Seconde Lycée Daumier 2023-2024

Keva Djambaé

2023/2024

Table des matières

Chapitre 1

Python

Introduction

Python fut inventé dans l'année 80 par Guido van Rossum, il souhaitait développer un langage scripté pour le système d'exploitation ABC (un ancêtre de Windows).
Commençons par une définition :

Définition 1 (Algorithme)**.**
On appelle algorithme une suite finie d'instructions décrites sans ambiguité qui permet de résoudre un problème donné.

Les langages de programmation ne sont finalement que le passage entre nous et l'ordinateur. Ainsi, on mesure l'efficacité d'un algorithme grâce à sa durée de calcul, sa consommation de mémoire et par la précision des résultats qu'il fournira.
Ainsi, Python est un langage de haut niveau (proche du langage naturel), sous licence libre, portable sans modification sous plusieurs systèmes d'exploitation, permettant la programmation orienté objet. C'est un langage sensible à l'indentation :

Exemple 1 (Un exemple de structure Python).
Première structure :
Instruction a1
Deuxième structure :
Instruction b1
Instruction b2
Instruction a2
Instruction a3
Suite du Programme

Quelques exemples d'utilisation de Python :

- En algèbre pour les calculs effectifs de polynômes grâce à SAGE.

- En machine learning et data science pour l'automatisation dans le traitement de bases de données.
- Dans les logiciels de créations assisté par ordinateur (CAO) pour le dessin par ordinateur.
- Les jeux vidéos Civilization IV ou Battlefield 2
- Les sites Reddit ou Youtube utilisent abondamment du Python.

1.1 Types de variables et affectations

Définition **Entier, flottant, chaîne de caractères et booléen**

Dans un programme, les variables considérées ont des **types** qui définissent la nature des valeurs qu'elles peuvent prendre. Les principaux types considérés en classe de Seconde dans le langage **Python** sont :

- `int` (*integer*) pour des nombres **entiers**,
- `float` (*floating-point*) pour les **flottants** c'est-à-dire des nombres « à virgule »,
- `str` (*string*) pour les **chaînes de caractères** c'est-à-dire des mots ou groupes de mots,
- `bool` (*boolean*) pour les **booléens** c'est-à-dire *True* (Vrai) ou *False* (Faux).

Exemple Un site sportif doit écrire une base de données sur les joueuses de curling des clubs français. Pour une joueuse donnée, il y aura 4 variables : **`nom`** pour son nom, **`age`** pour son âge, **`points`** pour sa moyenne de points marqués et **`nationale`** qui est vraie ou fausse selon que la joueuse est ou non en équipe de France.

- Les valeurs prises par **`nom`** sont des mots : **`nom`** est de type **`str`**.
- Les valeurs prises par **`age`** sont des nombres entiers : **`age`** est de type **`int`**.
- Les valeurs prises par **`points`** sont des nombres réels *a priori* non entiers : **`points`** est de type **`float`**.
- Les valeurs prises par **`nationale`** sont Vrai ou Faux : **`nationale`** est de type **`bool`**.

1.1.1 Affectations

Définition **Affectation d'une valeur à une variable**

Lorsque l'**on affecte** une valeur à une variable avec le symbole = cela signifie que, jusqu'à une prochaine affectation, la variable peut être remplacée par cette valeur dans le programme.

Exemple **`x=5`** signifie que l'on affecte la valeur 5 à la variable **`x`**.

Propriété **Affectation d'une valeur à une variable par l'utilisateur**

L'instruction `input` permet à l'utilisateur du programme d'affecter lui-même une valeur à une variable.

Exemple `a=int(input("Nombre?"))` permet à l'utilisateur du programme d'affecter le nombre entier qu'il souhaite à la variable **a**. Le `int` devant `input` signifie que le nombre reçu est entier mais on aurait pu mettre `float` pour un flottant, par exemple.

Propriété **Affectation et type**

Lors d'une affectation, la variable prend le type associé à sa valeur.

↳ Méthode 2 p. 23

1.1.2 Opérations

Propriété **Opérations sur les types numériques**

- **Dans les affectations, on peut utiliser les symboles d'opération usuels +, -, * et /.**
- **Pour écrire une puissance, on utilise `**` (par exemple, `2**3` veut dire 2^3).**
- **Quand un flottant est utilisé dans un calcul, le résultat est également un flottant.**

Propriété **Opérations sur les chaînes de caractères**

Soit `a` et `b` deux variables de type `str` et `n` un entier.
- **`a+b` est la chaîne de caractères formée par la valeur de `a` suivie de la valeur de `b`.**
- **`n*a` est la chaîne de caractères formée par la valeur de `a` répétée `n` fois.**

Exemple `"bon"+"jour"` donne `"bonjour"` et `3*"bip"` donne `"bipbipbip"`.

1.2 Instructions conditionnelles

Propriété 1 (Condition, résultat d'un test)**.** *Le résultat d'un test d'égalité, de non-égalité ou d'inégalité est appelé* *condition.*
Cette condition est soit vraie (True) soit fausse (False) c'est-à-dire que c'est un booléen. On peut complexifier les conditions avec or (ou) et and (et).

Exemple 2.
- $x < 6$ vaut True si $x = 4$ car $4 < 6$ et $x < 6$ vaut False si $x = 15$ car $15 \geq 6$.
- La condition $x > 5$ or $x <= 2$ est vraie si x est supérieur à 5 ou inférieur ou égal à 2.
- La condition $x >= -1$ and $x < 8$ est vraie si x est supérieur ou égal à -1 et inférieur à 8.

Remarque 1. *Le tableau ci-dessous donne une correspondance entre les symboles mathématiques et le langage python :*

Mathématique	$=$	$\neq$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$
Python	==	!=	>	<	>=	<=

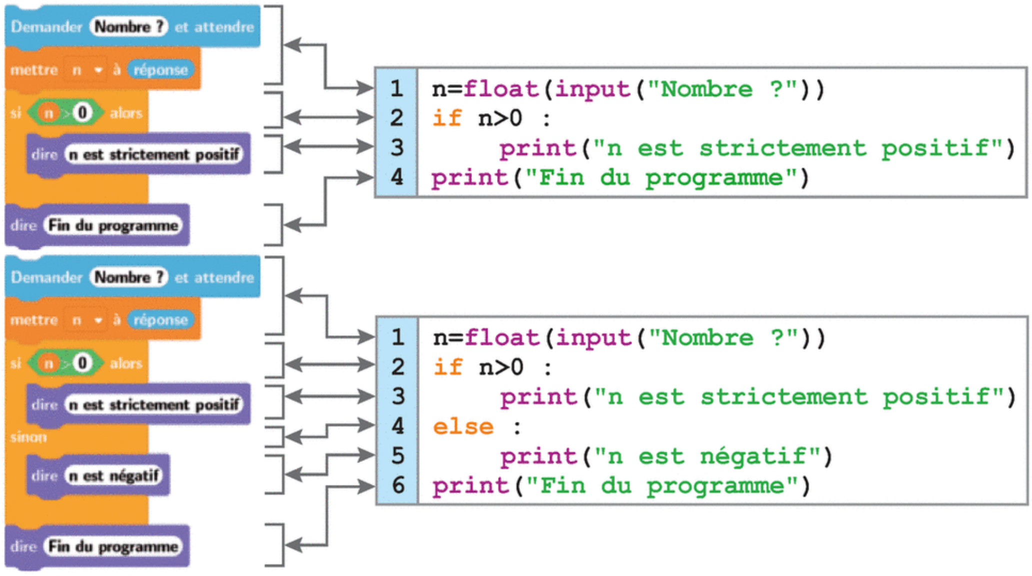
Définition 2. *En python, il est possible de conditionner l'exécution d'une ou plusieurs instructions uniquement si (if) une certaine condition est vérifiée. On crée alors un bloc d'instruction indenté (c'est-à-dire décalé vers la droite), précédé d'une ligne au format if condition :*
Pour traiter le cas où cette condition n'est pas vérifiée, on peut :

- *soit exécuter un autre bloc d'instruction dans un bloc indenté, précédé d'une ligne else :*
- *soit ne rien faire.*

Dans les deux cas on exécute la suite du programme.

Exemple

Les programmes ci-dessous écrits en **Scratch** et en **Python** fonctionnent de la même manière.



Remarque 2. *Pour ajouter une condition supplémentaire, on utilisera elif.*

1.3 Fonctions (au sens algorithmique)

1.3.1 Définition

Lorsque l'on est amené à écrire un programme long, on est amené à répéter maintes fois le même algorithme ; plutôt que faire des copier-coller qui rendraient très vite le programme illisible, nous avons à notre disposition la notion de fonction :

Définition 3 (Fonction)**.**
Une fonction est un bloc d'instruction qui ne sera exécuté que s'il est appelé. Une fonction possède généralement des paramètres (mais pas obligatoirement) et retourne (ou renvoie) une valeur de retour (mais pas systématiquement) généralement stockée dans une variable.

- **Syntaxe en** `Python` **:**

```
def nom_de_la_fonction(argument1, argument2, ...):
        instructions
        return(resultat1, resultat2, ...)
```

  L'instruction `return` interrompt le programme dès qu'elle s'est exécutée et permet de renvoyer une ou plusieurs valeurs de types entier, décimal (dit flottant) ou chaîne de caractères.

1.3.2 Une fonction avec paramètres

Exemple 3. Considérons la fonction ci-contre :

```
def vitesse(distance,temps) :
    v=distance/temps
    return v
```

Cette fonction s'appelle vitesse ; elle a comme paramètre distance et temps ; elle retourne la valeur de la variable v qui est égale à $\frac{distance}{temps}$.
Plus simplement, c'est une fonction qui nous donne la vitesse en fonction de la distance et du temps.

Remarque 3. *Les variables distance et temps ne sont définies qu'au sein de la fonction vitesse, elles ne sont donc pas utilisables hors de cette fonction.*

Pour appeler une fonction, il suffira d'écrire vitesse(100,4), elle retournera la valeur $v = \frac{100}{4} = 25$: si on parcourt 100 km en 4 heures, on est allé à 25 km/h.

1.3.3 Une fonction sans paramètre

Une fonction peut ne pas avoir de paramètre, dans ce cas, on l'appelle en écrivant son nom suivi de parenthèses vides. Intéressons-nous à cette fonction :

```python
def message() :
    print("affichage d'un message")
```

Ainsi, il suffira d'écrire message() pour appeler cette fonction, elle n'a pas non plus de valeur de retour, elle réalise juste un affichage.

Définition 4. *La commande input qui permet d'afficher du texte (entre guillemets), la valeur d'une valeur (sans guillemet, ou un mélange des deux (en séparant texte et variables par des virgules).*

Chapitre 2

Ensembles de nombres

Introduction

Pendant l'Antiquité, les Grecs ont longtemps pensé que tous les nombres étaient rationnels c'est-à-dire que tout pouvait s'écrire comme un rapport $\frac{a}{b}$ entre deux nombres.
Pourtant, si l'on trace un carré de côté 1 mètre, puis que l'on trace une diagonale, en appliquant le théorème de Pythagore, on détermine que cette diagonale a une longueur de $\sqrt{2}$ mètres. Ce fut peut-être le premier exemple qui ne s'écrit pas comme un rapport de nombres.
Un autre exemple classique est le nombre π qui est le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre $\pi = \frac{P}{2r}$ avec P le périmètre et r le rayon du cercle.

Le but de ce chapitre est donc de caractériser et de formaliser les ensembles déjà rencontrés et de comprendre comment ils interagissent entre eux, de comprendre l'intérêt des différentes écritures possibles d'un même nombre.
Pour cela, nous allons nous appuyer sur les équations du premier degré.

Démarrage

MISE EN ROUTE

À SAVOIR
pour comprendre le chapitre

Inclusion et appartenance à un ensemble

• Un élément x appartient à un ensemble E quand il figure dans cet ensemble.
On note $x \in E$.

• L'ensemble E est inclus dans l'ensemble F lorsque tous les éléments de E sont des éléments de F. On note $E \subset F$.

Puissance d'un nombre entier non nul

Soit a un nombre entier naturel non nul et soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$:

• $a^n \times a^p = a^{n+p}$

• $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

• $(a^n)^p = a^{n \times p}$

• $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

• $a^0 = 1$.

Notation scientifique

On rappelle que la **notation scientifique** d'un nombre décimal s'écrit sous la forme :

$$\pm a \times 10^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leqslant a < 10$$

Les carrés parfaits

n	2	3	4	5	6	7
n^2	4	9	16	25	36	49

n	8	9	10	11	12	13
n^2	64	81	100	121	144	169

L'identité remarquable

Pour tout nombre a et b :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

QUESTIONS-TESTS

1 Vrai ou faux

Soit P l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

a. $3 \in P$ **b.** $2{,}2 \in P$ **c.** $P \subset I$ **d.** $I \subset P$

2 QCM

1. $5^3 \times 5^5$ vaut :

a. 5^{15} **b.** 25^{15} **c.** 25^8 **d.** 5^8

2. $\dfrac{3^7}{3^8}$ vaut :

a. 3 **b.** 1/3 **c.** −3 **d.** −1/3

3. 36^5 vaut :

a. 6^7 **b.** 6^{10}

c. il n'y a pas d'autre écriture

4. $\dfrac{1}{3^{-2}}$ vaut :

a. −1/9 **b.** −1/6 **c.** 9 **d.** 6

3 QCM

Le double de 2^4 est :

❏ 4^4 ❏ 2^5 ❏ 4^8 ❏ 2^8

$3^5 \times 2^5 = \ldots.$

❏ 6^5 ❏ 6^{10} ❏ 6^{25} ❏ 3^{10}

$2^2 + 2^2 = \ldots.$

❏ 4^2 ❏ 4^4 ❏ 2^3 ❏ 3×2^2

4 Écrire en notation scientifique (en conservant les mêmes unités)

a. Masse de la Terre : $59\ 736 \times 10^{18}$ kg

b. Surface de la Terre : 510 067 420 km^2

c. Masse du Soleil : $19\ 891 \times 10^{26}$ kg

d. Surface du Soleil :
6 087 700 000 000 km^2

5 Écrire en notation scientifique (en conservant les mêmes unités)

a. Vitesse de la lumière :
299 792 458 m·s^{-1}

b. Charge de l'électron : -1602×10^{-22} C

c. Constante de Planck : $6\ 626 \times 10^{-37}$ J·s

2.1 Ensembles de nombres

2.1.1 Entiers naturels

Ce sont les premiers nombres que l'on rencontre dans sa vie en apprenant à compter.

Définition 5 (Entiers naturels)**.** *Les nombres entiers positifs forment l'ensemble des entiers naturels, on note cet ensemble* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Exemple 4.
Le nombre 5 est un entier naturel, donc on peut écrire $5 \in \mathbb{N}$ (se lit « 5 appartient à $\mathbb{N}$ »).
Par contre -8 n'est pas positif, donc on notera $-8 \notin \mathbb{N}$ (se lit « -8 n'appartient à $\mathbb{N}$ »).

2.1.2 Entiers relatifs

Il a fallu malgré tout construire d'autres ensembles de nombres, par exemple pour résoudre l'équation $x + 3 = 0, (\iff x = -3)$, l'ensemble $\mathbb{N}$ est insuffisant car le nombre -3 n'est pas un entier naturel ($-3 \notin \mathbb{N}$).

Définition 6 (Entiers relatifs)**.**
Les nombres entiers (positif, négatifs et nul) forment l'ensemble des *entiers relatifs*, *qu'on notera* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Remarque 4. *Le* $\mathbb{Z}$ *proviendrait de l'allemand « Zahl » signifiant nombre.*

Un entier naturel est un entier relatif donc $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ donc, on a :

Remarque 5. *On a l'inclusion* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2.1.3 Nombres rationnels

Défintions

Historiquement, les nombres rationnels sont apparus lorsqu'il a fallu partager en parts égales. Dans un exemple plus proche de nous, si l'on doit partager un gâteau en 5 parts égales, chacun recevra $\frac{1}{5}$ du gâteau.
Maintenant, intéressons-nous à l'équation : $3x - 1 = 0$, l'unique solution est $\frac{1}{3}$.

Définition 7 (Nombres rationnels)**.**
Un nombre est rationnel s'il s'écrit comme le rapport entre un entier relatif $a \in \mathbb{Z}$ *et un entier naturel non nul* $b \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$

Remarque 6.
On rappelle que pour tout entier relatif $x \in \mathbb{Z}$*, on a* $x = \dfrac{x}{1} \in \mathbb{Q}$.

Ainsi, tous les nombres entiers (naturels comme relatifs) sont des nombres rationnels, donc on a l'inclusion :

Remarque 7. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.1.4 Nombres décimaux

Exercice 1.
1. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance de 10.
$F = 10^3 \times 10^{-4}$, $G = (10^{-1})^{-3}$, $H = \dfrac{10^{-2}}{10^2}$, $I = 10^2 \times 10^{-3} \times 10$, $J = 10000$, $K = \frac{1}{10^4}$.

