumé

Ce document condense l'ensemble de mes notes de cours (rédigés en LaTeX) durant l'année 2023/2024 où j'avais la charge d'une classe de seconde et de deux groupes de premières en mathématiques non spécialisé.
Des parties du programme peuvent donc être manquant par manque de temps (principalement).

Table des matières

Première partie

Première mathématique spécifique

Chapitre 1

Fonction affines

1.1 Fonctions affines

Démarrage

Je réactive mes connaissances

QCM
Version interactive
hatier-clic.fr/23ma1067b

1 Recopier et compléter ce tableau de proportionnalité.

0	2	…	…	8
…	4,2	6,3	12,6	…

2 La fonction p est affine et définie par $p(x) = 3x - 8$.

a. Calculer $p(-3)$, $p(0)$ et $p(6)$.

b. Résoudre l'équation $p(x) = 2$.

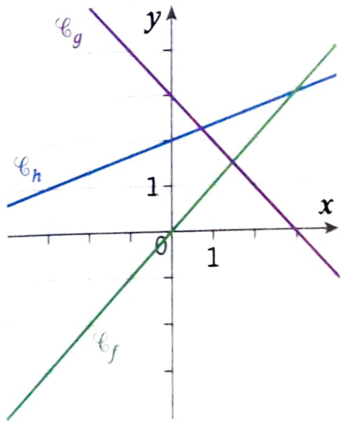
c. Déterminer l'antécédent de -5 par p.

3 Parmi les fonctions définies ci-dessous, indiquer celles qui sont affines, puis celles qui sont linéaires.

$f(x) = -5x + 3$ $\qquad g(x) = 2x$

$h(x) = 2x^2 - 1$ $\qquad k(x) = -2$

4 Donner une expression de chaque fonction affine représentée ci-contre.



5 La masse m d'un objet est réduite de 4,5 %.

a. Exprimer en fonction de m la nouvelle masse de l'objet après la réduction.

b. Quelle est la nature de la fonction qui modélise cette situation ?

▶ Corrigés p. 150

1.1.1 Définition et propriétés

Les fonctions affines permettent de comprendre et de formaliser le concept de proportionnalité, elles permettent de modéliser, c'est à dire de décrire et comprendre, de manière continue les phénomènes que l'on souhaite étudier.

Définition 1 (Fonction affine)**.**
Fixons deux nombres a et b. Une fonction affine est une fonction f qui à tout nombre x associe le nombre $ax + b$.
Le nombre a est le coefficient directeur de f et b est l'ordonnée à l'origine.

On en profite pour rappeler deux cas particuliers déjà rencontrés auparavant :

Remarque 1 (Cas particuliers)**.**
Si $a = 0$, alors pour tout nombre x, on a $f(x) = b$ alors f est une fonction constante.
Si $b = 0$, alors pour tout nombre x, on a $f(x) = ax$ alors f est une fonction linéaire.

(Croquis de la situation)

1.1.2 Variations d'une fonction affine

Propriété 1. *Si on prend une fonction $f(x) = ax + b$, les variations de f dépendent du signe du coefficient de a.*

- *Si $a > 0$ alors f est strictement croissante ; on parle de croissance linéaire.*
- *Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante ; on parle alors de décroissance linéaire.*

Démonstration. Prenons une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$. Prenons deux nombres x et y tel que $y > x$.

- Si $a > 0$, alors $f(y) - f(x) = a(y - x)$. Comme $a > 0$ et $y - x > 0$ alors f est strictement croissante.
- Si $a < 0$, alors $f(y) - f(x) = a(y - x)$. Comme $a < 0$ et $y - x < 0$ alors f est strictement décroissante.

(Croquis de la situation). □

Une conséquence directe :

Exemple 1.
Pour $f(x) = 2x + 4$, comme $a = 2$ est positif, on sait que f est une fonction affine croissante donc si $y \geq x$ alors $f(y) \geq f(x)$.

1.1.3 Taux de variation

Définition 2 (Taux de variation)**.**
Pour une fonction affine f de la forme $f(x) = ax + b$, pour deux nombres distincts x et y on appelle taux de variation (ou d'accroissement) de f, le nombre $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

C'est le taux d'accroissement qui nous permet de calculer le coefficient directeur a.

Propriété 2. *Une fonction f est affine de la forme $f(x) = ax + b$ si et seulement si, pour tous nombres x et y distincts, le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ *est constant et égal à a.*

Méthode pour déterminer le coefficient directeur
Prenons une fonction f affine tel que pour tout nombre x, on ait $f(x) = ax + b$.
Pour deux nombres distincts x et y alors, on a :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= ay + b - (ax + b) \\ &= ay + b - ax - b \\ &= ay - ax \\ &= a(y - x). \end{aligned}$$

Comme $y \neq x$ on peut diviser par $(y - x)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= \frac{a(y - x)}{(y - x)} \\ &= a \times \frac{y - x}{y - x} \\ &= a \end{aligned}$$

Exemple 2.
Considérons une fonction f affine tel que $f(1) = 6$ et $f(4) = 12$.
Déterminons l'expression algébrique de f.

On sait que f est une fonction affine donc f est de la forme $f(x) = ax + b$.
Comme $1 \neq 4$ on peut calculer :

$$\begin{aligned} a = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} &= \frac{12 - 6}{3} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer $a = 2$ donc $f(x) = 2x + b$.
Or, on sait $f(1) = 2 \times 1 + b = 6 \iff b = 6 - 2 = 4$ donc $f(x) = 2x + 4$.

1.1.4 Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété 3. *La représentation graphique d'une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est une droite constituée de tous les points de coordonnées $(x, f(x)) = (x, ax + b)$.*

Remarque 2. *Cette droite passe par le point de coordonnée $(0, b)$ justifiant le nom d'ordonnée à l'origine.*

Méthode pour représenter une fonction affine
Pour une fonction affine $f(x) = ax + b$.

1. Placer le point de coordonnée $(0, b)$.
2. Choisir un x et calculer $f(x)$. En général, on choisit $x = 1$ ou $x = 2$.
3. Placer le point de coordonnée $(x, f(x)$.
4. Relier les deux points.

Exemple 3.
Représenter $f(x) = 2x + 4$.

1.1.5 Exercices

Exercice 1 (Fait à la maison)**.**
On considère la fonction affine f définie par $f(x) = -5x + 3$.
a. Calculer l'image de 5 par f.
b. Calculer l'antécédent de 4 par f.

Exercice 2.
Considérons une fonction affine f telle que $f(0) = 3$ et $f(1,5) = 0$.
1) Déterminer une expression de $f(x)$ pour tout nombre x.
2) Calculer $f(-3)$, $f(0)$, $f(8)$.
3) Résoudre pour tout nombre x, $f(x) = 6$ et $f(x) = 0$.
4) Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 3.
Considérons la fonction affine $f(x) = -2x + 4$ et la fonction affine g telle que $g(1) = -2$ et $g(3) = 2$.
1)Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout nombre x.
2)Représenter graphiquement f et g.
3)Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
4)Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

Chapitre 2

Suite arithmétique

2.1 Suites numériques

Exercice 4. *Chris veut partir en vacances et décide d'économiser chaque mois la somme de 45 euros. Il débute avec une somme 23 euros.*

1. *De quelle somme disposera-t-il au bout de trois mois ?*
2. *Au bout d'un an ?*
3. *Conjecturer une formule permettant de calculer la somme dont dispose Chris en fonction du nombre de mois.*

2.1.1 Définitions

Définition 3 (Suite numérique)**.**
Une suite numérique u est une liste ordonnée de nombres pour laquelle, on note généralement le premier terme u_0, le second u_1, le troisième u_2 et ainsi de suite.
La suite u peut également se noter (u_n). Le nombre u_n est appelé le terme d'indice n, n étant un nombre entier positif ou nul (ou entier naturel).