2. Donner l'écriture décimale des nombres suivants.
$L = 125 \times 10^2$, $M = 21.56 \times 10^{-1}$ $N = \dfrac{698}{10^3}$

Maintenant si on va s'intéresser à un sous-ensemble particulier de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Définition 8 (Nombres décimaux)**.**
Un nombre est dit décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ *où* a *est un entier relatif et* n *un entier naturel, i.e* $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{D}$ *l'ensemble des nombres décimaux.*

Du fait que tout entier (naturel comme relatif) est nombre décimal, on a :

Remarque 8. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Deux méthodes pour montrer qu'un nombre est décimal

Par la définition
En utilisant uniquement la définition :

$$\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}.$$

Donc $\dfrac{3}{4} \in \mathbb{D}$

En utilisant une propriété

Propriété 2. *Un nombre est un nombre décimal, si et seulement si, sous sa forme de fraction irréductible, le dénominateur peut s'écrire comme un produit de puissances de 2,5 et 10.*

Démonstration.
Utilisons la décomposition en facteurs premiers de $10 = 5 \times 2$. Ainsi, pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{10^n} &= (\frac{1}{10})^n \\ &= (\frac{1}{2 \times 5})^n \\ &= (\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{5})^n\end{aligned}$$

Ainsi, si x est un nombre décimal, il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $x = \frac{a}{10^n}$ avec la fraction de droite qui est irréductible.
Grâce au calcul précédent, on a l'égalité, $x = a \times (\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{5})^n$.

Maintenant, si on a un nombre de la forme $a \times (\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{5})^n \times (\frac{1}{10})^n$.
Alors, il est égal à $a \times (\frac{1}{10})^{n+1}$ donc c'est un nombre décimal par définition. □

Application 1.
<u>But :</u> Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

<u>Par la définition</u>
$\frac{1}{3}$ est une fraction irréductible et son dénominateur étant un nombre premier, il ne peut pas être un produit de puissance de 2,5 ou 10 donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
<u>Par l'absurde</u>
Exercice

Exemple 5.
$\frac{37}{20} = \frac{37}{2^2 \times 5}$ et $\frac{37}{20}$ est irréductible donc $\frac{37}{20} \in \mathbb{D}$.

2.1.5 Nombres réels

Exercice 2. *Sachant que le triangle ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4cm$ et $AC = 8cm$, calculer la valeur exacte de BC.*

Prenons un nombre réel positif $a \in \mathbb{R}$ et intéressons-nous à l'équation $x^2 - a = 0$, on sait qu'elle admet deux solutions $\pm\sqrt{a}$.
Par exemple, lors de l'introduction, nous avons établi, à l'aide du théorème de Pythagore, l'existence <u>réelle</u> de $\sqrt{2}$. Pourtant, $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas comme une fraction (on l'établira plus tard !) ainsi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 9 (Nombre irrationnel)**.**
Un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Exemple 6.
$\sqrt{2}, \pi$ ou plus généralement si p n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

Droite réelle

Définition 10 (Droite graduée)**.**
Une droite graduée est une droite sur laquelle on fixe une origine O et une unité et un sens (de parcours).

Proposition 1 (Admise)**.**
Tout point d'une droite gradué peut être repéré par son abscisse.

Ensemble des réels

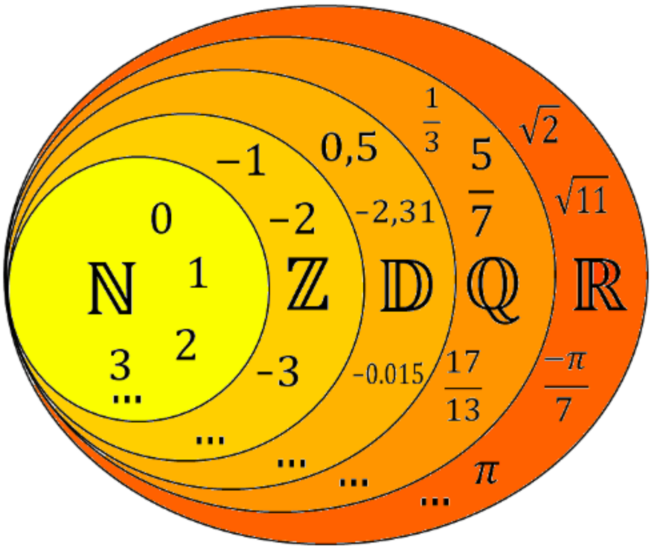
Définition 11 (Nombres réels)**.**
Un nombre que l'on peut représenter sur une droite gradué est un nombre réels, l'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$.

Application 2. Représentation de $\mathbb{R}$ par une droite.

À l'aide d'une droite réelle, grâce à l'unité, on peut représenter (facilement) tous les entiers relatifs, les rationnels peuvent aussi être associés à une abscisse à l'aide du théorème de Thalès. Ainsi, on a la suite d'inclusion :

Remarque 9.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Un schéma pour illustrer notre situation finale :



Remarque 10. *Une fois que l'on est muni de l'ensemble $\mathbb{R}$, on pourrait naïvement penser que toutes nos équations admettent une solution. Malheureusement, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle.*

2.1.6 Exercices

Exercice 3 (Vrai/Faux)**.** *Dans le cas où la réponse est fausse, donnez un contre-exemple.*

- *Un nombre rationnel est toujours un nombre réel.*
- *Un nombre rationnel est toujours un nombre décimal.*
- *L'inverse d'un nombre décimal est toujours un nombre décimal.*
- *Un nombre entier est toujours un nombre décimal.*
- *Un nombre entier est toujours un nombre rationnel.*

Exercice 4.
Pour chacun des nombres A à D, dire si c'est un entier naturel, relatif ou si ce n'est pas un entier :

$A = -\sqrt{121}$, $B = (4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$, $C = \dfrac{268}{400}$ *et* $D = \dfrac{\frac{5}{3}}{3}$

Exercice 5 (Démonstration de $\frac{1}{3}$)**.** *On souhaite démontrer par un raisonnement par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.*

1. *Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal.*
   Montrer qu'il existe alors deux entiers a et n tels que $10^n = 3a$.

2. *Expliquer pourquoi 10^n ne peut pas être un multiple de 3.*

3. *Aboutir à une contradiction puis conclure.*

Correction 1.
Supposons que $\dfrac{1}{3}$ soit un nombre décimal, alors, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$. En utilisant $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$, on a l'égalité $3a = 10^n$.
On aboutit à une absurdité, car le membre de gauche est un multiple de 3 et celui de gauche n'est pas divisible par 3 en vertu du critère de divisibilité par 3.
Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse donc $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal i.e $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Exercice 6. *Par la même méthode qu'à l'exercice précédent, montrer que $\dfrac{2}{3}$ n'est pas décimal.*

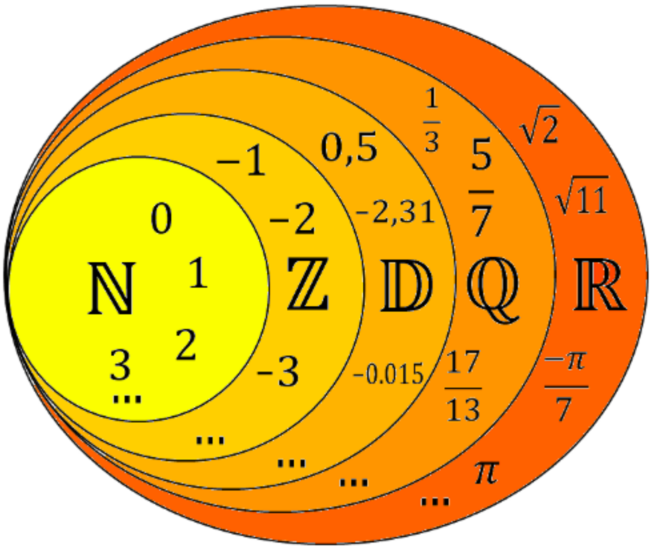
Exercice 7. *Calculer.*

$$A = \frac{7}{3} + \frac{7}{5}, = \frac{-7}{5} \times \frac{15}{-3}, C = 3 \times \frac{11}{15}, D = \frac{-8}{5} - \frac{3}{10}, E = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}}, F = -\frac{\frac{-8}{4}}{3}.$$

Exercice 8. *Esteban a demandé un ordinateur pour son anniversaire. Ses parents sont d'accord pour lui offrir s'il paye $\dfrac{1}{3}$ du prix. Ses trois oncles payent chacun $\dfrac{1}{12}$ de l'ordinateur. Le reste est payé par ses parents. Quelle fraction de l'ordinateur les parents d'Esteban ont-ils payés ?*

Récapitulatif

Le schéma qui illustre notre situation finale :



Ce chapitre a pour but d'être capable (cette liste est non exhaustive) :

1. d'identifier et de connaitre les différents ensembles de nombres (la définition, le symbole).
2. d'identifier l'ensemble minimal auquel appartient à un nombre.
3. de comprendre les symboles $\subset$ et $\in$.

Chapitre 3

Équations produits et quotients

3.1 Équations produits

On rappelle que soustraire par un nombre revient à ajouter son opposé et que diviser par un nombre (non nul) revient à multiplier par son inverse.

Propriété 3.
On commence par formaliser quelques propriétés sur l'égalité :

- *Ajouter la même quantité aux deux membres de l'égalité ne change pas l'égalité.*
- *Multiplier les deux membres d'une égalité par la même quantité non nulle ne change pas l'égalité.*

Ensuite, on formalise une propriété de la multiplication :

Théorème 1. *Un produit de deux nombres est nul si et seulement si, au moins, un des deux facteurs est nul.*

On va maintenant étudier un type particulier des équations du second degré :

Application 3.
Soient a, b, c, d quatre nombres réels, pour tout x réel, on a :

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

En se souvenant que les facteurs $(ax+b)$ et $(cx+d)$ sont deux deux nombres, le théorème précédent nous permet d'affirmer que :
$(ax + b)(cx + d) = 0 \iff ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$
On est donc ramené à résoudre deux équations du premier degré. Ainsi, l'équation produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ admet au maximum deux solutions.

Ainsi, on obtient le théorème :

Théorème 2 (Équations produits)**.**
Soient a, b, c, d quatre nombres réels, l'équation $(ax+b)(cx+d) = 0$ est une équation produit qui admet au plus deux solutions réelles.

Remarque 11. *Attention, l'équation $(x-3)^2 = 0$ est une équation produit, mais elle n'admet qu'une solution $x = 3$.*
Tandis que l'équation $(x^2+1)^2 = 0$ est une équation produit, mais elle n'admet aucune solution réelle.

3.1.1 Exercices

Exercice 9. *Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(2x+1)(5-3x) = 0$.*

Exercice 10. *Le but est de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :*
$(E) : (x+1)(2x+4) - (x-7)(x+1) = 0$.

1. *Factoriser l'équation (E).*
2. *Avec l'expression obtenue, résoudre (E).*

Exercice 11. *Soit $A(x) = x^2 - 25 + (x+5)(4-3x)$.*

1. *Développer puis réduire $A(x)$.*
2. *Factoriser $A(x)$*
   (Indication : Commencer par factoriser $x^2 - 25$ puis factoriser $A(x)$).
3. *En choisissant l'expression appropriée de A, résoudre $A(x) = 0$.*

Exercice 12. *Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel, l'équation :*
$(3x+2)(2x-1) + (4x-2)(3-5x) = 0$.

Exercice 13. *Soit $F(x) = x^2 - 36 + (x+6)(\frac{12}{4} - \frac{2}{3}x)$.*

1. *Développer puis réduire $F(x)$.*
2. *Factoriser $F(x)$*
   (Indication : Commencer par factoriser $x^2 - 36$).
3. *En choisissant l'expression appropriée de F, résoudre $F(x) = 0$.*

3.2 Équations quotients

Exercice 14. *L'inverse de la différence entre un nombre et l'unité est égal au triple du nombre. Quel est ce nombre ?*
Notons x le nombre recherché, formaliser cela en termes d'équation.

Maintenant, on souhaite traiter le cas des équations où l'inconnue x apparait au dénominateur ou au numérateur. Par exemple, prenons l'équation $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0$ et cherchons à la résoudre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Notre premier problème est qu'il est impossible de diviser par 0, donc le dénominateur ne peut être nul $cx + d \neq 0$. Notons x_1 cette valeur interdite. Ainsi, l'ensemble possible des solutions est donc l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ privé de x_1.
Pour le numérateur, on résout l'équation $ax+b = 0$ et la solution recherchée est la solution de cette équation. On aboutit donc au théorème :

Théorème 3. *Soient a, b, c, d quatre nombres réels, pour tout x réel, on a :*
$\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0$
$\iff ax + b = 0$ *et* $cx + d \neq 0$
Et on est ramené à résoudre deux équations du premier degré.

3.2.1 Exercices

Exercice 15.

1. *Résoudre l'équation* $\dfrac{x-2}{-x-1} = 0$.
2. *Résoudre l'équation* $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x+4}$.

Chapitre 4

Fonctions affines

4.1 Taux de Variation

4.1.1 Introduction

On définit rigoureusement la notion fonction :

Définition 12 (Ensemble de définition)**.**
Soit D un ensemble de nombres réels, définir une fonction f sur D revient à associer à chaque réel x de D un unique réel appelé image de x par f, notée $f(x)$.
On dira que D est l'ensemble de définition de la fonction f (ou encore l'ensemble des antécédents).

On rappelle la définition d'une fonction d'une fonction affine :

Définition 13 (Fonction affine)**.**
On dit qu'une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = ax + b$.
Le nombre a est le coefficient directeur de f tandis que b est l'ordonnée à l'origine.

4.1.2 Mise en jambe

Exercice 16.
Dire si les fonctions suivantes sont affines, si oui, donner le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b :

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x(x+4)}$
3. $f(x) = (x+1)(x^2 - 9)$

4. $f(x) = \dfrac{3x - \pi}{12}$

Exercice 17.
On considère la fonction affine f définie par $f(x) = -5x + 3$.

1. *Calculer l'image de 5 par f.*

2. *Calculer l'antécédent de 4 par f.*

3. *Résoudre $f(x) = 0$.*

4.1.3 Taux d'accroissement

Définition 14. *Prenons une fonction f (pas obligatoirement affine), pour deux nombres distincts x et y, on appelle taux d'accroissement de f, le nombre $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.*

Dans le cas des fonction affines, c'est le taux d'accroissement qui nous permet de calculer le coefficient directeur a.

Propriété 4. *Si $f(x) = ax + b$ est une fonction affine alors pour tous nombres réels x et y distincts, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est constant et égal à a.*
Réciproquement, si f est une fonction et que son taux de variation est constant à un nombre réel a, alors c'est une fonction affine.

4.1.4 Méthode pour déterminer le coefficient directeur

Prenons une fonction f affine tel que pour tout nombre x, on ait $f(x) = ax + b$. Pour deux nombres distincts x et y alors, on a :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= ay + b - (ax + b) \\ &= ay + b - ax - b \\ &= ay - ax \\ &= a(y - x). \end{aligned}$$

Comme $y \neq x$ on peut diviser par $(y - x)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= \frac{a(y - x)}{(y - x)} \\ &= a \times \frac{y - x}{y - x} \\ &= a \end{aligned}$$

Exemple 7.
Considérons une fonction f affine tel que $f(1) = 6$ et $f(4) = 12$.
Déterminons l'expression algébrique de f.

On sait que f est une fonction affine donc f est de la forme $f(x) = ax + b$.
Comme $1 \neq 4$ on peut calculer :

$$\begin{aligned} a = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} &= \frac{12 - 6}{3} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer $a = 2$ donc $f(x) = 2x + b$.
Or, on sait $f(1) = 2 \times 1 + b = 6 \iff b = 6 - 2 = 4$ donc $f(x) = 2x + 4$.

4.1.5 Exercice à faire pour la séance suivante

Exercice 18. *On considère une fonction f tel que $f(1) = 3$ et $f(4) = 2$.*

1. *Calculer le taux de variation de f. La fonction f est-elle affine ?*
2. *Donner l'expression algébrique de f.*
3. *Même question pour une fonction g telle que $g(4) = 6$ et $g(-4) = 2$.*

4.2 Variation d'une fonction affine

4.2.1 Variations d'une fonction affine

Propriété 5. *Si on prend une fonction $f(x) = ax + b$, les variations de f dépendent du signe du coefficient de a.*

- *Si $a > 0$ alors f est strictement croissante ; on parle de croissance linéaire.*
- *Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante ; on parle alors de décroissance linéaire.*

Démonstration. Prenons une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$. Prenons deux nombres x et y tel que $y > x$.

- Si $a > 0$, alors $f(y) - f(x) = a(y - x)$. Comme $a > 0$ et $y - x > 0$ donc on a le produit de deux nombres positifs alors f est strictement croissante.
- Si $a < 0$, alors $f(y) - f(x) = a(y - x)$. Comme $a < 0$ et $y - x < 0$ donc on a le produit d'un nombre négatif par un nombre positif alors f est strictement décroissante.