Plusieurs manières de définir une suite numérique

Il existe plusieurs manières de définir une suite numérique (u_n).

Formule explicite

Cela peut être une formule explicite comme dans le cas des fonctions affines. Par exemple, pour tout n entier positif, la formule $u_n = 4 \times n + 2$ donne la suite $(u_0, u_1, u_2, \dots) = (2, 6, 10, \dots)$.

Exercice 5. *Calculer les quatre premiers termes des suites définies de la façon suivante :*

1. *Pour tout entier* $n \geq 0$, $u_n = n^2 + 2n$.
2. *Pour tout entier* $n \geq 0$, $v_n = 100 \times 1,02$.
3. *On considère la suite définie pour tout entier* $n \geq 0$, $u_n = 2 + \dfrac{3}{n+1}$
   (a) *Calculer le quinzième terme de la suite* (u_n).
   (b) *Calculer* u_{1000}.

Formule de récurrence
Mais très souvent, la formule pour calculer le terme d'indice n (n étant un toujours entier naturel) u_n d'une suite, il dépend du terme d'indice précédent u_{n-1}. On appelle cela une relation de récurrence. Maintenant, le cas qui nous importe :

Définition 4 (Suite arithmétique)**.**
Une suite est dite arithmétique si pour passer d'un terme au suivant, il suffit d'ajouter un nombre r *(qui peut être négatif).*
Cela se formalise par : $u_{n+1} = u_n + r$

Remarque 3. *La formule que l'on devait conjecturer au 3. de l'exercice 1 était donc* $u_n = u_0 + n \times 45$.

Exemple 4.
Calculons les trois premiers successifs termes u_1 et u_2, u_3 de la suite $u_{n+1} = u_n - 5$ avec comme premier terme $u_0 = 17$.
On a $u_1 = u_0 - 5 = 17 - 5 = 12$ et $u_2 = u_1 - 5 = 12 - 5 = 7$, $u_3 = 7 - 5 = 2$.

Exercice 6.
Calculer les quatre premiers termes des suites définies de la façon suivante :

- $w_0 = 2$, *pour* $n \geq 0$, $w_{n+1} = 3 \times w_n - 4$.
  Comment pourrait-on qualifier la suite (w_n) *?*
- $x_0 = 3$, *pour* $n \geq 0$, $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + 1$.

2.1.2 Exercice à faire pour la séance suivante

Exercice 7 (Placement et intérêts)**.**
John Doe décide de placer 1000 euros sur un placement à taux d'intérêts simple. Le taux est de 5% annuel. Il désire faire des prévisions sur l'évolution de son capital.
On rappelle qu'un placement à taux d'intérêt simple suit le principe suivant : pour un taux annuel de x%, on reçoit chaque année le même intérêt égal à x% du capital initial.

1. *De combien disposera-t-il au bout d'un an ?*
2. *De combien disposera-t-il au bout de cinq ans ? Huit ans ?*
3. *On va essayer de formaliser cela en termes de suite arithmétique, si on note* (u_n) *le capital au bout de* n *années.*
   (a) *Donner la formule qui permettrait de calculer la situation de la première question. A t'on à faire à une suite arithmétique ?*

2.2 Calcul des termes d'une suite arithmétique

Correction

Correction 1. 1. La suite (w_n) est constante et égale à 2.

2. $x_0 = 3$, $x_1 = -3^2 + 3 + 1 = -9 + 3 + 1 = -5$,
   $x_2 = -(-5)^2 + (-5) + 1 = -25 - 4 = -29$
   $x_3 = -(-29)^2 - 29 + 1 = (-869)$
   $x_4 = -(-869)^2 - 869 + 1 = (-756\ 029)$.

Correction 2 (Exercice 7).

1. Il disposera de $1000 + \frac{5}{100} \times 1000 = 1000 + 50 = 1050$ euros.
2. Il disposera de $1000 + (\frac{5}{100} \times 1000) \times 8 = 1000 + 400 = 1400$ euros.
3. Si, on pose $u_0 = 1000$, l'année d'après, on a : $u_1 = u_0 + \frac{5}{100} \times u_0$.

2.2.1 Calcul des termes d'une suite

On remarque que si une suite (u_n) est définie par une relation par récurrence, pour calculer le $n - ième$ terme, nous avons besoin de connaitre tous ceux qui le précédant. Cela est donc fastidieux.

Exercice 8.
Prenons une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0. Par définition, on a pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n-1} + r$.
2) Exprimer u_2 en fonction de r et u_1 puis en fonction de r et u_0.
3) Exprimer u_3 en fonction de u_2 puis en fonction de r et u_0.
4) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n, r et u_0.

Propriété 4.
Pour une suite (u_n) arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on peut calculer son terme de rang n avec la formule générale $u_n = n \times r + u_0$.

Démonstration. Prenons une suite arithmétique (u_n), par définition, on a $u_n = u_{n-1} + r$. Pour le rang précédent, $u_{n-1} = u_{n-2} + r$, Ainsi, on a :

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + r \\
&= u_{n-2} + r + r = u_{n-2} + 2r \\
&= u_{n-3} + r + 2r = u_{n-3} + 3r \\
&= u_{n-4} + r + 3r = u_{n-4} + 4r \\
&= \vdots \\
&= u_1 + r + (n-2)r = u_1 + (n-1)r \\
&= u_0 + r + (n-1)r \\
&= u_0 + n \times r.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a montré que $u_n = u_0 + n \times r$ $\square$

Exercice 9. *Calculer les quatre premiers termes. Dire si c'est une suite arithmétique. Si oui, donner la relation de récurrence ou la formule générale en fonction de la situation.*

1. $u_n = -7n + 2$.
2. $u_0 = 7$ *et pour tout* n *entier naturel* $u_n = u_{n-1} \times 2$.
3. $u_n = 2n^2 - 3n - 1$.
4. $u_0 = 5$ *et pour tout* n *entier naturel* $u_n = u_{n-1} + 4$.

2.2.2 Exercice à faire pour la séance suivante

Exercice 10. *Pour les suites suivantes, dire si ce sont des suites arithmétiques, puis donner la formule générale ou la formule de récurrence. Enfin, calculer les 4 premiers termes :*

1. $u_0 = 5$ *et* $u_n = u_{n-1} + 12$.
2. $x_0 = 3$, *pour* $n \geq 0$, $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + 1$.
3. $w_n = 15 + n \times 4$.
4. $z_n = 12 + n^2 \times 3$.

2.3 Sens de Variation d'une suite arithmétique

2.3.1 Sens de Variation d'une suite arithmétique

Exercice 11. *Pour les suites suivantes, dire si ce sont des suites arithmétiques, puis donner la formule générale ou la formule de récurrence.*
Ensuite, calculer les trois premiers termes.
Enfin, que pouvez-vous dire sur les variations des suites arithmétiques ?

1. $u_0 = 5$ *et* $u_n = u_{n-1} + 12$.
2. $x_0 = 3$, *pour* $n \geq 0$, $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + 1$.
3. $z_n = 12 + n^2 \times 3$, $z_0 = 12$.
4. $u_{n+1} = -7 + u_n$, $u_0 = 4$.
5. $u_0 = 7$ *et pour tout* n *entier naturel* $u_n = u_{n-1} \times 2$.
6. $u_n = 2n^2 - 3n - 1$, $u_0 = -1$.
7. $u_0 = 5$ *et pour tout* n *entier naturel* $u_n = u_{n-1} + 4$.

L'analogue du coefficient directeur a pour une fonction affine f est la raison r d'une suite arithmétique (u_n). Ici, la raison r nous permet de connaître le sens de variation de la suite arithmétique.

Propriété 5. *Pour toute suite arithmétique de raison* r *:*

- *Si* $r > 0$ *alors* (u_n) *est croissante.*
- *Si* $r < 0$ *alors* (u_n) *est décroissante.*

Démonstration. Comme u_n est une suite arithmétique de raison r, si u_0 est le premier terme, on a $u_n = u_0 + n \times r$.

Dans le cas où $r > 0$, $u_n - u_{n-1} = u_0 + n \times r - u_0 + (n-1) \times r = r > 0$ donc la suite est croissante.

Dans le cas où $r < 0$, $u_n - u_{n-1} = u_0 + n \times r - u_0 + (n-1) \times r = r < 0$ donc la suite est décroissante. □

2.3.2 Représentation graphique d'une suite arithmétique

Comme dans le cas des fonctions affines, on souhaite représenter graphiquement les suites arithmétiques.

Exercice 12.
On s'intéresse à une fonction f *vérifiant* $f(1) = 5$ *et* $f(-3) = -3$.

1. *Montrer que f est une fonction affine. (Indication : Utiliser le taux de variation)*

2. *Représenter la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, on la notera (d).*

3. *Maintenant, on s'intéresse à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et pour tout n entier positif, $u_n = u_{n-1} + 2$.*

   (a) *Calculer u_1, u_2, u_3.*

   (b) *Placer les points $(1, u_1)$, $(2, u_2)$, $(3, u_3)$ dans le repère.*

   (c) *Que peut-on dire sur ces trois points ?*

Comme une suite (u_n) est une liste ordonnée de nombres, à chaque abscisse n on peut associer le point de coordonnées (n, u_n).
Ainsi, si on représente notre suite, on obtient un nuage de points.

Remarque 4. *On rappelle que, dans le cas continu (au chapitre précédent) on obtenait une droite pour les fonctions affines.*

Propriété 6 (Lien avec les fonctions affines)**.**
La représentation graphique de la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est un nuage de points qui appartiennent à la droite représentant la fonction affine définie par $f(x) = r \times x + u_0$.

(Dessin)

2.3.3 Exercice pour la séance suivante

Exercice 13. *Selma souhaite acheter son prochain téléphone grâce à son argent de poche. Dans sa tirelire, elle a déjà 75 euros. Chaque mois ses parents lui donne 25 euros d'argent de poche.*
Pour tout entier naturel n on note u_n la somme disponible dans sa tirelire après n mois. On a donc $u_0 = 75$.

1. *Calculer u_1, u_2.*

2. *La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Donner u_{n+1} en fonction de u_n.*

3. *Donner le terme général de la suite (u_n).*

4. *Déterminer le nombre de mois nécessaire pour que Selma dispose de 250 euros.*

5. *Le téléphone que souhaite se procurer Selma coûte un peu plus de 385 euros. Combien de mois devra-t-elle patienter ?*

Chapitre 3

Fonction exponentielle

3.1 Définitions des fonction exponentielles

Introduction

2 Croissances exponentielles

On cherche à comparer l'évolution démographique de deux villes.

	2016	2019
Châlons-en-Champagne	44 980	44 379
Épinal	31 558	32 256

(*Source* : INSEE)

1. a) Déterminer le taux d'évolution de la population de Châlons entre 2016 et 2019. Arrondir à 0,1 % près.

b) Déterminer le taux d'évolution de la population d'Épinal entre 2016 et 2019. Arrondir à 0,1 % près.

2. On suppose que la population de ces villes continue à évoluer en suivant la même évolution en pourcentage. Déterminer la population de chacune de ces villes en 2022 selon ce modèle.

3. On note $u(n)$ la population de la ville de Châlons n périodes de 3 ans après 2016. Ainsi, $u(0)$ représente la population de Châlons en 2016 et $u(1)$ celle en 2019. Donner la nature de la suite u puis calculer $u(2)$.

4. On note $v(n)$ la population d'Épinal n périodes de 3 ans après 2016. Donner la nature de la suite v.

5. Construire dans un repère le nuage de points contenant les douze premiers termes de chaque suite.

6. Déterminer quand la population d'Épinal dépassera celle de Châlons selon ce modèle.

7. On peut étendre la modélisation pour pouvoir estimer la population à tout instant.
On note $f(x) = 44\ 980 \times 0{,}987^x$ et $g(x) = 31\ 558 \times 1{,}022^x$.

a) Tracer les courbes représentatives des deux fonctions avec un logiciel ou une calculatrice.

b) Estimer au cours de quel mois la population d'Épinal dépassera celle de Châlons.

8. a) Pour aller plus loin Montrer que $u(n+1) - u(n) = -584{,}74 \times 0{,}987^n$ puis en déduire le signe de $u(n+1) - u(n)$.

b) Que vient-on de justifier ?

Cours 1 p. 82

3.1.1 Fonctions exponentielles

Définition 5 (Fonction exponentielle de base a).
Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a.

Remarque 5. *Plusieurs remarques :*

1. *Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a $a^x > 0$.*
2. *Les valeurs de $f(x)$ se calculent en général avec une calculatrice à l'aide de la touche exp.*

Propriété 7 (Lien avec les suites géométriques)**.**
La fonction $f(x) = k \times a^n$ est le prolongement à tout nombre réel x de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = k$ et de raison a définie pour tout entier naturel n par $u_n = u_0 \times a^n = k \times a^n$.
On dit que f est le prolongement de la suite (u_n) dans le cas où « l'exposant » est réel.

Exemple 5.

1. Pour tout nombre réel x, la fonction $f(x) = 2,7^x$ est la fonction exponentielle de base $2,7$.
   Et on a $f(0) = 2,7^0 = 1$, $f(1,2) = 2,7^{1,2} \sim 3,29$.
2. Pour tout nombre réel x, la fonction $g(x) = 0,4^x$ est la fonction exponentielle de base $0,4$.
   Et on a $g(0) = 0,4^0 = 1$, $g(3,5) = 0,4^{3,5} \sim 0,04$.

Propriété 8 (Sens de variation)**.**
Soient $k > 0$ et $a > 0$, considérons la fonction définie pour tout nombre réel $x \geq 0$ par $f(x) = k \times a^x$.

1. *Si $a > 1$ alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.*
2. *Si $0 < a < 1$ alors f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.*

Remarque 6. *Le rapport entre les images de deux nombres séparés d'un écart donné est constant. Ceci est caractéristique d'une croissance exponentielle continue.*

3.2 Séance 2 : Propriété Algébrique et racine n-ièmes

Introduction

3 Notation a^p

1. a) Afficher les courbes des fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

b) Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer le nombre de solutions positives de l'équation $x^n = a$.