(Croquis de la situation). □

Une conséquence directe :

Exemple 8.
Pour $f(x) = 2x + 4$, comme $a = 2$ est positif, on sait que f est une fonction affine croissante, donc si $y \geq x$ alors $f(y) \geq f(x)$.

4.2.2 Tableau de variation

1. On dresse le tableau de variation en inscrivant la solution trouvée sur la première ligne (correspondant à x) et en indiquant le 0 sur la seconde ligne (correspondant à $ax + b$).
2. Le tableau comporte deux lignes, une ligne pour les antécédents (les x) et une ligne pour les variations de f.
   Le tableau comporte deux colonnes, la colonne de gauche comporte simplement "x" dans la première ligne et "variations de f" dans la deuxième.

Le tableau est pour l'instant vide, et il ressemble à ça pour le moment :

x	$-\infty$	$+\infty$
variation de f		

La croissance (resp. décroissance) est représentée par une flèche ascendante (resp. descendante). On rappelle que la variation d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ ne dépend que du signe de a.
Ainsi, si $a > 0$ on obtient :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Sinon, $a < 0$ et on a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

4.2.3 Travail à faire pour la séance d'après

Exercice 19. *Soit une fonction f telle que $f(-1) = 3$ et $f(3) = 4$.*

1. *Calculer le taux de variation de la fonction f.*
2. *Donner l'expression algébrique de f.*
3. *Dresser son tableau de variation.*

4.3 Représentation et tableau de signes d'une fonction affine

Démarrage

Exercice 20. *On désire représenter une fonction affine f dans un repère orthonormé.*

1. *Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = -1$ et $f(1) = 5$.*
2. *Placer les points $(-2; -1)$ et $(1, 5)$ dans un repère orthonormé et tracer la droite (d) issue de ces deux points.*
3. *Calculer $f(0)$, le point $(0; f(0))$ appartient-il à la droite (d) ? Tester pour d'autres nombres.*

On dit que la droite (d) est la représentation graphique de f.

Maintenant, considérons $g(x) = -2x + 1$ une autre fonction affine. On souhaite caractériser le point d'intersection entre les droites représentant respectivement les fonctions f et g.

a. *Tout d'abord, calculer $g(0)$ et $g(1)$ puis placer dans le repère les points de coordonnées $(0; g(0))$ et $(1; g(1))$. Enfin, tracer la droite issue de ces deux points. On appellera (e) cette nouvelle droite.*

b. *Les droites (d) et (e) se rencontrent-elles ? Donner les coordonnées (même approximatives) de ce point d'intersection.*

c. *Résoudre $f(x) = g(x)$ puis comparer les coordonnés obtenues avec la question précédente.*

4.3.1 Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété 6. *La représentation graphique d'une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est une droite $\mathcal{C}_f$ constituée de tous les points de coordonnées $(x, f(x)) = (x, ax + b)$.*

Remarque 12. *Cette droite passe par le point de coordonnée $(0, b)$ justifiant le nom d'ordonnée à l'origine.*

4.3.2 Méthode pour représenter une fonction affine

Pour une fonction affine $f(x) = ax + b$.

1. Placer le point de coordonnée $(0, b)$.
2. Choisir un x et calculer $f(x)$. En général, on choisit $x = 1$ ou $x = 2$.

3. Placer le point de coordonnée $(x, f(x))$.
4. Relier les deux points.

Remarque 13. *Il suffit en fait d'avoir deux points distincts $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ pour tracer la droite représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction affine f.*

Exemple 9.
Représenter $f(x) = 2x + 4$.

4.3.3 Tableau de signes d'une fonction affine

Exercice 21. *Considérons $f(x) = 2x + 4$.*

1. *Représenter f dans un repère orthonormé.*
2. *Donner les coordonnées du point d'intersection entre la représentation graphique de la fonction f et l'axe des abscisses.*
3. *Résoudre $f(x) = 0$.*
4. *Déterminer pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est un nombre positif.*

Prenons une fonction affine $f(x) = ax + b$. On désire savoir quand la droite représentative de f rencontre l'axe des abscisses. Pour cela, il nous faut résoudre :

$$f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{-a}.$$

.

Méthode pour construire un tableau de signe d'une fonction affine

1. Connaitre l'expression algébrique de f.
2. Résoudre $f(x) = 0$.
3. On dresse le tableau de signes en inscrivant la solution trouvée sur la première ligne (correspondant à x) et en indiquant le 0 sur la seconde ligne (correspondant à $ax + b$).
4. On place les signes dans l'ordre suivant :
   (a) Si le coefficient directeur a est positif : $-$, 0, $+$.
   (b) Si le coefficient directeur a est négatif : $+$, 0, $-$.

Ainsi, on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

4.3.4 Exercice à faire pour la séance suivante

Exercice 22. *On considère la fonction g telle que $f(-2) = -1$ et $f(1) = -\frac{5}{2}$.*

1. *Calculer le taux de variation de la fonction f.*
2. *Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.*
3. *Dresser le tableau de variation de la fonction f.*
4. *Dresser le tableau de signe de la fonction f.*
5. *Représenter la fonction f dans un repère orthonormée.*

Exercice 23. *Soit m un réel quelconque. On appelle f la fonction affine définie par $f(x) = (m-2)x + 2m$. Déterminez la ou les valeurs de m dans chaque cas :*

1. *f est une fonction linéaire.*
2. *f est une fonction constante.*
3. *$f(3) = 1$.*
4. *f est strictement décroissante.*

4.4 Fiche résumé

4.4.1 Définition et représentation graphique d'une fonction affine

Commençons par la définition d'une fonction d'une fonction affine :

Définition 15 (Fonction affine)**.**
On dit qu'une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = ax + b$.
Le nombre a est le coefficient directeur de f tandis que b est l'ordonnée à l'origine.
La représentation graphique d'une fonction affine f dans un repère est une droite constituée de tous les points de coordonnées $(x, f(x)) = (x, ax + b)$.

4.4.2 Taux d'accroissement

Par le calcul

Maintenant, on introduit, un outil fondamental pour étudier différents types de fonctions :

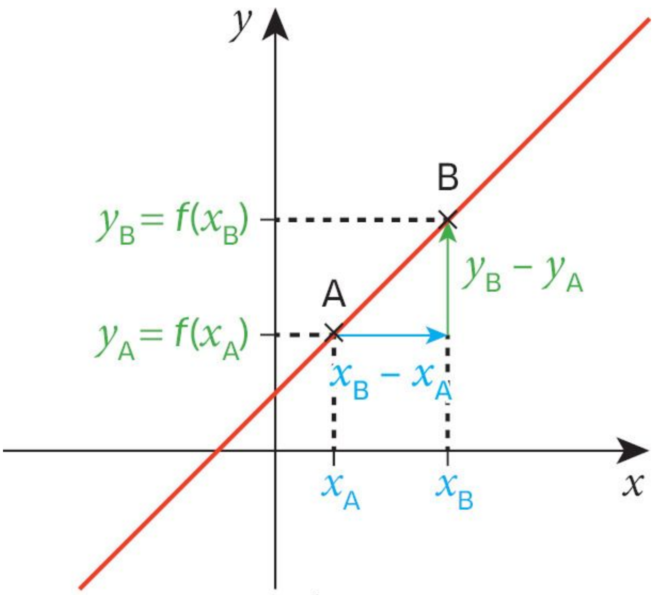
Définition 16 (Taux de variation)**.**
Prenons une fonction f (pas obligatoirement affine), pour deux nombres distincts x_1 et x_2, on appelle <u>*taux d'accroissement*</u> *de f, le nombre* $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Dans le cas des fonctions affines, c'est le taux d'accroissement qui nous permet de calculer le coefficient directeur a. Il est lui toujours égal :

Propriété 7 (Caractérisation d'une fonction affine)**.**
Si $f(x)=ax+b$ est une fonction affine, alors pour tous nombres réels x_1 et y_1 distincts, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est constant et égal au coefficient directeur a.
Réciproquement, si f est une fonction et que son taux de variation est constant à un nombre réel a, alors c'est une fonction affine.

Par une lecture graphique

On peut lire le taux de variation directement sur la droite représentative d'une fonction affine :



4.4.3 Variations d'une fonction affine

Ensuite, on étudie les variations d'une fonction affine :

Propriété 8. *Si on prend une fonction $f(x) = ax + b$, les variations de f dépendent du signe du coefficient de a.*

- *Si $a > 0$ alors f est strictement croissante ; on parle de croissance linéaire.*
- *Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante ; on parle alors de décroissance linéaire.*

On peut résumer la situation avec des tableaux de variations. Ainsi, si $a > 0$ on obtient :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Sinon, $a < 0$ et on a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

4.4.4 Signe d'une fonction affine

Prenons une fonction affine $f(x) = ax + b$. On désire savoir quand la droite représentative de f rencontre l'axe des abscisses. Pour cela, il nous faut résoudre :

$$f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$

.

On peut résumer cela en termes de tableaux de signe :

- Cas $a > 0$. Comme $a > 0$, la fonction affine f est strictement croissante et on a :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

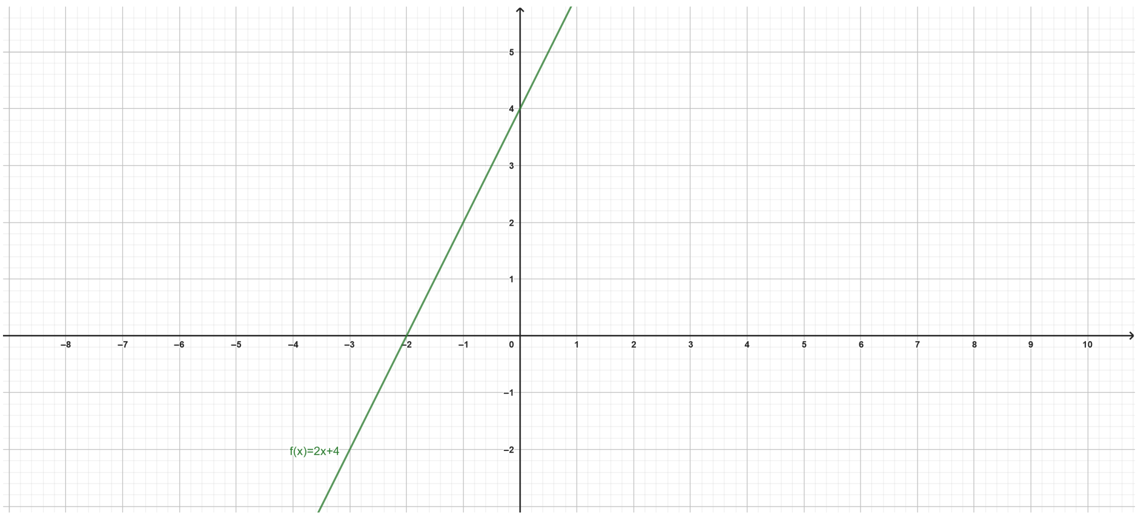
- Cas $a < 0$. Comme $a < 0$, la fonction affine f est strictement décroissante et on a :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$+$	0	$-$	

4.4.5 Deux exemples

Une fonction affine croissante

On s'intéresse à la fonction $f(x) = 2x + 4$, son coefficient directeur est $a = 2$ tandis que son ordonnée à l'origine est $b = 4$. On représente celle-ci dans un graphique :



Comme son coefficient directeur $a > 0$ est strictement positif, on a le tableau de variation suivant :

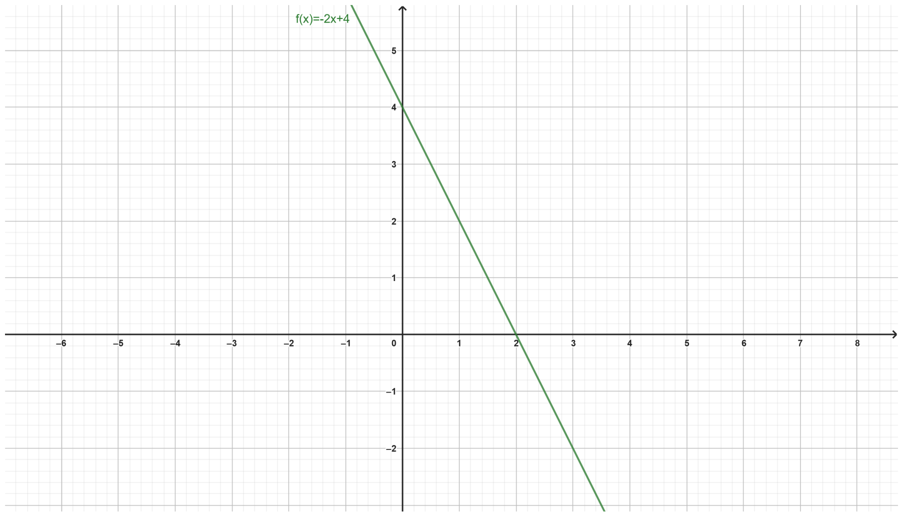
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Pour établir le tableau de signe il faut résoudre $f(x) = 0$ qui équivaut à $2x + 4 = 0$ donc $x = \frac{-4}{2} = -2$. Ainsi, on a le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x) = 2x + 4$		$-$	0	$+$	

Une fonction affine décroissante

On s'intéresse à la fonction $f(x) = 2x + 4$, son coefficient directeur est $a = 2$ tandis que son ordonnée à l'origine est $b = 4$. On représente celle-ci dans un graphique :



Comme son coefficient directeur $a < 0$ est strictement négatif, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Pour établir le tableau de signe il faut résoudre $g(x) = 0$ qui équivaut à $-2x + 4 = 0$ donc $x = \frac{-4}{-2} = 2$. Ainsi, on a le tableau de signe :

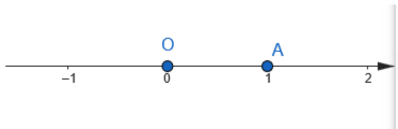
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) = 2x + 4$		$+$	0	$-$	

Chapitre 5

Intervalles et inéquations

5.1 Intervalles

5.1.1 Introduction



Exercice 24.

1. (a) *Tracer une droite graduée comme ci-contre. Prendre 1 cm pour unité.*

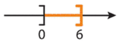
   (b) *Placer les points d'abscisses 5 et à -3 sur cette droite.*

   (c) *On note* $[-3; 5]$ *l'ensemble des nombres réels compris entre -3 inclus et 5 inclus. Il s'agit d'un intervalle et -3 et 4=5 sont ses bornes. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui appartiennent à* $[-3; 5]$ *?*
   $-3; 10; 5.01; -2.99; \frac{3}{2}; \sqrt{2}$

   (d) *Surligner sur la droite les points correspondants aux nombres de* $[-3; 5]$.

2. *On note* $]-3; 5]$ *l'ensemble des nombres réels compris entre -3 exclus et 5 inclus. D'après vous, comment note-t-on l'ensemble des nombres compris entre 4 exclus et 5 inclus ? Et, l'ensemble des nombres compris entre 2 exclu et 6 exclu.*

3. *On note* $[10; +\infty[$ *l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 10 et* $]-\infty; 4[$*, l'ensemble des nombres réels inférieurs à 4. Recopier et compléter le tableau suivant.*

Ensembles des nombres	Schéma	Inégalité C'est l'ensemble des nombres x tels que :	Intervalle
Compris entre 0 exclu et 6 inclus		$0 < x \leqslant 6$	
		$x > -5$	
Inférieurs ou égaux à 3			$]-\infty\,;3]$

4. *Écrire à l'aide d'un intervalle :* $\mathbb{R}$ *(l'ensemble des nombres réels),* $\mathbb{R}^+$ *(l'ensemble des réels positifs),* $\mathbb{R}^+$ *(l'ensemble des réels négatifs).*

Exercice 25. *Dans chaque cas, représenter à l'aide d'une droite graduée les intervalles puis déterminer leur intersection et leur réunion.*

1. $[-4; 5]$ *et* $[0; 10]$

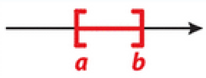
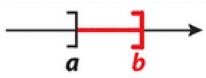
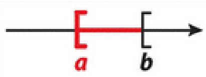
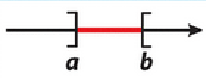
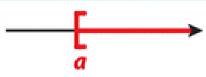
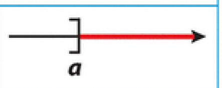
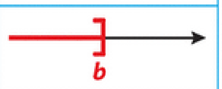
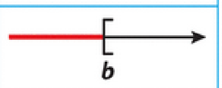
2. $]0; 5]$ *et* $[-2; 3]$

3. $[0; 4]$ *et* $[6; 8[$

5.1.2 Définitions

Définition 17 (Intervalle)**.**
Prenons $a, b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels, $a < b$. L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé intervalle et se note $[a; b]$. Son amplitude est l'écart entre les bornes a et b et est donné par le calcul de $b - a$.

Notations On peut définir d'autres types d'intervalles à l'aide du tableau suivant.