2. Sans calculatrice, donner ainsi les valeurs de $8^{\frac{1}{3}}$; $27^{\frac{1}{3}}$ et $1^{\frac{1}{3}}$.

3. En s'inspirant du calcul avec les puissances, définir ce que serait $a^{-\frac{1}{n}}$ si $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En s'inspirant du calcul avec les puissances, définir ce que serait $a^{\frac{p}{n}}$ si $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

5. Pour aller plus loin Démontrer en utilisant la définition que $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}$ pour tous entiers n et p et $a > 0$.

3.2.1 Propriétés algébriques

Propriété 9 (Propriétés algébriques)**.**
Pour tout réel a et b strictement positifs et x, y deux nombres réels. Comme pour les puissances entières, on a :

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $(a^x)^y = a^{x \times y}$
4. $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$
5. $a^x \times a^y = a^{x+y}$
6. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
7. $a^x \times b^x = (ab)^x$

3.2.2 Racines n-ièmes

Propriété 10 (Racine n-ièmes)**.**
Soit $c \geq 0$. L'équation $x^n = c$ admet une unique solution réelle positive. Cette solution est $x = c^{\frac{1}{n}}$.

Chapitre 4

Statistiques descriptives

4.1 Étude de deux caractères

4.1.1 Cardinal et fréquence

Définition 6 (Vocabulaire général)**.**
L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique s'appelle la population.
Un élément de la population est un individu.
Dans une série statistique, l'objet étudié s'appelle le caractère.
Si le caractère prend des valeurs numériques, on dit qu'il est quantitatif. Sinon, il est qualitatif.
Un caractère quantitatif peut être discret ou continu :

- *discret s'il prend des valeurs isolées (exemple : 0 ; 1 ; 2 ; ...) ;*
- *continu s'il peut prendre toute valeur dans un intervalle appelé aussi classe.*

Définition 7 (Définitions et notations)**.**
On considère une population d'individus E. Dans celle-ci, on étudie deux caractère A et B.

- *Dans une population E, l'ensemble des individus qui possèdent le caractère A est noté A, l'ensemble des individus qui possède le caractère B est noté B.*
  Les ensembles A et B sont des sous-populations de E.

- *On note :*

  - $\text{card}(E)$ *est le nombre total d'individus de la population E, que l'on lit* <u>*cardinal*</u> *de E.*
  - $\text{card}(A)$ *est le nombre d'individus de la population qui possède le caractère A et* $\text{card}(B)$ *le nombre d'individus de la population qui possèdent le caractère B.*

- *Si le caractère A prends des valeurs numérique, on dit qu'il est* <u>*quantitatif*</u>*. Sinon, il est* <u>*qualitatif*</u>*.*

- *On note $\overline{A}$ l'ensemble des individus E qui ne possède pas le caractère A.*

Propriété 11. *La fréquence (ou la proportion) du caractère A d'une population E est le nombre* $f(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$.
Une fréquence peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.

Exercice 14. *Voir Barbazo p9 meth1*

4.1.2 Tableau croisé d'effectifs

Définition 8 (Intersection, Union de deux sous-populations)**.** *Soient A une sous-population de E dont les individus possèdent le caractère A et B une sous-population de E dont le sindividus possèdent le caractère B.*

- *$A \cap B$ est l'ensemble des individus de E qui possède le caractère A et le caractère B.*

- *$A \cup B$ est l'ensemble des individus de E qui possède le caractère A ou le caractère B.*

Définition 9. *On peut dresser un tableau croisé d'effectifs des caractères A et B dans un tableau a double entrée.*

Caractère	B	$\overline{B}$	*Total*
A	$\text{card}(A \cap B)$	$\text{card}(A \cap \overline{B})$	$\text{card}(A)$
$\overline{A}$	$\text{card}(\overline{A} \cap B)$	$\text{card}(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\text{card}(\overline{A})$
Total	$\text{card}(B)$	$\text{card}(\overline{B})$	$\text{card}(E)$

Exercice 15. *Voir Barbazo p9 meth2*

4.1.3 Trier des doonées avec un tableur

Méthode 1. *Pour étudier plusieurs caractère d'une population E consituée d'un grand nombre d'individus, il est indispensable de tier et regrouper les données pour chaque sous-population.*

- *On peut construire un tableau coirsé dynamique d'effectifs.*
- *On peut utiliser la fonction $Filtrer$ du menu Données.*
- *On peut utiliser les connecteurs logiques ET/OU.*

Pour déterminer les effectifs de $A \cap B$, on utilise les formules :
« $= ET(valeurlogique1; valeurlogique2)$ ».
Pour déterminer les effectifs de $A \cup B$, on utilise les formules :
« $= OU($valeur logique 1; valeur logique 2$)$ ».

4.2 Exercice à faire

Exercice 16. *Voir Barbazo p22 exercice 26.*

Dans une population E, on s'intéresse à deux caractères A et B simultanément. On dispose souvent d'un tableau croisé d'effectifs dans lequel figure une colonne « Total » à droite et une ligne « Total » en bas que l'on nomme les marges.
Prenons le tableau suivant :

	A	$\overline{A}$	Total
B	10	10	20
$\overline{B}$	5	35	40
Total	15	45	60

On rappelle que la fréquence est égale au quotient $\frac{effectif}{\text{effectif total}}$

Définition 10. *Une fréquence marginale est une fréquence dans la population totale.*

Exemple 6. • La fréquence marginale de B dans la population totale est de $\frac{20}{60}$.

- La fréquence des individus vérifiant à la fois le caractère A et B dans la population totale est de $\frac{10}{60}$ puisque l'effectif de la population vérifiant les caractères A et B est de 10.

Définition 11. *La fréquence conditionnelle est une fréquence dans une sous-population. La fréquence conditionnelle de A dans B correspond à la fréquence du caractère A dans la sous-population vérifiant le caractère B.*

Exemple 7. La fréquence conditionnelle de A dans la sous-population vérifiant le caractère B est $\frac{10}{20}$ car parmi les 20 individus vérifiant B, 10 vérifient également A.

Exercice 17. *Voici la répartition des 157 pantalons d'un magasin selon la taille et la couleur.*

1. *Quelle est la fréquence de pantalons noirs ?*
2. *Parmi les pantalons de taille L, quelle est la fréquence de pantalons blancs ?*

	S	*M*	*L*	*XL*	*Total*
Noir	*15*	*26*	*34*	*8*	*83*
Blanc	*32*	*24*	*15*	*3*	*74*
Total	*47*	*50*	*49*	*11*	*157*

Correction 3. 1. La fréquence de pantalons noirs est de $\frac{83}{157} = 0,53 = 53\%$.

2. Dans le stock des pantalons de taille L, la fréquence de pantalons blancs est de $\frac{15}{49} = 31\%$.

Chapitre 5

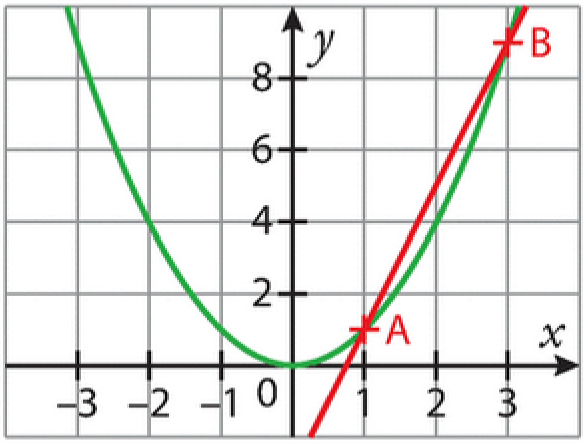
Variations instantannée

5.1 Taux d'accroissement

Considérons I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I, a et b deux réels appartenant à I et A et B les points de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

Définition 12. *On appelle sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ toute droite passant par deux points distincts de la courbe.*

Exemple 8. Considérons la fonction carré $g(x) = x^2$.
La droite (AB) où $A(1;1)$ et $B(3;9)$ est une sécante à la courbe représentative $\mathcal{C}_g$.



Propriété 12. *Le coefficient directeur de la sécante (AB) est le taux d'accroissement de f entre a et b, il est défini comme le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

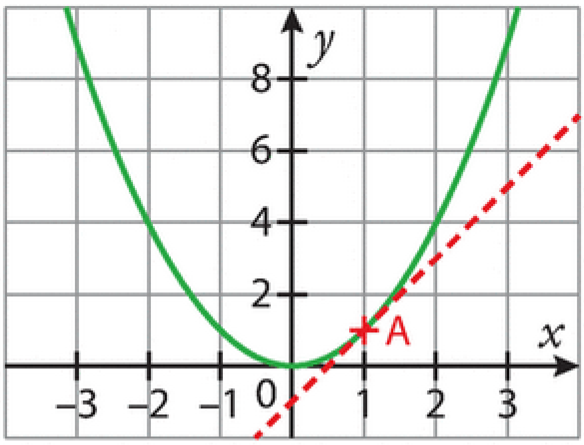
Exemple 9. Considérons encore la fonction carré $g(x) = x^2$, comme $A(1;1)$ et $B(3;9)$ appartiennent à la courbe de g, on a $g(1) = 1$ et $g(3) = 9$ donc le coefficient directeur de la droite (AB) est le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

5.2 Tangente et nombre dérivé

Définition 13. *Quand le point B se rapproche de A, la sécante (AB) semble se rapprocher d'une position limite. Cette droite limite s'appelle la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.*

Propriété 13. *Quand elle existe, cette tangente est unique et vient frôler la courbe $\mathcal{C}_f$ autour du point A.*

Exemple 10. On reprend notre fonction carré $g(x) = x^2$.



Définition 14. *Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale au point d'abscisse a alors le coefficient directeur de cette tangente est appelé nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.*

Propriété 14. *Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point $A(a; f(a))$, alors cette tangente a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.*

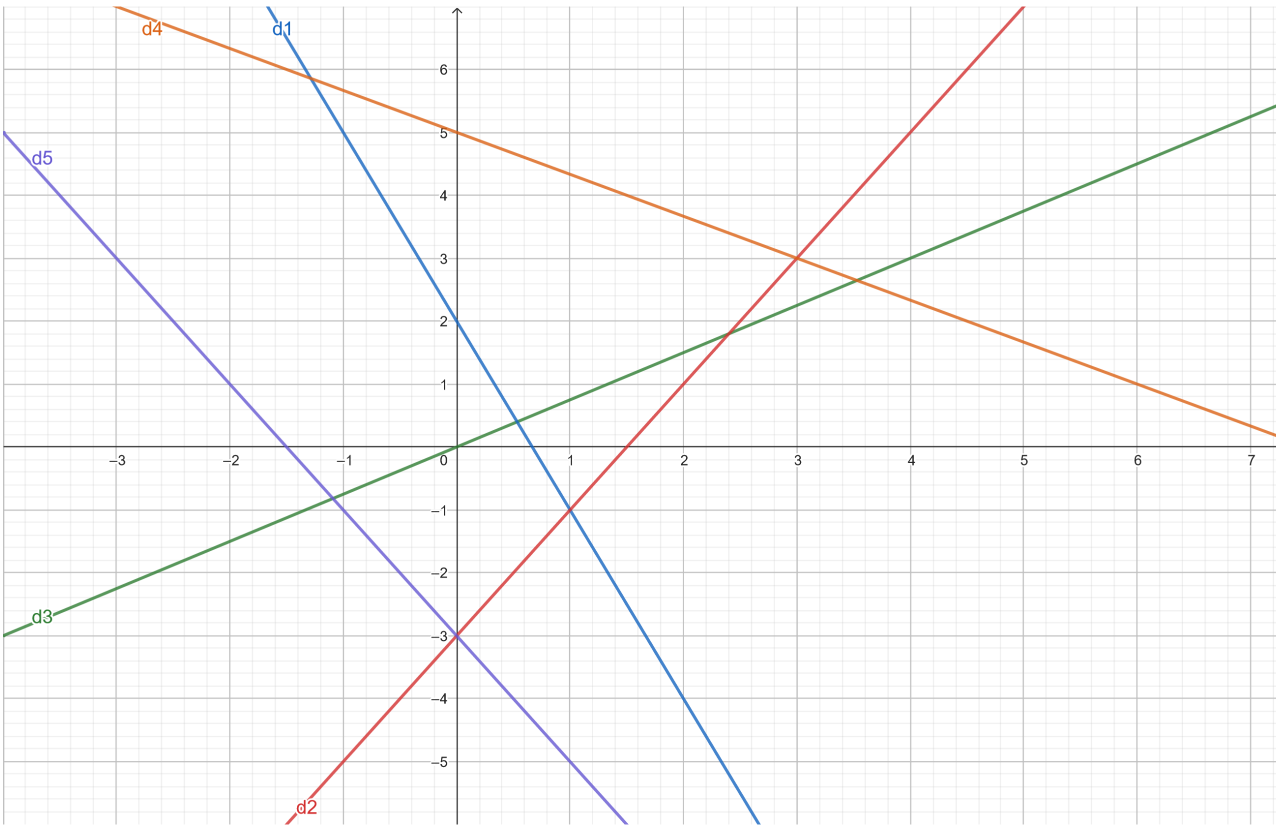
Chapitre 6

Devoirs

6.1 Fiche d'exercices

6.1.1 Fonction affine et suite arithmétique

Exercice 18. *Observer le graphique ci-dessous puis compléter le tableau.*



Droite	*Coefficient directeur*	*Ordonnée à l'origine*	*Fonction associée*
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f(x) = -3x + 2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f(x) = 2x - 3$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f(x) = \frac{3}{4}x$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f(x) = \dots$
d_5	$\dots$	$\dots$	$f(x) = \dots$

Exercice 19. *Soit f la fonction affine définie par* $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

1. *Donner la valeur exacte des images par f des réels suivants :* $3; 5; \frac{3}{4}, \sqrt{2}$.
2. *Donner les antécédents par f des réels suivants :* $2; \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$.

6.2 Suite arithmétique

Exercice 20. *Dans chaque cas, on donne les trois premiers termes d'une suite. Peut-elle être arithmétique ?*

1. *5 ;10 ;20.*
2. *4 ;-7 ;-18.*
3. $\frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$

Exercice 21. (v_n) *est une suite arithmétique telle que* $v_4 = 21$ *et* $v_8 = 9$. *Déterminer le terme* v_3.

Exercice 22. *Soit* (u_n) *la suite arithmétique de premier terme* $u_0 = 9$ *et de raison* $r = 4$.

1. *Exprimer u_n en fonction de n.*
2. *En déduire la valeur de u_7.*

On rappelle quelques propriétés sur les suites arithmétiques :

Propriété 15.
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ alors son sens de variation dépend uniquement du signe de r.
Elle est croissante (respectivement décroissante) quand $r > 0$ (respectivement $r < 0$).