Ensemble de réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty\,;b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in]-\infty\,;b[$	

Remarque 14. *Plusieurs précisions :*

- *Quand le crochet est fermé (orienté vers la borne), la borne est incluse, quand il est ouvert (non orienté vers la borne), la borne est exclue.*
- *Le crochet est toujours ouvert en $+\infty$ et $-\infty$.*
- *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty; +\infty[$*

Exemple 10. L'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 10 s'écrit $]-\infty; 10]$.

Définition 18 (Intersection et réunion de deux intervalles)**.**
Prenons deux intervalles I et J.

1. *L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble noté $I \cap J$ (se lit « I inter J ») . Il contient les nombres appartenant à I et à J.*

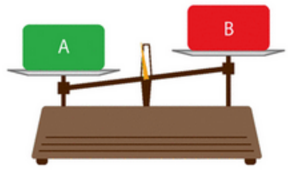
2. *La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble noté $I \cup J$ (se lit « I union J »). Il contient les nombres appartenant à I ou à J.*

Exemple 11.
L'ensemble des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$ ou $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

5.2 Inégalités et inéquations

2 Manipuler des inégalités

1. On considère la balance ci-contre.



a) Laquelle des deux masses est la plus lourde ?

b) On rajoute une masse de 20 g de chaque côté de la balance. Cela changera-t-il le résultat de la comparaison ?

2. Recopier et compléter avec $<$ ou $>$: « Si A $>$ B alors A + 20 **...** B + 20. »

3. Recopier et compléter.

a) Si $x \leqslant y$ alors $x + 30$ **...** $y + 30$.

b) Si $M > M'$ alors $M - 4$ **...** $M' - 4$.

c) Si $a \geqslant b$ alors $a + k$ **...** $b + k$.

d) Si $x > 2$ alors $x + 30$ **....**

4. D'après vous, peut-on dire que « si $a \leqslant b$ alors $k \times a \leqslant k \times b$ » pour n'importe quels nombres réels a, b et k ?

5. Pour aller plus loin Un rectangle a pour longueur 6. Expliquer pourquoi, si sa largeur est inférieure ou égale à 2,1, alors son périmètre sera inférieur ou égal à 16,2.

5.2.1 Propriétés des inéquations

Propriété 9 (Manipulation des inégalités)**.**
Prenons a, b, c et k des nombres réels avec $k \neq 0$.

- *Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité.*

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c.$$

- *Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.*

$$\text{Si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \tfrac{a}{k} < \tfrac{b}{k}.$$

- *Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.*

$$\text{Si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \tfrac{a}{k} > \tfrac{b}{k}.$$

Remarque 15. *Les propriétés restent identiques en utilisant des inégalités larges ($\leq$ ou $\geq$) au lieu des inégalités strictes ($<$ et $>$).*

Exemple 12.
Si $a < 10$ alors $-6a > (-6) \times 10$ (qui est strictement négatif) donc $-6a > -60$.

Propriété 10 (Inégalité et somme)**.**
Soient a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors $a+c < b+d$.

Remarque 16. *Cela ne fonctionne pas pour les autres opérations !*
Par exemple, $a-c < b-d$ *n'est pas vraie en général : on a* $15 < 16$ *et* $8 < 11$ *mais* $15 - 8 > 16 - 11$.

On réalise l'exercice 107.

5.3 Inéquations

3 Résoudre une inéquation

A ▶ Inéquation et solution

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une (ou des) inconnue(s). Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble des valeurs des inconnues qui vérifient l'inégalité.

Al-Khwarizmi (780-850)

On considère l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$ d'inconnue réelle x.
Cette inéquation est une inéquation du 1[er] degré.

1. Expliquer pourquoi 5 est solution de l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$.

2. Proposer trois autres nombres solutions de cette inéquation et proposer un nombre qui n'est pas solution de cette inéquation.

B ▶ Résolution d'une inéquation

Le savant arabe Al-Khwarizmi (env. 780 – env. 850) fut mathématicien, membre de la Maison de la Sagesse de Bagdad. Dans l'un de ses ouvrages, il présente certaines techniques permettant de résoudre les équations :

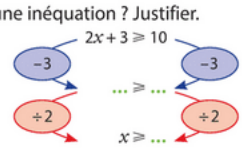
- *al-jabr* (qui a donné le nom *algèbre*) qui consiste, à éliminer les termes négatifs : par exemple, $4x - 5 = 2x + 9$ « devient » $4x - 5 + 5 = 2x + 9 + 5$, c'est-à-dire $4x = 2x + 14$.
- *al-muqabala* qui consiste à enlever une quantité similaire à chaque membre de l'équation : par exemple, $4x = 2x + 14$ « devient » $4x - 2x = 2x + 14 - 2x$, c'est-à-dire $2x = 14$.

Enfin, on connaissait la division grâce à laquelle, par exemple, $2x = 14$ « devient » $x = 7$ (en divisant par 2 les deux membres de l'égalité).

1. D'après vous, les techniques *al-jabr* et *al-muqabala* sont-elles transposables à une inéquation ? Justifier.

2. La technique de la division à la fin est-elle transposable à une inéquation ? Qu'en est-il si on arrive à une telle étape ?

3. a) Recopier et compléter la résolution ci-contre de l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$.
b) Quelles sont les solutions ? Proposer plusieurs écritures.



4. Pour aller plus loin De façon analogue, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
a) $4x - 6 \leqslant 26$ **b)** $5x + 64 \leqslant 7x + 32$

5.3.1 Résolution d'inéquation

Définition 19 (Inéquations)**.**
Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une (ou des) inconnues. Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.
Ainsi, on appelle inéquation du premier degré toute inéquation de la forme $ax + b < cx + d$ où x est l'inconnue et a, b, c, d des réels.

Exemple 13. $3x+4 < 7x+9$ ou $2x+6 \geq x-5$ sont des exemples d'inéquations où x est l'inconnue.

Propriété 11. *Si on applique l'une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente, c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions.*

Exemple 14. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $6x - 8 < 2x + 16$.

$$\begin{aligned} & 6x - 8 < 2x + 16 \\ \iff & 4x - 8 < 16 \\ \iff & 4x < 16 + 8 \\ \iff & 4x < 24 \\ \iff & x < \frac{24}{4} \\ \iff & x < 6. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; 6[$.

Exemple 15. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-3x - 9 \leq 1$.

$$\begin{aligned} & -3x - 9 \leq 1 \\ \iff & -3x \leq 1 + 9 \\ \iff & -3x \leq 10 \\ \iff & x \geq \frac{10}{-3} \\ \iff & x \geq -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]- -\frac{10}{3}; +\infty$.

On fait l'exercice 93.

5.4 Comparaisons et valeur absolue

5.4.1 Comparaison

Définition 20.
Comparer deux quantités A et B revient à savoir si $A > B$, si $A < B$ ou si $A = B$.
Si les quantités A et B dépendent, par exemple, d'une variable x, il s'agira de déterminer :

1. *les valeurs de x pour lesquelles $A > B$.*
2. *les valeurs de x pour lesquelles $A < B$.*
3. *et les valeurs de x pour lesquelles $A = B$.*

Exercice 26. *On considère les expressions $A = 50x + 10$ et $B = 25x - 115$ pour tout nombre réel x.*
Comparer les expressions de A et B suivant les valeurs de x.

Méthode 1. 1. *On pose puis on résout l'inéquation $A > B$.*

2. *On pose puis on résout l'équation $A = B$.*
3. *On peut ne pas faire le $A < B$ car il se déduit des deux autres cas.*

Correction 2. 1. $A > B \iff 50x + 10 > 25x - 115$
$\iff 25x + 10 > -115 \iff 25x > -125 \iff x > -\frac{125}{5}$
$\iff x > -5$
A est donc supérieur à B si $x > -5$.

2. $A = B \iff 50x + 10 = 25x - 115$
$\iff 25x + 10 = -115 \iff 25x = -125 \iff x = -\frac{125}{5}$
$\iff x = -5$
A est donc égal à B si $x = -5$.

3. A est donc inférieur à B si $x < -5$.

Exercices à faire en classe

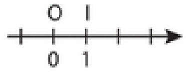
Exercice 27. *Pour tout nombre réel x, comparer $C = 4x+9$ et $E = -x+44$.*

Exercice 28. *Pour tout nombre réel a, comparer les expressions $R = 15-2a$ et $S = a + 14$.*

5.4.2 Valeur absolue d'un nombre réel

Exercice 29.

1. Tracer un axe muni d'une origine O et d'une graduation comme ci-contre, puis placer sur cet axe les points A(5), B(−5), C(7) et D(−3) (1 unité = 1 cm).



2. La distance entre 0 et 5 est la distance (en unité du repère) entre les points d'abscisses 0 et 5. On appelle **valeur absolue** de 5 cette distance et on la note |5|. Vérifier que |−5| = 5.

3. Vérifier que $|a| = a$ si a est positif et $|a| = -a$ si a est négatif.

4. a) Déterminer |−3|. **b)** Quel autre nombre b vérifie $|b| = 3$?

5. Déterminer : **a)** |13| **b)** |−3,4| **c)** |2 − π|

6. a) D'après vous, que vaut la distance entre 3 et 7 ? entre −2 et 5 ? entre 12 et 5 ? entre −6 et −2 ?
b) D'après vous, comment calculer la distance entre le nombre a et le nombre b si $a > b$? si $a < b$?

Maintenant, considérons une droite graduée munie d'une origine O. Sur cette droite, on considère le point A d'abscisse a et le point B d'abscisse b.

Définition 21 (Valeur absolue et distance)**.**
La valeur absolue de a, notée $|a|$, est le nombre égal à la distance OA.
On lit $|a|$ « valeur absolue de a ».

Propriété 12 (Valeur absolue et signe)**.**
On a deux cas :

1. *Si $a \geq 0$ alors $|a| = a$.*
2. *Si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$.*

Exemple 16. On a $|3| = 3$, $|-2,8| = -(-2,8) = 2,8$.

Propriété 13 (Valeur absolue et racine carré)**.**
Pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Définition 22 (Distance entre deux points)**.**
On appelle distance entre les réels a et b la distance AB.

Propriété 14 (Distance et valeur absolue)**.**
La distance entre a et b est égale à $|a-b|$.

Exercice 30. *Considérons I(1), J(7) et K(-1). En traçant un schéma, on peut remarquer que la distance entre -1 et 7 est 8 et que $|-1-7| = |-8| = 8$.*

Propriété 15 (Intervalle, centre, rayon)**.**
Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[c-r; c+r]$ où c est un réel et r un nombre réel strictement positif, alors on a :

$$x \in [c-r; c+r] \iff |x-c| \leq r.$$

Dans ce cas, le nombre c est appelé centre et le nombre r rayon de l'intervalle.

Exercice 31. *1. Déterminer sous d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que $|x-4| \leq 3$.*

2. On considère l'intervalle $I = [6; 20]$. Écrire une inégalité sous la forme $|x-c| \leq r$ (où l'on doit déterminer les deux nombres réels c et r) vérifiée par tous les nombres x appartenant à I.

Méthode 2. *1. Quand on a $|x-c| \leq r$, on place c sur l'axe et on regarde à »une distance de r de chaque côté c « .*

2. Avec $b > a$, l'amplitude de l'intervalle vaut $b-a$ donc le rayon vaut $\frac{b-a}{2}$.

3. Le centre de l'intervalle peut se calculer en faisant $b-r$ ou $a+r$.

Correction 3. 1. $|x-4| \leq 3$: on cherche donc les valeurs de x telle que la distance entre x et 4 soit inférieur ou égale à 3. (Schéma)
L'intervalle est donc $[1; 7]$.

2. On a schématiquement avec $a = 6$ et $b = 20$. (Schéma)
Le rayon de $[6; 20]$ est $r = \frac{20-6}{2} = 7$.
Le centre de $[6; 20]$ est $c = 20 - 7 = 6 + 7 = 13$.
Ainsi, $x \in [6; 20] \iff x \in [13-7; 13+7] \iff |x-13| \leq 7$

Exercices à faire en classe

Exercice 32. *1. Déterminer les intervalles des nombres x vérifiant :*

(a) $|x-5| \leq 1$.

(b) $|x-10| \leq 20$.

2. Compléter :

(a) $x \in [0; 10] \iff |x - \ldots| \leq \ldots$.

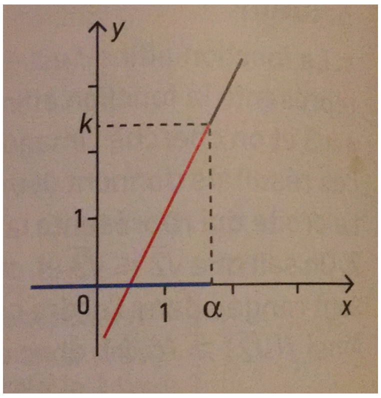
(b) $x \in [25; 37] \iff |x - \ldots| \leq \ldots$.

5.5 Fonction affines et inéquations

On a vu qu'établir le tableau de signe d'une fonction affine f revient à se poser la question suivante : Pour quels x, a-t-on $f(x) > 0$?

5.5.1 Résolution graphique des inéquations du type $ax+b \leq 0$ et $ax+b \geq 0$

Prenons f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Sa courbe représentative est une droite (d). Soit k un nombre réel ($k \in \mathbb{R}$).



Méthode 3. *Pour résoudre graphiquement l'inéquation $ax + b \leq k$:*

- *On place k sur l'axe des ordonnées ;*
- *On cherche les points de la droite (d) d'ordonnée inférieure ou égale à k et on lit leurs abscisses (en bleu sur le graphique).*

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit sur la portion bleue de l'axe des abscisses : $\mathcal{S} =]-\infty; \alpha]$.

Remarque 17. *Deux remarques :*

1. *Pour résoudre graphiquement l'inéquation $ax + b \geq k$, on utilise la partie en noir de la droite.*
2. *Il y a une unique solution graphique α pour l'équation $ax + b = \alpha$. On note $\mathcal{S} = \{\alpha\}$*

5.5.2 Résolution algébrique des inéquations du type $ax+b \leq 0$ et $ax+b \geq 0$

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax+b$, notons x_0 la solution de l'équation $f(x) = 0$ (on a donc $f(x_0) = 0$).

Grâce aux variations de f

Propriété 16.
Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$ c'est-à-dire $ax + b \leq 0$:

- *Si $a < 0$ alors f est décroissante : les images de deux nombres sont rangées dans l'ordre contraire de ces nombres :*

$$f(x) \leq 0 \iff f(x) \leq f(x_0) \iff x \geq x_0 \iff x \in [x_0; +\infty[$$

  Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [x_0; +\infty[$.

- *Si $a > 0$ alors f est croissante : les images de deux nombres sont rangées dans le même ordre que ces nombres :*

$$f(x) \leq 0 \iff f(x) \leq f(x_0) \iff x \leq x_0 \iff x \in]-\infty; x_0[$$

  Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; x_0[$.

On procède de même pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Grâce au calcul algébrique

Propriété 17.
Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$ c'est-à-dire $ax \leq -b$:

- *Si $a < 0$, on divise chaque membre par m : le sens de l'inégalité change, car $m < 0$, et on trouve $x \geq \frac{-b}{a}$.*
  Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [\frac{-b}{a}; +\infty[$.

- *Si $a > 0$, on divise chaque membre par m : le sens de l'inégalité ne change pas, car $m > 0$, et on trouve $x \leq \frac{-b}{a}$.*
  Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-\infty; \frac{-b}{a}[$.

On procède de même pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

5.5.3 Tableau de signe d'une équation produit

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ quatre nombres réels et $a \neq 0$ et $c \neq 0$.
Prenons l'équation produit $(ax + b)(cx + d) = 0$, comme un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un facteur est nul on sait qu'on doit résoudre $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$.
On va chercher à savoir le signe de l'expression $(ax + b)(cx + d) = 0$, pour cela, il faut donc résoudre $ax + b \geq 0$ et $cx + d \geq 0$. Ainsi, on obtient pour le premier facteur :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Pour le second :

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
$cx+d$		signe de $-c$	0	signe de c	

Combinons les deux !

Chapitre 6

Arithmétique

6.1 Division euclidienne et parité

L'arithmétique est la partie des mathématiques qui étudie les entiers relatifs et les relations qui peuvent exister entre ces nombres à l'aide des opérations élémentaires (addition et multiplication).

Introduction

Activité 2 : Division euclidienne

1. On veut partager équitablement un lot de 357 CD entre 12 personnes. Combien de CD aura chaque personne ? Combien de CD restera-t-il après le partage ?

2. Pose la division euclidienne de 631 par 17 puis écris 631 sous la forme $17 \times k + n$ où k et n sont des entiers naturels et $n < 17$.
Dans cette opération, comment s'appellent les nombres 631 ; 17 ; k et n ?

3. On considère l'égalité suivante : $983 = 45 \times 21 + 38$.
Utilise-la pour répondre aux questions suivantes, en justifiant et sans effectuer de division.

- **a.** Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 983 par 45 ? Par 21 ?
- **b.** Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 990 par 45 ?
De 953 par 21 ?

4. Que peux-tu dire du reste de la division euclidienne d'un multiple de 32 par 32 ?
Énonce une règle générale. La réciproque est-elle vraie ?