Exercice 23. *Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite* (u_n). *Justifier.*

1. *La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par* $u_n = \frac{3-n}{2}$.
2. *La suite (u_n) est arithmétique avec pour premier terme $u_0 = 5.8$ et $u_1 = 8.9$.*
3. *La suite (u_n) est arithmétique telle que $u_0 = 7$ et $u_8 = 7$.*

6.3 Suite géométrique

6.3.1 Applications directe

Exercice 24. *(v_n) est une suite géométrique de raison 20 et de premier terme $v_1 = 0,5$.*
Calculer les trois termes suivants.

Exercice 25. *(a_n) est une suite géométrique telle que $a_{10} = 12$ et $a_{11} = 8$.*

1. *Quelle est la raison de (a_n) ?*

2. *Quel est le sens de variation de (a_n) ?*

6.3.2 Calcul des termes d'une suite géométrique

Exercice 26. *(u_n) est une suite géométrique. On sait que $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 8,1$.*
Calculer la raison de cette suite, puis calculer u_1.

Exercice 27. *(y_n) une suite géométrique de raison $1,5$. On sait que $y_6 = 75$.*
Calculer y_3, y_7, y_{10}.

Exercice 28. *(v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison $q = 2,6$.*

1. *Calculer v_2, v_3 et v_4.*

2. *Écrire la relation de récurrence donnant v_{n+1} en fonction de v_n.*

3. *Donner l'expression de v_n en fonction de n.*

4. *Calculer v_{50}.*

Exercice 29. *(w_n) une suite géométrique de premier terme $w_2 = 25$ et de raison $q = 0,75$.*

1. *Calculer w_3, w_4 et w_5.*

2. *Écrire la relation de récurrence donnant w_{n+1} en fonction de w_n.*

3. *Donner l'expression de w_n en fonction de n.*

4. *Calculer w_{30}.*

6.3.3 Modéliser par une suite géométrique

Exercice 30. *Francis entretient sa pelouse d'une superficie de* $500m^2$*. Chaque année, cette pelouse perd* 8% *de sa surface. Lorsque* 30% *de la surface initiale de la pelouse sera perdue, il sèmera une nouvelle pelouse. On note* s_n*, la surface de la pelouse après* n *années.*

1. *Que représente* s_4 *?*
2. *Calculer les surfaces de pelouse* s_0, s_1, s_2, s_3 *et* s_4*, arrondies au* m^2*.*
3. *Au bout de combien d'années Francis sèmera-t-il une nouvelle pelouse ?*

Exercice 31. *Une entreprise produit 30 tonnes de déchets non recyclables en 2015. Chaque année, l'entreprise veut diminuer la masse de déchets non recyclables de* 3% *par rapport à l'année précédente.*
Pour tout nombre positif n*, on note* p_n *la masse de déchets non recyclables pour l'année* $2015 + n$*.*

1. *Quelle est la masse de déchets non recyclables en 2026 ? On donnera la valeur arrondie au kilogramme.*

6.3.4 Représenter une suite géométrique

Exercice 32. *La consommation annuelle de café dans le monde était de* $9,564$ *millions de tonnes en 2018. Entre 2012 et 2018, cette consommation a augmenté d'environ* $1,3\%$ *en moyenne par an. On note* c_n *la consommation annuelle de café (en tonnes) de l'année de rang* n*.*

1. *Modéliser cette évolution à l'aide d'une suite géométrique, puis la représenter graphiquement.*

Exercice 33. *Pour chacune des suites géométriques, déterminer son sens de variation en justifiant.*

1. $u_0 = 1$ *et pour tout nombre entier positif* n*,* $u_{n+1} = 0,85 \times u_n$*.*
2. *Pour tout nombre entier positif* n*,* $v_n = \frac{1}{4} \times 1,02^n$*.*
3. $w_0 = 3$ *et pour tout nombre entier positif* n*,* $w_{n+1} = 10 \times w_n$*.*
4. $t_0 = 6,2$ *et pour tout nombre entier positif* n*,* $t_{n+1} = t_n$*.*
5. *Pour tout nombre entier* n*,* $s_n = 587 \times 0,45^n$*.*

6.4 Résolution de problème : séries géométriques

Exercice 34. *En 2022, le taux d'inflation en France était de* $5,6\%$. *L'inflation est le pourcentage d'augmentation annuelle des prix. On suppose que le taux d'inflation reste constant pour l'année suivante.*
En 2022, un produit coûtait 150 euros. On note P_n *le prix du produit lors de l'année* $2022 + n$. *On a donc* $P_0 = 150$.

1. *Justifier que, pour tout entier naturel* n, *on a* $P_n = 150 \times 1,056^n$.

2. *Quel sera le prix de ce produit en 2028 si le taux d'inflation reste constant chaque année ? Arrondir au centime d'euro.*

3. *Déterminer, avec une calculatrice, la première année à partir de laquelle le prix du produit sera supérieur ou égal à 240 euros.*

Exercice 35. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_{n+1} = 4u_n + 9$ *pour* $n \geq 0$ *et* $u_0 = 1$

1. *Calculer* u_1 *et* u_2.

2. *Montrer que la suite* (u_n) *n'est ni arithmétique ni géométrique.*

3. *Soit* (v_n) *la suite définie par* $v_n = u_n + 3$
   (a) *Calculer* v_0.
   (b) *Montrer que* v *est géométrique de raison 4.*
   (c) *En déduire une expression de* v_n *en fonction de* n.
   (d) *Déduire de la question précédente une expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 36. *En 2017, la population mondiale était de 7,5 milliards d'habitants. Gilles Pison, un chercheur français, associé à l'Institut national d'études démographiques, estimé alors qu'elle atteindrait 10 milliards en 2050.*

Problématique : *Considérons correcte l'estimation de Gilles Pison et on modélise l'évolution de la population par une suite géométrique. En quelle année la population mondiale passera-t-elle le seuil de 9 milliards d'habitants ?*

Notons p_n *l'effectif de la population mondiale pour l'année* $(2017 + n)$ *en milliards d'habitants.*

1. *Que vaut* p_0 *?*

2. *Vérifier que la raison de la suite* (p_n), *au dix-millième près, est égale à 1,008 8.*

3. *Calculer l'effectif de la population mondiale en 2030.*

4. *Selon cette modélisation, le seuil des huit milliards d'humains a-t-il été franchi en 2022 ?*

5. *Répondre à la problématique.*

Exercice 37. *En 2022, la consommation d'électricité liée aux usages du numérique en France était de 56 térawattheures (TWh).*
On admet que cette consommation augmente de 4% *par an depuis 2022.*
Pour tout entier naturel n, on note u_n la consommation d'électricité liée aux usages du numérique en France, exprimée en térawattheure, pour l'année $2022 + n$. *Ainsi,* $u_0 = 56$.

1. *Calculer la consommation d'électricité, exprimée en TWh, liée aux usages du numérique en 2023.*

2. (a) *Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner ses éléments caractéristiques.*

   (b) *Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.*

   (c) *On admet que chaque année, la consommation d'électricité en France, tous usages confondus, est égale à 480TWh. Est-il exact d'affirmer qu'en 2030, plus de* 20% *de la consommation d'électricité sera liée aux usages du numérique ? Justifier la réponse.*

6.5 Fonction exponentielles

6.5.1 Manipuler des fonctions exponentielles

Exercice 38.

2 Croissances exponentielles

On cherche à comparer l'évolution démographique de deux villes.

	2016	2019
Châlons-en-Champagne	44 980	44 379
Épinal	31 558	32 256

(*Source* : INSEE)

1. a) Déterminer le taux d'évolution de la population de Châlons entre 2016 et 2019. Arrondir à 0,1 % près.

b) Déterminer le taux d'évolution de la population d'Épinal entre 2016 et 2019. Arrondir à 0,1 % près.

2. On suppose que la population de ces villes continue à évoluer en suivant la même évolution en pourcentage. Déterminer la population de chacune de ces villes en 2022 selon ce modèle.

3. On note $u(n)$ la population de la ville de Châlons n périodes de 3 ans après 2016. Ainsi, $u(0)$ représente la population de Châlons en 2016 et $u(1)$ celle en 2019. Donner la nature de la suite u puis calculer $u(2)$.

4. On note $v(n)$ la population d'Épinal n périodes de 3 ans après 2016. Donner la nature de la suite v.

5. Construire dans un repère le nuage de points contenant les douze premiers termes de chaque suite.

6. Déterminer quand la population d'Épinal dépassera celle de Châlons selon ce modèle.

7. On peut étendre la modélisation pour pouvoir estimer la population à tout instant.
On note $f(x) = 44\,980 \times 0{,}987^x$ et $g(x) = 31\,558 \times 1{,}022^x$.

a) Tracer les courbes représentatives des deux fonctions avec un logiciel ou une calculatrice.

b) Estimer au cours de quel mois la population d'Épinal dépassera celle de Châlons.

8. a) Pour aller plus loin Montrer que $u(n+1) - u(n) = -584{,}74 \times 0{,}987^n$ puis en déduire le signe de $u(n+1) - u(n)$.

b) Que vient-on de justifier ?

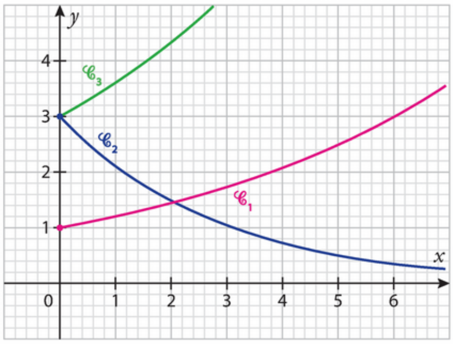
Cours 1 p. 82

Exercice 39. *Donner le sens de variation et donner l'allure de la courbe représentative des fonctions suivantes.*

1. f *définie pour* $x \geq 0$, $f(x) = 2 \times 0,7^x$.
2. g *définie pour* $x \geq 0$, $g(x) = -0,4 \times 1,05^x$.
3. h *définie pour* $x \geq 0$, $h(x) = 6 \times 1,1^x$.

Exercice 40.

70 On considère les fonctions f, g et h dont les courbes sont tracées dans le repère ci-dessous.
Elles sont définies sur $\mathbb{R}+$ par :
- $f(x) = 3 \times 0{,}7^x$
- $g(x) = 3 \times 1{,}2^x$
- $h(x) = 1{,}2^x$



Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

Exercice 41. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 \times 2^x$.*

1. *Calculer $f(0)$ et $f(3)$.*
2. *Déterminer une valeur approchée de $f(1,5)$ à 10^{-2} près.*

Exercice 42. *Chacune des fonctions suivantes a une expression de la forme $k \times a^x$. Pour chacune d'elles, indiquer les valeurs de k et de a puis donner son sens de variation.*

- $f(x) = 5 \times 0,5^x$
- $g(x) = \frac{1}{2} \times 3^x$
- $h(x) = 2 \times 1,05^x$
- $k(x) = 6^x$
- $m(x) = 4 \times 0,3^x$
- $n(x) = 0,7^x$

6.5.2 Manipuler des propriétés algébriques

Exercice 43.

3 Notation a^p

1. a) Afficher les courbes des fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

b) Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer le nombre de solutions positives de l'équation $x^n = a$.

2. Sans calculatrice, donner ainsi les valeurs de $8^{\frac{1}{3}}$; $27^{\frac{1}{3}}$ et $1^{\frac{1}{3}}$.

3. En s'inspirant du calcul avec les puissances, définir ce que serait $a^{-\frac{1}{n}}$ si $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En s'inspirant du calcul avec les puissances, définir ce que serait $a^{\frac{p}{n}}$ si $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

5. Pour aller plus loin Démontrer en utilisant la définition que $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}$ pour tous entiers n et p et $a > 0$.

Exercice 44. *Simplifier les expressions suivantes.*

1. $2^{1,7} \times 2^{4,3}$
2. $3^y \times 3^{-4}$
3. $\frac{5^{3x}}{5^x}$
4. $(0,7^4)^{1,5}$

Exercice 45. *Écrire les nombres suivants sous la forme a^x où a est un nombre entier.*

1. $7^{3,1} \times 3^{3,31}$
2. $4 \times 2^{-2,3}$
3. $5 \times \frac{5^{2,1}}{5^{1,5}}$
4. $\frac{6^{4,6}}{2^{4,6}}$
5. $4^3 \times (4^{2,1})^2$
6. $\frac{13^{3,1} \times 13}{13^{4,2}}$

Exercice 46. *Soient f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 0,8^x$ et $g(x) = 1,2^x$. h est la fonction définie par $h(x) = f(x) \times g(x)$*

1. *Déterminer l'expression de $h(x)$.*
2. *Déterminer le sens de variations de h.*

6.6 Croissance exponentielle

Exercice 47. *Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{4^{n+1}}$, pour $n \leq 0$.*

1. *Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de n.*
2. *Montrer que u est une suite géométrique. On donnera le terme initial et la raison.*

Exercice 48. *Soit u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.*

1. *Montrer que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.*
2. *Soit v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 1$.*
   (a) *Démontrer que la suite v est géométrique.*
   (b) *En déduire v_n puis u_n en fonction de n.*
   (c) *Déterminer pour quelle valeur de n, u_n dépasse 100.*

Exercice 49. *Soit n un entier naturel et q un réel avec $q \neq 1$.*

1. *Développer l'expression $(1 - q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$.*
2. *En déduire que $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*
3. *Soit u une suite géométrique, de terme initial u_0 et de raison $q \neq 1$.*
   (a) *Rappeler le terme général de la suite u.*
   (b) *En déduire une expression de $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de q, n, u_0.*

Exercice 50. *Le 1^{er} septembre 2022, un lycée compte 1200 élèves. Une étude statistique montre que l'année suivante : l'effectif d'anciens élèves diminue de 5% et 180 nouveaux élèves s'inscrivent.*
On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1^{er}.septembre de l'année $2022 + n$. On pose $u_0 = 1200$.