5. Histoires de restes, toujours...

- **a.** Le reste dans la division euclidienne de m par 7 est 4 (m est un entier naturel).
Quelles valeurs peut prendre m ? Quelle forme a-t-il ?
- **b.** Explique pourquoi tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $13k + p$ où k et p sont des entiers avec p compris entre 0 et 12.

6.1.1 Division euclidienne

Propriété 18 (Existence de la division euclidienne)**.**
Soit a un entier relatif, soit b un entier naturel non nul alors il existe un unique couple d'entiers relatifs (k, r) tels que $a = bk + r$ avec $0 \leq r < b$.
On appelle quotient le nombre k et reste le nombre r.

On appelle division euclidienne le procéde qui consiste à déterminer le quotient et le reste.

Exemple 17. Réaliser la division euclidienne de 185 par 7.
Ici $a = 187$ et $b = 7$, grâce à la propriété 1, on sait qu'il existe un entier relatif k et un entier naturel $0 \leq r < b$. Calculons k et r.
En posant la division euclidienne (la poser au tableau), on trouve :
$187 = 7 \times 26 + 3$ donc on a le quotient $k = 26$ et le reste $r = 3$.

6.1.2 Multiples et diviseurs

Définition 23 (Multiple, diviseur)**.**
Prenons deux entiers relatifs $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. *On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$.*
   Autrement dit, lorsque l'on réalise la division euclidienne de a par b le reste est nul.

2. *Si, b est non nul et a est un multiple de b alors b est un diviseur de a. On dira aussi que a est divisible par b.*

Remarque 18. *Plusieurs remarques :*

1. *Lors de l'utilisation de cette définition, il faudra toujours vérifier que le nombre k est un entier relatif.*

2. *0 est multiple de tous les entiers relatifs : pour tout entier relatif $a \in \mathbb{Z}$, $0 = 0 \times a$.*

3. *0 n'est diviseur d'aucun entier relatif*

4. *Tout entier relatif est un diviseur de 0.*

5. *1 est diviseur de tout entier relatif a car $a = a \times 1$ et $1 \neq 0$.*

6. *De même pour -1 : pour tout entier relatif a, $a = (-a) \times (-1)$.*

Méthode 4 (Reconnaître les diviseurs)**.**
Prenons un entier relatif $a \in \mathbb{Z}$. Pour connaitre ses diviseurs, on a plusieurs techniques :

1. *On peut le décomposer en un produit de facteurs simples. Tout nombre apparaissant dans l'un des produits étant un diviseur de ce nombre. On peut utiliser les critères de divisibilités pour deviner certains facteurs.*

2. *Dans le cas d'une expression littérale, le principal outil est de tenter de factoriser celle-ci sous la forme $b \times k$.*

Exercice 33. 1. *Montrer que* 5 *et* -3 *sont des diviseurs de* -15.

2. *Montrer que pour tout entier naturel* n, *l'entier naturel* $n+1$ *est un diviseur de l'entier* $n^2 - 1$.

Correction 4. 1. On décompose $-15 = -3 \times 5$ or -3 et 5 sont des entiers relatifs donc 5 et -3 sont des diviseurs de -15.

2. On a $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, ces deux facteurs sont des entiers relatifs. Comme $n \geq 0$, $n+1 > 0$ (on ne peut pas diviser par 0) donc pour tout entier naturel n, $n+1$ est non nul.
Ainsi, $n+1$ est un diviseur de $n^2 - 1$.

Ensuite, on formalise les notions de pairs et impairs :

Définition 24 (Parité)**.**
Un entier relatif n est pair s'il est divisible par 2, sinon il est impair. Autrement dit, on a :

- *Si n est pair, alors la division euclidienne de n par 2 a un reste non nul. Ainsi, il existe k un entier relatif tel que $n = 2k$.*

- *Si n est impair, alors la division euclidienne de n par 2 a un reste égal à 1. Ainsi, il existe k un entier relatif tel que $n = 2k + 1$.*

Méthode 5 (Critère de parité)**.** *Un entier relatif n est soit pair, soit impair. Ainsi,*

- *s'il est pair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$.*

- *s'il est impair, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.*

Théorème 4. *Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si l'entier relatif a est impair, alors a^2 est impair.*

Démonstration. On doit montrer que si a est impair, alors a^2 est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif K tel que $n^2 = 2K + 1$
Supposons que l'entier relatif a soit impair.
Par définition, il existe un entier relatif k tel que $a = 2k + 1$.
Ainsi, $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
On peut factoriser les deux premiers termes de cette somme par 2 donc $a^2 = 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Maintenant, posons $K = (2k^2 + 2k)$, c'est un entier relatif, car la somme

de deux entiers relatifs est un entier relatif, donc on a $a^2 = 2K + 1$. Cette égalité revient à dire que la division euclidienne de a^2 par 2 a un reste de 1. Ainsi, a^2 est impair. $\square$

6.2 Multiples et diviseurs d'un entier relatif

6.2.1 Multiple et diviseurs

Méthode 6 (Déterminer les diviseurs d'un nombre entier)**.**
Après avoir appris à reconnaitre si un nombre donné était un diviseur d'un nombre entier, il souhaite maintenant trouver les diviseurs d'un nombre entier donné.
On utilise tous les produits (de deux entiers) égaux au nombre recherché.

Exercice 34. *Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 50.*

Correction 5. Grâce à la méthode ci-dessus, on détermine tous les diviseurs de 50. On a $50 = 1 \times 50 = 2 \times 25 = 5 \times 10$.
Les diviseurs de 50 sont $1; 2; 5; 10; 25; 50$.

6.2.2 Notion de multiples

Théorème 5. *Pour tout entier relatif $a \in \mathbb{Z}$, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.*

Démonstration. Prenons x et y deux entiers relatifs multiples de a.
But : Montrer que $x + y$ est un multiple de a c'est-à-dire que $x + y$ peut s'écrire sous la forme Ka avec K un entier relatif.

Tout d'abord, on sait que x est un multiple de a ; par définition, il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = ka$.
b étant aussi un multiple de a, il existe un deuxième entier k' tel que $y = k'a$.

Maintenant, on a $x + y = ka + k'a = a(k + k')$. Posons $K = k + k'$, la somme de deux entiers relatifs étant un entier relatif, on peut donc affirmer que $K \in \mathbb{Z}$ est un entier relatif.
Ainsi, $x + y = Ka$ où $K = k + k'$ donc $x + y$ est un multiple de a. □

6.2.3 Notion de diviseurs

Théorème 6. *Tout entier naturel non nul admet un nombre fini de diviseurs positifs.*

Démonstration. (Admis)
Prenons $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul. Soit d un diviseur positif de n, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kd$.
Comme l'entier n est nul, on sait que les entiers k et d sont non nuls, donc $k \leq 1$. En multipliant chaque membre de cette inégalité par l'entier strictement positif $d > 0$, on a $dk \leq d$. Or, on sait que $n = dk = kd$ donc $n \leq d$.
Ainsi, on peut affirmer que tous les diviseurs de n sont inférieurs à n donc n admet au plus n diviseurs. □

Théorème 7. *Pour tous a, b, c trois entiers relatifs avec a non nul, on a :*

1. *Si a divise b alors $-a$ divise b.*
2. *Si a divise b et a divise c alors a divise $b+c$ et a divise $b-c$.*

Démonstration. Prenons a, b, c trois entiers relatifs avec a non nul. Comme a est non nul, son opposé $-a$ est non nul.

1. <u>But :</u> Montrer qu'il existe un entier relatif k tel que $b = k(-a)$.
   Comme a divise b, il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.
   Mais $ka = (-k)(-a)$ donc $b = (-k)(-a)$. Or $-k$ est un entier relatif donc $(-a)$ divise b.

2. Si a divise b et a divise c alors, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'a$.
   Alors $b + c = ka + k'a = (k + k')a$ et $k + k'$ est un entier relatif. Alors a divise $b + c$.
   De même, $b - c = ka - k'a = (k - k')a$ et $k - k'$ est un entier relatif. Alors a divise $b - c$.

$\square$

6.3 Notions de primalité

Introduction

Exercice 35.

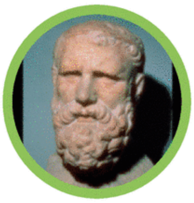
3 Le crible d'Ératosthène

1. a) Après avoir recopié le tableau ci-contre, rayer 1, entourer 2 puis rayer les multiples de 2.

b) Entourer le premier nombre suivant non rayé. Est-il premier ? Justifier.

2. a) Rayer les multiples de 3.

b) Entourer le premier nombre suivant non rayé. Est-il premier ? Justifier.



Ératosthène
(vers III^{e} siècle av. J.-C.)

3. On continue d'appliquer cet algorithme jusqu'à épuisement des entiers de ce tableau.
Que peut-on dire de tous les nombres entourés ?

4. a) Dans quelle(s) colonne(s) se situent la majorité des nombres premiers ?

b) Tous les nombres de ces colonnes sont-ils des nombres premiers ?

c) Pour aller plus loin Prouver qu'un nombre premier différent de 2 et de 3 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102

Correction 6. Question 4.c) : Prenons p un nombre premier. Réalisons la division euclidienne de p par 6, on sait qu'il existe un couple d'entier (k, r) avec $0 \leq r < b$ tel que $p = 6k + r$.
p n'est pas un multiple de 6 donc $r \neq 0$.
$r \neq 2$ car p, étant premier, il n'est pas divisible par 2.
$r \neq 3$ car p, étant premier, il n'est pas divisible par 3.
$r \neq 4$ car étant premier, il n'est pas divisible par 4.
Ainsi, un nombre premier p différent de 2 et 3 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$.

6.3.1 Nombres premiers

Définition 25. *Un entier naturel p est un nombre premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs* 1 *et lui-même.*

Remarque 19.
1. *0 admet une infinité de diviseurs (l'ensemble $\mathbb{Z}$ entier) donc il n'est pas premier.*
2. *1 admet un seul diviseur qui est lui-même, donc il n'est pas premier.*
3. *Mis à part 2, tous les premiers sont impairs.*

Exemple 18 (Des exemples de nombres premiers).
$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19$ sont des nombres premiers.

Théorème 8. *Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.*

Théorème 9. *Quel que soit l'entier naturel n supérieur ou égal à 2, si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors n est premier.*

Théorème 10 (Décomposition en facteurs premiers)**.**
Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique comme un produit de nombre premiers.

Exercice 36. *Décomposer en produit facteurs premiers 87.*

Méthode 7 (Décomposition en facteurs premiers)**.**
Si on a un nombre N que l'on veut écrire sous la forme $N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots$ avec $p_1 \times p_2 \times p_3, \ldots$ premiers.

1. *On effectue la division de N par 2, puis si cela est possible du quotient par 2. On réitère jusqu'au moment où le dernier quotient n'est pas divisible par 2.*
2. *On réitère le processus pour 3, si cela n'est pas possible, on le fait pour 5.*
3. *On recommence avec tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$.*

Correction 7. En vertu, des critères de divisibilité, 87 n'est pas divisible par 2,5,10 et 9.
$8 + 7 = 15$, en vertu du critère de divisibilité par 3, 87 est divisible par 3.
On réalise la division euclidienne de 87 par 3 et on trouver $87 = 3 \times 29$.
3 et 29 étant des nombre premiers. On a fini.

6.3.2 Nombres premiers entre eux

Définition 26 (Premiers entre eux)**.**
On dit que deux nombres entiers relatifs a et b sont premiers entre eux lorsque le seul diviseur commun positif de a et b est 1.

Méthode 8 (Déterminer si deux nombres sont premiers entre eux)**.**
Prenons deux entiers relatifs a et b, pour déterminer s'ils sont premiers entre eux, on se limitera aux cas où on connait les valeurs numériques de a et b. Ainsi, on a plusieurs méthodes :

1. *On peut calculer le PGCD de a et b. S'il est égal à 1 alors, ils sont premiers entre eux.*

2. *On peut décomposer a et b en produit de facteurs premiers. Si a et b n'ont aucun facteur premier commun, alors a et b sont premiers entre eux.*

Exercice 37. *Donner l'ensemble des diviseurs positifs de 77 et 30. Sont-ils premiers entre eux ?*

Correction 8.

1. L'ensemble des diviseurs de 30 est $\{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$ et celui de 77 est $\{1, 7, 11, 77\}$. Le seul diviseur positif commun est 1. Donc les entiers 77 et 30 sont premiers entre eux.

2. $30 = 3 \times 10 = 3 \times 5 \times 2$ et $77 = 7 \times 11$. On obtient tous les diviseurs d'un nombre en réalisant tous les produits qui apparaissent dans sa décomposition.
   Ainsi, les diviseurs positifs de 30 sont $\{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$ et ceux de 77 $\{1, 7, 11, 77\}$.
   Le seul diviseur positif commun étant 1, 30 et 77 sont premiers entre eux.

Définition 27 (Fraction irréductible)**.**
Pour tous entiers relatifs a et b avec b non nul, on dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est <u>irréductible</u> lorsque que les entiers a et b sont premiers entre eux.

Exercice 38. *Les fractions $\frac{30}{77}$ et $-\frac{30}{77}$ sont irréductibles.*

6.4 Une application : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On va maintenant utiliser un raisonnement par l'absurde :

Définition 28 (Raisonnement par l'absurde)**.**
On s'intéresse à une proposition A.
Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que non(A) est vraie et d'aboutir à une contradiction.
Ce qui entraîne que A doit être nécessairement vraie.

6.4.1 Démonstration faite en classe

Exercice 39. *On va supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel. Son écriture sous forme de fraction irréductible est $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.*
But : *Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

1. *Justifier l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$. En déduire $p > q$.*
2. *En déduire $p > 2q - p$.*
3. *Montrer que $2q > p$.*
4. *Montrer que $\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$.*
5. *En déduire une contradiction.*

Correction 9.

1. On a $1^2 = 1$ et $\sqrt{2}^2 = 2$ par définition, donc $1 < \sqrt{2} < 2$. Comme $\sqrt{2} = \frac{p}{q} > 1$ on peut déduire $p > q$.
2. On reprend $p > q$, comme $2 > 0$ en multipliant chaque membre de l'inégalité, on a $2p > 2q$. Ensuite, en soustrayant chaque membre par p, on a $p > 2q - p$.
3. D'un côté, on a : $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff \sqrt{2}q = p$.
   De l'autre $2q > \sqrt{2}q$ donc $2q > p$.
4. Montrer que $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$.
   Maintenant, on soustrait pq à chaque membre de l'inégalité :
   - $p^2 - pq = p(p-q)$
   - $2q^2 - pq = q(2q-p)$

   On a donc $p(p-q) = q(2q-p)$.
   Ainsi, on obtient $\frac{p}{q} = \frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.

5. On a

   (a) $0 < q < p$ donc $0 < p - q$.

   (b) $0 < \frac{p}{q}$ donc $0 < \dfrac{2q - p}{p - q}$ et $0 < 2q - p$ donc $p - 2q < 0$.
   En ajoutant à chaque membre q, on obtient $0 < p - q < q$.
   Comme $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible, cela contredit la minimalité de q.

6.4.2 Une démonstration par la parité

Exemple 19. Le théorème « Si un quadrilatère est un rectangle, alors il est un parallélogramme » sert à démontrer qu'un rectangle a toutes les propriétés du parallélogramme (côtés opposés parallèles et de même longueur).
Sa contraposée, « Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme, alors ce n'est pas un rectangle » sert à démontrer qu'un quadrilatère ne vérifiant pas une des propriétés caractéristiques du parallélogramme ne peut pas être un rectangle.

Définition 29 (Raisonnement par contraposée)**.** *On appelle ce type de raisonnement, un raisonnement par contraposée.*

Lemme 1. *Soit $a \in \mathbb{Z}$, si a^2 est pair, alors a est pair.*

Démonstration. Raisonnons par contraposée, on doit montrer que si a est un entier impair alors a^2 est impair.
Supposons que a est un entier impair alors, il existe un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$ alors :
$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. On pose $K = (k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$ donc $a^2 = 2K + 1$ c'est donc un entier impair.

$\square$

Ici, on va supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel et on va montrer que l'on aboutit à une contradiction

Théorème 11. *$\sqrt{2}$ est irrationnel i.e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration.
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel i.e $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
<u>But :</u> Exploiter l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et aboutir à une contradiction.

$\sqrt{2}$ est rationnel, donc il existe deux entiers naturels a et b c'est-à-dire $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ avec b non nul tel que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ son écriture en fraction irréductible.
Si deux nombres sont égaux alors leurs carrés sont égaux, donc on a :
$(\sqrt{2})^2 = (\dfrac{a}{b})^2 \iff 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \iff 2b^2 = a^2$.

Ainsi, comme a^2 est pair, en vertu du lemme a est pair. Donc, il existe $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel tel que $a = 2k$.

Étudions la parité de b maintenant.