1. *Calculer u_1, u_2.*
2. *La suite (u_n) est-elle géométrique ?*
3. *Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,95u_n + 180$.*
4. *On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3600$*
   (a) *Combien vaut v_0 ?*
   (b) *Calculer $\dfrac{v_1}{v_0}$ et $\dfrac{v_2}{v_1}$. Que peut-on conjecturer pour la suite (v_n) ?*

5. (a) *On admet la conjecture précédente. Exprimer alors v_n en fonction de n.*
   (b) *En déduire une expression de u_n en fonction de n.*
   (c) *Combien y aura-t-il d'élèves inscrits dans le lycée au 1^{er} septembre 2030 ? Arrondir le résultat à l'élève près.*

Exercice 51. *Considérons la fonction f définie pour tout réel positif x par $f(x) = ka^x$ avec k et a deux réels strictement positifs. On suppose que $f(0) = 5$ et que la courbe représentative de la fonction f passe par le point de coordonnées $(2; 0,2)$.*

1. *Déterminer les valeurs de k et a.*

2. *Calculer la valeur exacte de $f(3)$.*

Exercice 52. *Des scientifiques étudient l'évolution d'un glacier. Des mesures régulières depuis 1900 ont été réalisées. La première mesure faite en 1900 montrait que le glacier mesurait 25,6 km de long.*
Par la suite, des relevés ont été effectués tous les 20 ans et ont permis de modéliser la longueur du glacier $f(t)$ (exprimés en km) en fonction du nombre d'années t écoulées depuis 1900 par $f(t) = 25,6 - 0.2 \times 1,025^t$.
La valeur absolue de la vitesse instantanée, de disparition de la longueur du glacier à l'instant t, se note $v(t)$ (exprimé en km/années). Elle est définie par $v(t) = 0,0049 \times 1,025^t$.

1. *Déterminer la valeur absolue de la vitesse instantanée de disparations de la longueur du glacier en 1940 et 2020. Arrondir au millième.*

2. *On appelle valeur absolue de l'accélération moyenne de la disparition du glacier entre les instants t_1 et t_2 le nombre $a = \dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$, a étant exprimée en km/année^2*

   (a) *Déterminer la valeur absolue de l'accélération moyenne de la disparition du glacier entre 1940 et 2020. Donner le résultat arrondi au millième.*
   (b) *Calculer une valeur approchée de la longueur du glacier en 2040. Donner le résultat arrondi au dixième de km.*
   (c) *Déterminer la valeur absolue de l'accélération moyenne de la disparation du glacier entre les années 2020 et 2040. Arrondir le résultat au millième.*
   (d) *Quelle est, en pourcentage, l'augmentation de l'accélération entre 1940 et 2020 et de l'accélération entre 2020 et 2040 ?*

6.7 Proba 1

Exercice 53.

	Journalier	Hebdomadaire	Mensuel	Annuel	Total
Moins de 25 ans	270	788	735	927	2 720
De 25 à 49 ans	500	1 575	1 985	2 787	6 847
De 50 à 74 ans	488	1 676	1 432	2 500	6 096
75 ans et plus	72	117	237	534	960
Total	1 330	4 156	4 389	6 748	16 623

2 Découvrir les probabilités conditionnelles

On interroge au hasard un utilisateur de vélo parmi tous les utilisateurs en France.
On utilisera le tableau des effectifs de l'activité précédente.
On note les événements :

- J : « L'utilisateur choisi est un utilisateur journalier. »
- M : « L'utilisateur choisi est un utilisateur mensuel. »
- C : « L'utilisateur choisi a entre 50 et 74 ans. »
- S : « L'utilisateur choisi a 75 ans ou plus. »

1. a) Quelle est la probabilité que l'utilisateur choisi soit un utilisateur mensuel ?

b) Calculer $p(J)$, $p(C)$ et $p(J \cap S)$.

2. a) La personne choisie est un utilisateur de plus de 75 ans. Quelle est la probabilité que ce soit un utilisateur mensuel ?

On dit que l'on a calculé la probabilité de M sachant S, il s'agit d'une **probabilité conditionnelle** que l'on note $p_S(M)$.

b) Calculer $\dfrac{p(S \cap M)}{p(S)}$ sous forme de fraction. Quelle probabilité conditionnelle a été ainsi calculée ?

↪ Cours 2 p. 3

Exercice 54.

41 Soit deux événements C et D tels que $p(C) = 0{,}45$ et $p(C \cap D) = 0{,}2$. Calculer $p_C(D)$.

Exercice 55.

42 Soit deux événements E et F tels que $p(F) = 0{,}2$ et $p_F(E) = 0{,}45$. Calculer $p(F \cap E)$.

Exercice 56.

45 Dans un club d'athlétisme, chaque adhérent choisit une spécialité. La répartition est donnée dans le tableau ci-contre. On choisit au hasard un adhérent dans le club.

EPS

	Course	Saut
Cadet	89	23
Junior	151	78

Soit les événements :

- J : « L'adhérent choisi est un junior. »
- S : « L'adhérent choisi a pour spécialité le saut. »

1. Calculer $p(J)$, $p(\overline{S})$ et $p(J \cup S)$.

2. Donner la probabilité que l'adhérent soit un junior sachant qu'il a pour spécialité la course.

3. Donner $p_{\overline{J}}(\overline{S})$ puis interpréter cette probabilité.

6.8 Proba 2

Exercice 57. *Dans une ressourcerie, la probabilité qu'un article soit électronique est de $\frac{1}{3}$. La probabilité qu'un article soit à réparer et que ce soit un article électronique est de $\frac{1}{6}$. On choisit un article au hasard dans la ressourcerie.*
Sachant que c'est un article électronique, quelle est la probabilité qu'il faille le réparer ?

Exercice 58. *Dans un club d'athlétisme, chaque adhérent choisit une spécialité. La répartition est donnée dans le tableau ci-contre :*

	Course	*Saut*
Cadet	*89*	*23*
Junior	*151*	*78*

On choisit au hasard un adhérent dans le club. Considérons, les événements suivants :

- *J :« L'adhérent choisi est un junior »*
- *S :« L'adhérent choisi a pour spécialité le saut »*

1. *Calculer $P(J), P(\overline{S}), P(J \cup S)$.*
2. *Donner la probabilité que l'adhérent soit un junior sachant qu'il a pour spécialité la course.*
3. *Donner $P_J(S)$ puis interpréter cette probabilité*

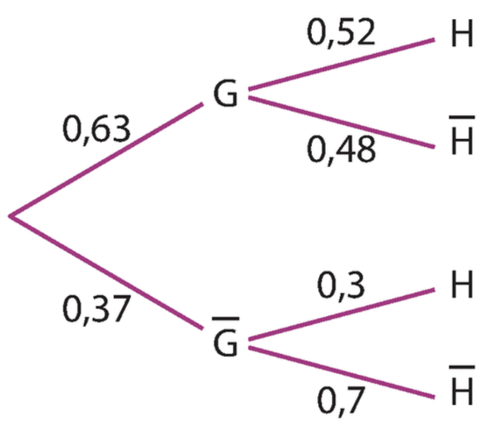
Exercice 59.

5 Soit l'arbre de probabilité ci-contre.

1. Donner $p(G)$, $p_G(H)$ et $p_G(\overline{H})$.

2. Calculer $p(G \cap H)$ et $p(\overline{G} \cap H)$.

3. En déduire $p(H)$.



Exercice 60. *D et E sont deux évènements associés à une expérience aléatoire représentée par l'arbre de probabilité ci-dessous :*

Arbre.png

1. (a) *Calculer $P(D \cap E)$ et $P(\overline{D} \cap E)$*

   (b) *En déduire $P(E)$.*

Exercice 61. *En utilisant le même arbre qu'à l'exercice précédent, répondre aux questions suivantes :*

1. *Donner $P(D)$ et $P_D(E)$.*
2. *Calculer $P(D \cap \overline{E})$ et $P(\overline{D} \cap \overline{E})$*
3. *En déduire $P(\overline{E})$*