On a $2b^2 = a^2 = (2k)^2 \iff 2b^2 = 4k^2 \iff b^2 = 2k^2$.
Donc, on peut affirmer que b^2 est pair. Ainsi, en vertu du lemme b est pair. De ce fait, on a montré que a était pair et b était pair, donc $\dfrac{a}{b}$ est simplifiable par 2, car a un multiple de 2 et b est un multiple de 2 ce qui contredit le fait qu'ils soient premiers entre eux, donc $\dfrac{a}{b}$ n'est pas une fraction irréductible.
En conclusion, l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ conduit à une contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel i.e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Exercice 40. *On souhaite établir le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Pour cela, on va supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel et aboutir à une contradiction*

1.

Chapitre 7

Racine carré

7.1 Racines carrés

7.1.1 Défintions et propriétés

Commençons par définir proprement la notion de racine carré :

Définition 30. *La racine carré d'un nombre réel positif a est le nombre dont le carré est a ; on le note* $\sqrt{a}$ *et on a, par définition,* $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple 20. On a $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et 3 est positif.

Remarque 20.

- *Le carré d'un nombre est toujours positif d'après la règle des signes. Ainsi, lorsque a est strictement négatif,* $\sqrt{a}$ *n'existe pas et n'a donc pas de sens.*
- *Les carrés parfait* x^2 *pour x un entier compris entre 0 et 11 sont à connaitre par coeur.*

Propriété 19.

- *Pour tout réel positif a,* $\sqrt{a^2} = a$ *et pour tout réel négatif a* $\sqrt{a^2} = -a$
- *Pour tous réel positifs a et b, on a :* $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- *Pour tous réel positif a et b réel positif non nul :* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Remarque 21. *Illustrons le fait que* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *:*
pour $a = 9$ *et* $b = 16$, *on* $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ *et* $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Exemple 21.

- $\sqrt{3,6^2} = 3,6$ car $3,6$ est positif
- $\sqrt{(-7)^2} = -(-7) = 7$ car -7 est négatif. En effet, $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$
- $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$

7.1.2 Application aux équations

Soit a un nombre réel fixe, soit x un réel, l'équation $x^2 - a = 0$ équivaut à $(x-a)(x+a) = 0$ donc comme un produit est nul, si et seulement si, un de ses facteurs est nul alors $x = a$ où $x = -a$.
Ainsi, $\sqrt{x}$ est donc égal à a ou $-a$.

7.1.3 Identités remarquables et racines carrés

Pour éviter qu'apparaissent des racines carrés au dénominateur d'un quotient, on transforme celui-ci à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Illustrons l'intérêt par un exemple :

$$\frac{-2}{1+\sqrt{3}} = \frac{-2 \times (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{-2(1-\sqrt{3})}{1^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{-2(1-\sqrt{3})}{1-3} = \frac{-2(1-\sqrt{3})}{-2} = 1 - \sqrt{3}$$

Théorème 12.
Soit a, b, c, d des nombres rationnels avec $d > 0$ et $b + c\sqrt{d} \neq 0$.
Posons $A = \dfrac{a}{b + c\sqrt{d}}$, pour écrire A avec un dénominateur rationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par $b - c\sqrt{d}$, en ayant préalablement démontré que $b - c\sqrt{d}$ est un réel non nul.

Démonstration. $A = \dfrac{a}{b + c\sqrt{d}} = \dfrac{a(b - c\sqrt{d})}{(b + c\sqrt{d})(b - c\sqrt{d})} = \dfrac{a(b - c\sqrt{d})}{b^2 - c^2 d}$ □

Définition 31 (Quantité conjuguée)**.**
La quantité conjuguée de $b + c\sqrt{d}$ est $b - c\sqrt{d}$

Chapitre 8

Vecteurs du plan

8.1 Notions de vecteurs

Introduction

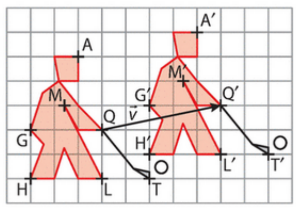
2 Découvrir les vecteurs

Le jeu de hockey sur glace est un jeu d'équipe dont l'objectif est de marquer des points en amenant le palet dans le but à l'aide d'une crosse. Un joueur vient de glisser, amenant son palet du bout de la crosse. Voici un schéma du mouvement, qui indique que le joueur, la crosse et le palet ont subi le même déplacement. On observe que la main du joueur s'est déplacée du point Q au point Q'.

1. Quelle transformation reconnaît-on ?

2. a) En quel point cette transformation transforme-t-elle le point A ?

b) En quel point cette transformation transforme-t-elle le point H ?



Le vecteur $\overrightarrow{QQ'}$ indique le sens, la direction et la longueur du mouvement.

On dit qu'il s'agit de la **translation de vecteur** $\overrightarrow{QQ'}$ ou $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{HH'}$ et que les vecteurs $\overrightarrow{QQ'}$, $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont **égaux.**

3. a) Décrire des caractéristiques communes de ces vecteurs.

b) Quelle est la nature des quadrilatères QQ'A'A et QQ'H'H ? Justifier.

4. a) Quelle semble être la nature du quadrilatère AA'H'H ?

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{A'H'}$ sont-ils égaux ? Citer d'autres couples de vecteurs égaux.

5. Pour aller plus loin Les points images de trois points alignés sont-ils aussi alignés ?

Cours 2 p. 128

8.1.1 Translations du plan

Définition 32 (Vecteur)**.**
Soit A et B deux points distincts du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé :

- *sa direction : donnée par la droite (AB)*
- *son sens : de A vers B*
- *sa norme : la longueur AB.*

On note la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $||\overrightarrow{AB}||$.

Définition 33 (Translation)**.**
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque 22. *Deux remarques :*

1. *Si A et B sont confondus, on parle alors de nul, noté $\overrightarrow{0}$*
2. *On représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.*

8.1.2 Cas d'égalité

Définition 34 (Égalité)**.**
Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même norme sont égaux.

Définition 35 (Représentant)**.**
Lorsque des vecteurs sont égaux, on dit qu'ils sont des représentants d'un même vecteur, que l'on notera $\overrightarrow{u}$ indépendamment des deux points origines et extrémité.

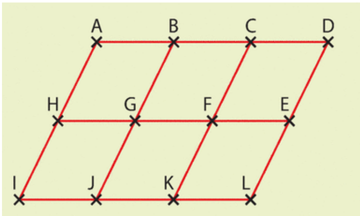
Méthode 9 (Déterminer l'égalité de deux vecteurs)**.**
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si

1. *Deux vecteurs ont même direction si leurs « droites associées » sont parallèles.*
   Ainsi, on a $(AB)//(CD)$.
2. *Deux vecteurs de même direction, ont le même sens, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens.*
3. *Des vecteurs ont la même norme si leurs segments associés ont même longueur.*
   Donc $AB = CD \iff ||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{CD}||$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ admettent un même représentant $\overrightarrow{u}$.

Propriété 20 (Caractériser un parallélogramme)**.**
Soient A, B, C, D quatre points. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Exercice 41.



La figure ci-contre représente six parallélogrammes identiques.

1. *Citer un vecteur qui a même direction que le vecteur $\overrightarrow{FG}$ mais pas le même sens ni la même norme.*
2. *Citer un représentant d'origine I et du vecteur $\overrightarrow{ED}$.*
3. *Citer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{HF}$.*

Correction 10.

1. Comme la figure est constituée de parallélogrammes, les droites (BD) et (FG) sont parallèles. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FG}$ ont même direction, mais pas même sens :
   - vers la droite pour $\overrightarrow{BD}$
   - vers la gauche pour $\overrightarrow{FG}$.

   Enfin, comme $BD = 2FG$, le vecteur $\overrightarrow{BD}$ répond à la question.
2. Il s'agit du vecteur $\overrightarrow{IH}$. Il est d'origine I, a même direction que $\overrightarrow{ED}$ car la droite (IA) est parallèle à (ED).
   Il a même sens (vers le haut) et la même norme.
3. On cherche un vecteur qui a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{HF}$. On peut citer le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Propriété 21. *Soient O un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.*
En particulier, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors M est le point tel que $OABM$ soit un parallélogramme.

Méthode 10 (Démontrer avec des égalités de vecteurs)**.**
Tout d'abord, il faut faire un croquis de la situation. Puis, il faut traduire chaque propriété géométrique en termes de vecteurs.

Exercice 42.

1. *ABC est un triangle. Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.*

2. *M est un point appartenant au segment $[BD]$.*
   Les points E et F sont les symétriques respectifs des points B et A par rapport au point M.
   Démontrer que le quadrilatère $CDFE$ est un parallélogramme.

Correction 11.

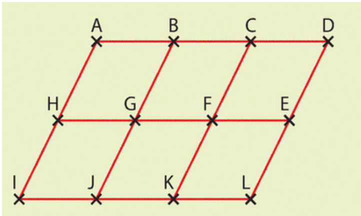
1. On construit le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$. Pour cela, on peut tracer les arcs de cercle de centre B et de rayon AC, de centre C et de rayon AB et placer le point D qui convient à leur intersection.

2. Les segments $[BE]$ et $[AF]$ se coupent en leur milieu M donc $ABFE$ est un parallélogramme. Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.
   D'après la première question, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ et le quadrilatère $CDFE$ est un parallélogramme.

8.2 Addition de vecteurs

8.2.1 Somme de vecteurs

Reprenons le parallélogramme étudié à la séance précédente.



Définition 36 (Vecteur somme)**.**
La <u>somme</u> de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par l'enchainement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la translation de $\overrightarrow{v}$.

Méthode 11 (Construction du vecteur somme)**.**
Pour construire la somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, on met des représentants des vecteurs bout à bout et on considère le vecteur allant de l'origine du premier à l'extrémité du second.

Exemple 22. En s'appuyant sur le dessin, donnons quelques exemples :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est la translation transformant le point A en C.
2. $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG}$ est la translation transformant A en G.
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FK}$, comme on a $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{BG}$ car ils ont même norme, sens et $(FK)//(BG)$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$, cette somme est donc la même qu'au cas précédent.

8.2.2 Différence de vecteurs

Définition 37 (Vecteur opposé)**.**
Prenons un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on appelle <u>opposé</u> du vecteur $\overrightarrow{AB}$ noté $-\overrightarrow{AB}$ est la translation qui transforme B en A.

Remarque 23. *Plusieurs remarques :*

1. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
2. $\overrightarrow{AB}$ *et* $-\overrightarrow{AB}$ *ont même direction et norme, mais un sens opposé.*

Définition 38 (Différence de deux vecteurs)**.**
Le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est défini par $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + -(\overrightarrow{v})$ ce qui signifie que soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé.

Méthode 12 (Construire la différence de deux vecteurs)**.**
Pour construire la différence $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$*, on met des représentants des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $-\overrightarrow{v}$ *bout à bout et on considère le vecteur allant de l'origine du premier à l'extrémité du second.*

8.2.3 Propriétés algébriques

On retrouve, avec les vecteurs, une addition similaire à celle connue sur les nombres :

Propriété 22 (Opérations sur les vecteurs)**.**
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *:*

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ *(commutativité de l'addition)*
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ *(associativité de l'addition)*
   On peut donc écrire ce vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$
3. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$*, la somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul.*
4. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$

On a la propriété :

Propriété 23 (Relation de Chasles)**.**
Soient A, B, C *trois points. L'enchaînement de la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *puis de la translation de vecteur* $\overrightarrow{BC}$ *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{AC}$*.*
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Remarque 24.
Attention, l'égalité vectorielle ne veut pas dire que $AB + BC = AC$ *car en vertu de l'inégalité triangulaire, on a* $AB + BC \geq AC$*.*

Ces propriétés algébriques et la relation de Chasles nous permettent donc de simplifier nos écritures vectorielles.

Théorème 13 (Décomposition d'un vecteur et coordonnées)**.**
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *une base de vecteurs du plan.*
Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ *du plan se décompose de manière unique sous la forme* $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$*, où* x, y *sont deux nombres réels.*
On notera $(x; y)$ *ou* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*, le couple forme les* <u>*coordonnées*</u> *de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*.*

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se lit « $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées x et y » ; x est l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{u}$ et y son ordonnée.

8.2.4 Égalité et somme de vecteurs. Produit par un réel

Maintenant, considérons $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan dans laquelle on a les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où x, y, x', y' sont des réels.

Théorème 14. *Dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, on a :*

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$*, si et seulement si* $x = x'$ *et* $y = y'$*.*
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *a pour coordonnées* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$*.*
3. *Pour tout réel* k*,* $k\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnée* $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$*.*

Démonstration. Dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a :

1. Application de la définition.
2. Par hypothèse, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} \\ &= (x + x')\overrightarrow{i} + (y + y')\overrightarrow{j} \end{aligned}$$
   Donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

3. Par hypothèse, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $k\overrightarrow{u} = k(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) = kx\overrightarrow{i} + ky\overrightarrow{j}$ ce qui prouve que $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$\square$

8.3 Produit d'un vecteur par un réel

8.3.1 Colinéarité

Propriété 24 (Caractérisation de la colinéarité)**.**
Soient un réel k, $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur ayant :

1. *même direction que $\overrightarrow{u}$.*
2. *même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.*
3. *$||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.*

Remarque 25. *Deux cas particuliers :*

1. *Si $k = 0$ alors pour tout $\overrightarrow{u}$ du plan $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*
2. *Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors pour tout réel k, $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*

Exemple 23. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $2\overrightarrow{u}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{u}$ et $-\frac{4}{3}\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
$\overrightarrow{u}$ et $2\overrightarrow{u}$ ont le même sens. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $-\frac{4}{3}\overrightarrow{u}$ sont de sens opposé.

Propriété 25 (Règle de calcul)**.**
Quels que soient les réels a et b et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

1. $(a + b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$
2. $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$
3. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$
4. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

Définition 39 (Vecteurs colinéaires)**.**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont <u>colinéaires</u> et k est alors appelé coefficient colinéarité.

Remarque 26.

1. *Deux vecteurs, non nuls, sont colinéaires s'ils ont même direction.*
2. *Le vecteur $3\overrightarrow{AB}$ est simplement $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.*

Théorème 15.

1. *Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*
2. *Quels que soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.*

Démonstration. 1. C'est la définition de la colinéarité.

2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k'\overrightarrow{w}$.
Donc $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} = kk'\overrightarrow{w}$. En posant $K = kk'$, on a $\overrightarrow{u} = K\overrightarrow{w}$ et en appliquant le 1. on a fini.

□

8.3.2 Application des vecteurs colinéaires

Théorème 16. *Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux.*

1. *A, B, C sont alignés si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

2. *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*

Propriété 26 (Caractériser le milieu d'un segment)**.**
Le point I est le milieu d'un segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Chapitre 9

Statistique descriptives

9.1 Cumul d'effectifs et de fréquences

9.1.1 Séries de données statistiques

Vocabulaire

Définition 40 (Vocabulaire général)**.**
L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique s'appelle la population.
Un élément de la population est un individu.
Dans une série statistique, l'objet étudié s'appelle le caractère.
Si le caractère prend des valeurs numériques, on dit qu'il est quantitatif. Sinon, il est qualitatif.
Un caractère quantitatif peut être discret ou continu :

- *discret s'il prend des valeurs isolées (exemple : 0 ; 1 ; 2 ; ...) ;*
- *continu s'il peut prendre toute valeur dans un intervalle appelé aussi classe.*

Remarque 27. *Les premières études statistiques ayant historiquement porté sur la démographie, ainsi le vocabulaire fut conservé. Néanmoins, les individus peuvent être des objets ou des personnes.*

Exemple 24. Au cours d'une enquête portant sur les bébés nés en 2013, on s'intéresse :

- à la couleur de leurs yeux : caractère qualitatif (marron, bleu, etc) ;
- au nombre de fois où ils pleurent par jour : caractère quantitatif discret (1 ; 2 ; 3 ; 4, ...) ;
- à leur taille en centimètres : caractère quantitatif continu ($[40; 50[$, $[50; 60[$).

Effectifs, fréquences et cumul

Définition 41.
Dans une série statistique, l'effectif d'une valeur est le nombre d'individus ayant cette valeur.
L'effectif total N est le nombre d'individus de la population étudiée. C'est la somme de tous les effectifs.
On appelle fréquence, souvent noté f, d'une valeur du caractère, le quotient de l'effectif de la valeur sur l'effectif total : $f = \dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$.
On appelle effectif cumulé (respectivement fréquence cumulée) d'une valeur x le nombre d'individus (la fréquence d'individus) ayant une valeur dans la série inférieur ou égale à cette valeur x.

Exemple 25.
Une machine réalise des pièces cylindriques. Lors d'un contrôle, on obtient la série statistique suivante :

Diamètre en mm	42,15	42,16	42,17	42,18	42,19	42,20	42,21	42,22
Effectif	7	20	42	88	52	24	12	5
Effectif cumulé croissant	7	27	69	157	209	233	245	250

L'effectif total est $N = 7 + 20 + 42 + 88 + 52 + 24 + 12 + 5 = 250$: soit 250 pièces cylindriques.
La fréquence de la valeur $42,18$ est $f = \frac{88}{250} = 0,352$ ou encore $35,2\%$.
L'effectif cumulé croissant pour cette valeur est le nombre de pièces ayant un diamètre inférieur ou égal à 42,18 mm donc $7 + 20 + 42 + 88 = 157$.

Propriété 27. *La somme des fréquences est toujours égale à 1.*

On réalise les exercices 155 et 156

9.1.2 Représentations graphiques : exemples

Nuage de points

Histogramme

Courbe des fréquences cumulées croissantes (F.C.C)

Voir hyperbole p160./Barbazo p162

9.2 Indicateur d'une série statistique

Introduction

On réalise l'exercice **??**.

9.2.1 Indicateurs de positions

Moyenne

Définition 42 (Moyenne)**.**
Considérons une série statistique de p valeurs distinctes $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \dots, n_p$ donnée dans les tableaux suivants.

Valeur	x_1	x_2	$\dots$	x_p
Effectif	n_1	n_2	$\dots$	n_p

On appelle moyenne de cette série le quotient :
$\overline{x} = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$.
L'effectif total étant $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

Propriété 28. *Dans le cas des fréquences, on a :*

Valeur	x_1	x_2	$\dots$	x_p
Fréquence	f_1	f_2	$\dots$	f_p

Et $\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$.

Théorème 17. *On considère une série statistique prenant comme valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$. On note $\overline{x}$ la moyenne.*
Pour tous réels a et b, on a :

- *La série statistique $a \times x_1, a \times x_2, \dots, a \times x_p$ a pour moyenne $a \times m$.*
- *La série statistique $\times x_1 + b, \times x_2 + b, \dots, \times x_p + b$ a pour moyenne $m + b$.*
- *La série statistique $a \times x_1 + b, a \times x_2 + b, \dots, a \times x_p + b$ a pour moyenne $a \times m + b$.*

Exemple 26. Dans une classe la moyenne est de 9. Le professeur décide d'augmenter toutes les notes de 1 point. Alors la nouvelle moyenne est de $9 + 1 = 10$. Dans une autre classe, la moyenne est de 10. Si le professeur augmente toute les notes de 50%, va multiplier toutes les notes par 1,5 et la nouvelle moyenne sera de $10 \times 1,5 = 15$.

Méthode 13 (Calculer une moyenne pondérée)**.**
Pour calculer une moyenne pondérée, on suit le procédé suivant :

1. *On repère les valeurs et les effectifs.*
2. *On applique la formule de la définition en faisant attention à respecter les priorités de calculs dans la calculatrice.*

Médiane et quartiles

Définition 43 (Médiane)**.**
Prenons une série statistique dont on a rangé les valeurs dans l'ordre croissant.
La médiane est une valeur telle que la moitié (50%) *des individus ont une valeur qui lui est inférieure ou égale et l'autre moitié supérieure ou égale.*

Dans la pratique, on distingue deux cas, en fonction de la parité de l'effectif total N :

- Si N est impair, il est de la forme $2k+1$ donc la médiane (de la série) est la valeur de rang $n+1$ c'est-à-dire la valeur de rang $\frac{n}{2}+0,5$.
- Sinon N est pair, il est de la forme $2k$ donc, par convention, la médiane (de la série) est la demi-somme des valeurs de rang n et $n+1$ c'est-à-dire la moyenne des valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.

Définition 44 (Quartiles)**.**
On distingue deux cas :

- *Le premier quartile, noté Q_1, est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins un quart* (25%) *des individus ont une valeur de la série qui lui est inférieure ou égale.*
- *Le troisième quartile, noté Q_3, est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins trois-quarts* (75%) *des individus ont une valeur de la série qui lui est inférieure ou égale.*

9.2.2 Indicateurs de dispersion

Définition 45 (Étendue)**.**
On appelle étendue d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite.

Définition 46 (Écarts interquartiles, écart type)**.**
On définit différents indicateurs :

1. *L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$, la longueur de cet intervalle vaut $Q_3 - Q_1$ et s'appelle l'écart interquartile.*

2. *Considérons une série statistique prenant comme valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$, notons $n_1, n_2, \dots, n_p$ les effectifs associés et $\overline{x}$ la moyenne de cette série. On appelle écart type, noté σ, le nombre :*
$\sigma = \sqrt{\dfrac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\cdots+n_p}}$

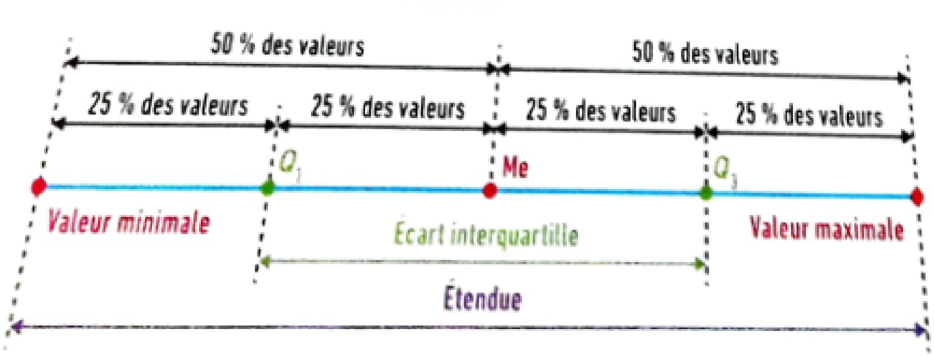
Remarque 28.
1. *L'écart type mesure l'écart entre les valeurs de la série et la moyenne. Plus l'écart-type est petit, plus les valeurs sont concentrées autour de la moyenne et plus la série est homogène.*

2. *Plus l'écart interquartile est petit, plus les valeurs de la série qui sont dans l'intervalle $[Q_1; Q_3]$ sont proches les unes des autres. Les valeurs en dehors de cet intervalle n'ont pas d'influence sur l'écart interquartile.*

Transmath p275.

9.2.3 Résumé

Un schéma résumant nos connaissances :



9.3 Proportions

Mise en jambe

Exercice 43. *L'an passé, 29 élèves de terminale 1 et 26 élèves de terminale 2 ont eu le baccalauréat. « - La classe de terminale 1 a obtenu de meilleurs résultats que la classe de terminale 2 !*
- Je ne suis pas d'accord ! La terminale 1 présentait 35 élèves à l'examen alors que la terminale 2 n'en présentait que 31 ! »

1. *Commentez ces affirmations.*

2. *On sait de plus qu'il y avait 14 filles en terminale 1 et 17 en terminale 2. Quelle est la classe qui présente le meilleur taux de réussite si on considère les élèves de sexe féminin ?*

9.3.1 Proportion et pourcentage

On rappelle la notion de proportion :

Définition 47 (Proportion)**.**
Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments et A un sous-ensemble de E. On rappelle que cela se note $A \subset E$.
La proportion (ou la fréquence) d'éléments de A parmi ceux de E est le rapport $\dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$.

Remarque 29. *La proportion d'éléments de A parmi ceux de E est un réel compris entre 0 et 1.*

Exemple 27. (Faire un dessin) On a un ensemble E contenant 10 éléments et $A \subset E$ possédant 4. On a donc une proportion de $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0.6$.

Méthode 14 (Exprimer une proportion en pourcentage)**.**
Supposons, que l'on est deux ensembles A et B tel que A est inclus dans B. Si on a une proportion $\dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } B}$, pour pouvoir exprimer celle-ci en pourcentage, on cherche une 4e proportionnelle telle que :

$$\frac{p}{100} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } B} \iff p = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \times 100}{\text{nombre d'éléments de } B}$$

Théorème 18 (Déterminer une proportion de proportion)**.**
Considérons trois ensembles A, B et C emboités tels que $C \subset B \subset A$.
Notons p_1 la proportion de B dans la population de A. Notons p_2 la proportion de C dans la population de B.
Alors, la proportion de la population C dans la population A est égale à $p_1 \times p_2$.

Exercice 44. *La moitié des pages d'un magazine est constituée de publicités. Parmi celles-ci,* 25% *sont consacrés à la mode.*

1. *Déterminer la proportion de pages de publicités consacrées à la mode.*
2. *Exprimer cette proportion à l'aide d'un nombre décimal, d'une fraction et d'un pourcentage.*

Correction 12. Ici, A est l'ensemble des pages du magazine, B est l'ensemble des pages de publicités et C est l'ensemble des pages de publicités consacrées à la mode.

1. La proportion des pages de publicités de mode parmi toutes les pages du magazine est donc $\frac{1}{2} \times \frac{25}{100} = \frac{25}{100} = \frac{5 \times 5}{8 \times 25} = \frac{1}{8}$.
2. La proportion peut s'écrire sous différentes façons :
   - par une fraction $\frac{5 \times 5}{8 \times 25} = \frac{1}{8}$.
   - en pourcentage : $p = 12.5\%$,
   - par un nombre décimal : $p = 0.125$,

   Ces trois écritures étant équivalentes.

Méthode 15 (Déterminer un effectif à partir d'une proportion)**.**
Imaginons que l'on ait trois ensemble imbriqués $A \subset B \subset C$ et qu'on l'on sache la proportion de A dans C noté p ainsi que son effectif f. On cherche à déterminer x l'effectif total de C.
Tout d'abord, on a le tableau suivant :

f	p
x	*100*

La colonne de gauche étant les effectifs, et la colonne de droite la proportion exprimée en pourcentage. On cherche ainsi la quatrième proportionnelle x qui est égal à $\frac{f \times 100}{p}$.

Exercice 45. *Dans un lycée,* 30% *des élèves s'orientent en filière technologique en fin de Seconde. Parmi eux,* 40% *vont en série STMG.*

1. *Déterminer la proportion des élèves s'orientant en STMG parmi l'ensemble des élèves de seconde.*
2. *54 élèves vont en série STMG. Combien d'élèves de Seconde y a-t-il dans le lycée ?*

9.4 Taux d'évolution

9.4.1 Taux d'évolutions et évolutions successives

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'évolution du prix au cours du temps. Comment calculer le nouveau prix d'un article dont le prix baisse de 14% à deux reprises ?

Introduction

Exercice 46.

1. Le nombre représenté par 7 % est :

☐ 7 ☐ 0,7 ☐ 0,07 ☐ 1,07

2. Un département français a un taux de réussite au baccalauréat de 90 %. Sachant que 2 000 élèves ont passé le baccalauréat dans ce département, combien d'élèves l'ont obtenu ?

☐ 900 ☐ 1800 ☐ 1910 ☐ 1990

3. Un article coûtait 110 € avant les soldes. Après les soldes, il coûte 88 €. Quel est le taux de réduction qui a été appliqué ?

☐ 12 % ☐ 20 % ☐ 22 % ☐ 25 %

4. Le taux de chômage d'un pays est le pourcentage de chômeurs dans la population active. On cherche à comparer les taux de chômage de trois pays A, B et C à partir des informations suivantes :

- Le pays A compte 3 millions de chômeurs pour 30 millions d'actifs.
- Le pays B compte 4 millions de chômeurs pour 50 millions d'actifs.
- Le nombre de chômeurs du pays C représente 9 % de sa population active.

Si on range ces trois pays selon l'ordre croissant de leur taux de chômage, on obtient :

☐ A-B-C ☐ B-C-A ☐ A-C-B ☐ C-B-A *(Source : MEN-SG-DEPP)*

5. Étant en difficulté l'an passé, une entreprise a diminué la prime annuelle de ses employés de 50 %. Cette année, une amélioration de la situation conduit la direction à augmenter la prime de 50 %.

La prime va revenir à son niveau d'avant les difficultés.

☐ Vrai ☐ Faux

6. Pendant la période des soldes, un magasin affiche 70 % de réduction et 20 % de réduction supplémentaire. Un article coûtait 80 € avant les soldes. Quel est son prix après les deux réductions ?

☐ 8 € ☐ 11,20 € ☐ 19,20 € ☐ 44,80 €

7. Un autre magasin affiche 60 % de réduction et 40 % de réduction supplémentaire. Un article coûtait 120 €. Quel est son prix après les deux réductions ?

☐ 0 € ☐ 20 € ☐28,80 € ☐ 43,2 €

8. Un troisième magasin affiche 70 % de réduction et 50 % de réduction supplémentaire. Un article coûtait 100 €. Quel est son prix après les deux réductions ?

☐ 15 € ☐ 35 € ☐ il est gratuit ☐ il est gratuit et on reçoit un bon d'achat de 20 €

9. Un magasin de vélos électriques propose la promotion suivante : 10 % de réduction sur tous les modèles. Paiement de 40 % du vélo à l'achat et le reste sur quatre mensualités identiques. Quel sera le montant de chaque mensualité pour un vélo coûtant 800 € avant la promotion ?

☐ 72 € ☐ 80 € ☐ 100 € ☐ 108 €

Évolution d'une quantité

Définition 48 (Évolution)**.**
Considérons une quantité initiale VI strictement positive et une quantité finale VF.
On appelle taux d'évolution de VI à VF le réel défini par $t = \frac{VF-VI}{VI}$.
Le coefficient multiplicateur CM associé à ce taux d'évolution est $CM = 1 + t$.

Propriété 29 (Coefficient multiplicateur)**.**
Si on a un coefficient multiplicateur $CM = 1+t$, alors changer une quantité de $t\%$, c'est le multiplier par CM. (faire un dessin avec des bulles)

Remarque 30. *Si $t > 0$, cela signifie que $VF > VI$, cela exprime une augmentation donc $CM > 1$.*
Sinon, on a $t < 0$ cela signifie que $VF < VI$ et cela exprime une réduction donc $CM < 1$.

Théorème 19. *En gardant les mêmes notations, si VI est strictement positive, on a $VF = VI \times CM$.*

Exemple 28. Une console de jeux coûte initialement 400 euros. Son prix baisse de 15% lors d'une promotion.
Le coefficient multiplicateur est $1 - \dfrac{15}{100} = 0,85$. On a $400 \times 0,85 = 340$.
Donc le nouveau prix de la console est 340 euros.

Évolutions successives

Activité

Exercice 47. *Une entreprise donne à ses salariés une prime trimestrielle. En raison d'un ralentissement de l'activité économique, l'entreprise se retrouve fragilisée. La directrice de l'entreprise décide alors de baisser le montant de la prime trimestrielle de* 30%*. Les salariés acceptent cette décision pour sauver leur entreprise et leurs emplois.*

L'année suivante, la situation économique de l'entreprise commence à s'améliorer. La directrice décide alors d'augmenter la prime de 7% *chaque trimestre de l'année, afin de compenser progressivement la baisse de l'année précédente.*
Les salariés contestent cette augmentation et demandent une augmentation progressive de la prime de 10% *à chacun des trimestres.*

Étudier la situation. Une des propositions permet-elle de revenir à la situation de départ ?

Définition 49 (Évolutions successives)**.**
Si on suit l'évolution d'une valeur V_0 à une valeur V_1 suivie d'une autre évolution V_2 ; on appelle taux d'évolution global associé à l'évolution de V_0 à V_2.
Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur global.

Théorème 20 (Déterminer un coefficient multiplicateur global)**.**
En notant c_1 le coefficient multiplicateur d'une première évolution et c_2 celui d'une seconde évolution, le coefficient multiplicateur c est égal au produit des deux, c'est-à-dire que l'on a $c = c_1 \times c_2$.

Remarque 31. *Pour obtenir le taux global T, on a $T = C - 1$*

Exemple 29. Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30% avant de baisser de 10%.
Il est donc multiplié par $1+\dfrac{30}{100}$=1,3 puis $1-\dfrac{10}{100} = 0,9$. Alors, on a comme coefficient multiplicateur $c = 1,3 \times 0,9 = 1,17$.
Le taux d'évolution globale est donc $T = 1,17 - 1 = 0,17$ ce qui correspond à une hausse de 17%.

Définition 50 (Évolution réciproque)**.**
Si on considère une évolution d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A alors le taux d'évolution réciproque est le taux d'évolution permettant d'aller de V_A à V_D.
Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur réciproque.

Théorème 21 (Calcul un coefficient multiplicateur réciproque)**.** *Si c est le coefficient multiplicateur d'une évolution, le coefficient multiplicateur réciproque est égal à $\dfrac{1}{c}$.*

Remarque 32. *On obtient le taux réciproque en calculant $\frac{1}{c} - 1$.*

Exemple 30. Un prix augmente de 25% et a donc été multiplié par $1 + \frac{25}{100} = 1,25$.
Le coefficient multiplicateur réciproque qui permettrait de revenir au prix de départ est $\dfrac{1}{1,25} = 0,8$. Or $0,8 - 1 = -0,2$?. Le taux d'évolution réciproque est de -20%, c'est-à-dire qu'il faut appliquer une baisse de 20% au prix augmenté pour revenir au prix avant augmentation.

Chapitre 10

Probabilité sur un ensemble fini

10.1 Vocabulaire des probabilités

10.1.1 Univers et évènements

Définition 51. *On appelle expérience aléatoire, une expérience dont on ne peut prévoir le résultat.*
On appelle univers, noté Ω, l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
On appelle évènement, toute partie (ou sous-ensemble) de l'univers Ω .
On appelle évènement élémentaire de Ω, toute partie de l'univers Ω ne contenant qu'un seul élément qu'on appelle singleton. .
Soit A un évènement et ω un élément de A, on dit alors que ω réalise l'évènement A

Remarque 33. Ω *est l'évènement certain tandis que* $\emptyset$ *est l'évènement impossible.*

Exemple 31 (Lancé d'un dé).
On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on note le nombre sur sa face supérieure.
Cette expérience aléatoire a six issues et son univers $\Omega = \{1; 2; 3; ; 4; 5; 6\}$.
L'évènement A « obtenir un nombre impair » est l'ensemble $A = \{1; 3; 5\}$.
L'évènement « obtenir un nombre 5 » est l'évènement élémentaire $\{5\}$.
L'évènement « obtenir 0 » est l'évènement impossible et l'évènement « obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6 » est l'évènement certain.

Définition 52 (Évènement contraire)**.**
On appelle évènement contraire de A dans Ω, l'ensemble, noté $\overline{A}$, des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A : $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω.

Remarque 34. *Ainsi, on obtient* $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Exemple 32 (Lancé d'un dé (suite)).
L'évènement contraire de A « obtenir un nombre impair » est l'évènement « obtenir un nombre pair » : $\overline{A} = \{2; 4; 6\}$.

10.1.2 Réunion et intersection d'évènements

Définition 53. *Soit A et B deux évènements d'un même univers Ω. L'évènement $A \cup B$ est réalisé si au moins un des évènements A ou B est réalisé. L'évènement $A \cap B$ est réalisé si les deux évènements A et B sont réalisés en même temps.*

Définition 54 (Évènement incompatible)**.**
Soit A et B deux évènements d'un même univers Ω ; les évènements A et B sont dits <u>*incompatibles*</u> *si leur intersection est vide, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.*

Exemple 33 (Lancé d'un dé (suite)).
L'évènement contraire de A « obtenir un nombre impair ».
L'évènement « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 » est l'ensemble $B = \{3; 4; 5; 6\}$.
On a $A \cup B = \{1; 3; 5\} \cup \{3; 4; 5; 6\} = \{1; 3; 4; 5; 6\}$ et $A \cap B = \{3; 5\}$.
L'évènement C « Obtenir 1 » est le singleton $\{1\}$ et les évènement B et C sont incompatibles.

10.2 Loi de probabilité

Définition 55 (Loi de probabilité)**.**
On considère une expérience aléatoire à laquelle on associe un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
On dit que l'on définit une loi de probabilité sur Ω *lorsque l'on associe à chaque élément de* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *l'univers* Ω *des nombres réels* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *tels que :*

- *Pour tout entier* i *compris entre* 1 *et* n*, on a* $0 \leq p_i \leq 1$.
- $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

On appelle probabilité d'un évènement A*, noté* $P(A)$ *le nombre réel égal à la somme des* p_i *associés aux éléments de* A.

Propriété 30. *Soit une expérience aléatoire d'unvers* Ω *fini sur lequel, on définit une loi de probabilité.*

- *Quel que soit un évènement* A *de l'univers* Ω*, on a* $0 \leq P(A) \leq 1$.
- *La probabilité de l'évènement certain est* 1 *c'est-à-dire* $P(\Omega) = 1$.
- *La probabilité de l'évènement impossible est* 0 *c'est-à-dire* $P(\emptyset) = 0$.

Exemple 34. On lance un dé cubique bien équilibré, ayant trois faces rouges, deux faces bleues et une face verte, et on s'intéresse à la couleur obtenue. On a alors :

Issue	Vert	Bleu	Rouge
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

On vérifie que $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$.

10.3 Séance 3 : Calcul des probabilités

10.3.1 Cas d'équiprobabilité

Considérons un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

Théorème 22 (Loi équirépartie)**.**
Une loi est dite équirépartie lorsque chaque issue à la même probabilité de se réaliser, qui est alors :
$$\frac{1}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{1}{n}.$$
On dira qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.

Exemple 35. Lors d'un lancer d'un dé cubique équilibré non pipé à six faces numérotées de 1 à 6. Chaque issue de l'univers $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ a une probabilité d'apparition de $\frac{1}{6}$.

- L'évènement A « obtenir un nombre impair » correspond à l'apparition des faces $1, 3, 5$ donc $A = \{1; 3; 5\}$.
  Ainsi, trois issues réalisent A donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- L'évènement B « obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 » correspond à l'ensemble $\{3; 4; 5; 6\}$ qui contient 4 éléments donc sa probabilité est $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

10.3.2 Probabilité de l'intersection et de la réunion

Théorème 23. *Si A et B sont deux évènements d'un même univers Ω muni d'une loi de probabilité, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

Exemple 36. En prenant un dé non pipé, où chaque face est numéroté de 1 à 6 ; si A est l'évènement « Obtenir un nombre pair » et B est l'évènement « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 » alors, on a :

- $P(A) = \frac{1}{3}$
- $P(B) = \frac{2}{3}$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

10.3.3 Probabilité de l'évènement contraire

Théorème 24. *Soit A un évènement d'un univers Ω muni d'une loi de probabilité.*
Si $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A dans l'univers Ω, alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple 37. En reprenant notre dé :

Issue	Vert	Bleu	Rouge
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Si A est l'évènement « Obtenir une face bleue », on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Chapitre 11

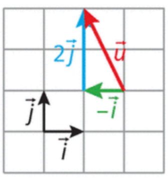
Vecteurs avec coordnnées

11.1 Bases, repères et coordonnées

Définition 56 (Base orthonormée)**.**
Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}||$.
Le couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une <u>*base orthonormée*</u> *des vecteurs du plan.*

Propriété 31 (Décomposition d'un vecteur dans une base)**.**
Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose de manière unique sous la forme
$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ où x et y sont deux nombres réels.
On notera $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $(x; y)$ le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

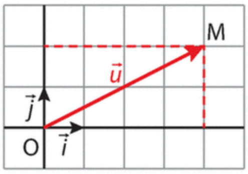
Exemple 38. Dans la base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Définition 57 (Repère orthonormé)**.**
On dira que le triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, composé d'un point O du plan appelé <u>*origine*</u> *et d'une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un* <u>*repère orthonormé du plan*</u>*.*

Remarque 35. *Soit M un point quelconque du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. M a pour coordonnées $(x; y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.*

Exemple 39. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est représenté ci-contre a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc les coordonnées du point M sont $M(4; 2)$.

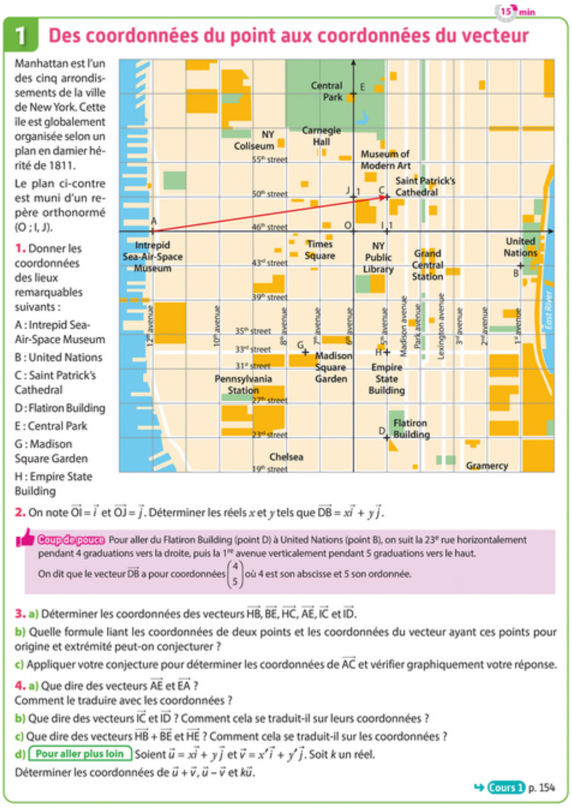


On considère maintenant que l'on est toujours dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Propriété 32 (Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$)**.**
Soient $A(x_a; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple 40. Soient $C(-3; 2)$ et $D(1; 4)$, on applique la règle $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, ainsi, on a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 4-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 41 (Coordonnée par une méthode graphique).



1 Des coordonnées du point aux coordonnées du vecteur

Manhattan est l'un des cinq arrondissements de la ville de New York. Cette île est globalement organisée selon un plan en damier hérité de 1811.

Le plan ci-contre est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).

1. Donner les coordonnées des lieux remarquables suivants :

A : Intrepid Sea-Air-Space Museum
B : United Nations
C : Saint Patrick's Cathedral
D : Flatiron Building
E : Central Park
G : Madison Square Garden
H : Empire State Building

2. On note $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Déterminer les réels x et y tels que $\overrightarrow{DB} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Coup de pouce Pour aller du Flatiron Building (point D) à United Nations (point B), on suit la 23e rue horizontalement pendant 4 graduations vers la droite, puis la 1re avenue verticalement pendant 5 graduations vers le haut.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ où 4 est son abscisse et 5 son ordonnée.

3. a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$.
b) Quelle formule liant les coordonnées de deux points et les coordonnées du vecteur ayant ces points pour origine et extrémité peut-on conjecturer ?
c) Appliquer votre conjecture pour déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et vérifier graphiquement votre réponse.

4. a) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EA}$?
Comment le traduire avec les coordonnées ?
b) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$? Comment cela se traduit-il sur leurs coordonnées ?
c) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HE}$? Comment cela se traduit-il sur les coordonnées ?
d) Pour aller plus loin Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Soit k un réel.
Déterminer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ et $k\vec{u}$.

Cours 1 p. 154

Propriété 33 (Égalité de vecteurs)**.**
Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Propriété 34 (Opérations sur les vecteurs)**.**
Soient k un nombre réel et deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.
- $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

11.2 Milieu et norme

Propriété 35. *Le milieu du segment* $[AB]$ *a pour coordonnée :* $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$

Exemple 42. Soients $A(3;1)$ et $B(-2;5)$, alors I le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnée $I\begin{pmatrix}\frac{-3+(-2)}{2}\\ \frac{-1+5}{2}\end{pmatrix}$ donc $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}$.

Propriété 36 (Norme d'un vecteur)**.**
La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ *est* $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *est* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2}$

Exemple 43. Soients $A(3;-1)$ et $B(-2;5)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\ 6\end{pmatrix}$ et
$AB = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

Remarque 36. *Cette longueur AB est exprimée dans l'unité du repère.*

Méthode 16 (Déterminer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle)**.**
Imaginons que l'on connaisse les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$ *et que l'on cherche à déterminer les coordonnées d'un point* $M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ *tel que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ *il faudra résoudre deux équations associées à chaque coordonnée.*

Exemple 44. Prenons $A\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}$ un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$ et un point $M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ alors on a deux équations $2 = x - 2$ et $5 = y - 1$

11.3 Condition de colinéarité

On rappelle que $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Méthode 17 (Déterminer le parallélisme de deux droites)**.**
Deux vecteurs colinéaires ont des directions parallèles donc si $\overrightarrow{AB}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{CD}$ *alors* $(AB)//(CD)$.

Méthode 18 (Déterminer l'alignement de trois points)**.** *Si* $\overrightarrow{AB}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{AC}$ *alors* A, B, C *sont alignés.*

Définition 58. *Soient* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *deux vecteurs du plan, le* *<u>déterminant</u> des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est* $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy' - x'y$.

Remarque 37. *On écrit aussi* $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Théorème 25. *Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.*

Démonstration. Pour démonter une équivalence, on démontre tout d'abord le sens direct, puis la réciproque.

- Tout d'abord, montrons que si deux vecteurs sont colinéaires, alors leur déterminant est nul.
  On a $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy' - x'y$. On a deux cas :
  - Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = x \times 0 - x' \times y$=0 prouvant ainsi que $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$.
  - Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ alors, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
    Or $k\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}kx'\\ky'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donc $kx' = x$ et $ky' = x$.
    Ainsi $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy' - x'y = kx' \times y' - x' \times ky' = kx'y' - kx'y' = 0$

  Dans tous les cas $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$, le sens direct est démontré.

- Montrons que si $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
  $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$ signifie que $xy' - x'y = 0$ donc $xy' = x'y$.
  - Si $x \neq 0$ alors $y' = \dfrac{x'y}{x} = \dfrac{x'}{x} \times y$.
    Posons $k = \dfrac{x'}{x}$ alors $y' = ky$ et $kx = x'$.
    Or $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ donc $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ montrant que $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
  - Si $x = 0$ alors l'égalité $xy' = x'y$ devient $x'y = 0$.
    * Si $x' = 0$ alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{v} = y'\overrightarrow{j}$ avec $y' \in \mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{j}$ sont colinéaires ; $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{u} = y\overrightarrow{j}$ avec $y \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{j}$ sont colinéaires.
      $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{j}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

* Si $y = 0$ alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Dans tous les cas $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, la réciproque est démontré.

$\square$

Méthode 19. *Ainsi, grâce au théorème, il suffira de calculer le déterminant de deux vecteurs pour savoir s'ils sont colinéaires.*

Chapitre 12

Fonctions de références

12.1 Courbe représentative d'une fonction

12.1.1 Notions de fonction

Commençons par rappeler quelques notions :

Définition 59. *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombre réels. Définir une fonciton f sur $\mathcal{D}$ revient à associer chaque réel x de $\mathcal{D}$ un unique réel, appelé image de x par f. L'antécédent de $f(x)$ étant x.*
$\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction : c'est l'ensemble de nombre pour lesquels il existe une image par la fonction f.

Remarque 38. *$\mathcal{D}$ est souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.*

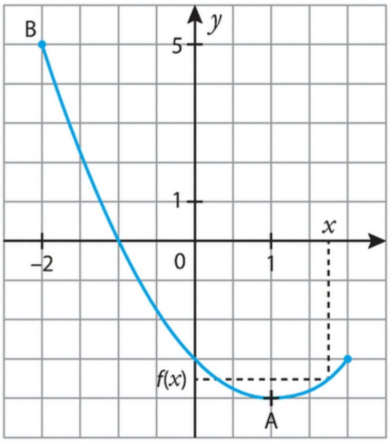
Modéliser par une fonction, c'est mettre en lien deux grandeurs en choisissant une variable (noté en général t, x ou n) dans un ensemble de définition, puis en associant une valeur $f(x)$ à chacune des valeurs par la variable (grâce à une formule, un tableau ou une courbe).

12.1.2 Courbe représentative d'une fonction

Définition 60. *Considérons une fonction f définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$.*
Dans un repère, la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'égalité $y = f(x)$ avec x appartenant à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse.
Cette courbe est la courbe représentative de la fonction f.

Remarque 39. *Le point de cordonnée $(x; y)$ appartient à la courbe représentative si et seulement si $f(x) = y$. La courbe est donc l'ensemble de points $(x; f(x))$ où x parcourt $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f .*

Exemple 45. Considérons la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = (x-1)^2 - 4$. La courbe représentative de la fonction f est la courbe d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ tracée ci-contre. Cela veut dire que tout point de cette courbe a son ordonnée qui est égale à l'image de son abscisse. On trace la courbe représentative de f :



Par exemple, $A(1;-4)$ semble appartenir à la courbe et en effet $f(1) = (1-1)^2 - 4 = -4$.
Le point B a pour abscisse -2 et appartient à la courbe. Son ordonnée vaut donc $f(-2) = (-2-1)^2 - 4 = 5$.

Méthode 20 (Utiliser une équation de la courbe d'une fonction)**.**
Une équation de courbe est une relation vérifiée par les coordonnées des points situées sur cette courbe et uniquement ceux-là : c'est une condition d'appartenance à la courbe.
Prenons une courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ où f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Prenons un point $M(x_M;y_M)$ du plan.

1. *On calcule l'image de l'abscisse du point M x_M par f.*
2. *Deux cas :*
   (a) *Si $y_M = f(x_M)$ alors M appartient à $\mathcal{C}_f$.*
   (b) *Sinon M n'appartient pas à cette courbe.*

Méthode 21 (Tracer la courbe représentative d'une fonction)**.**

1. *On établit le tableau de valeur de la fonction f étudiée grâce au calcul ou à la calculatrice.*
2. *On place dans un repère orthogonal quelques points bien choisis de coordonnées $(x;f(x))$.*

3. *On relie à main levée une courbe passant par ces points.*

Remarque 40. *À la dernière étape, il ne faut pas tracer des segments entre chaque point, mais une courbe lisse.*

12.2 Exemples de fonctions de références

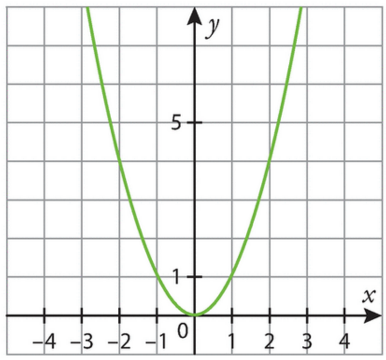
12.2.1 Fonction carré

Définition 61. *La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout nombre réel associe son carré, elle est définie par $f(x) = x^2$.*

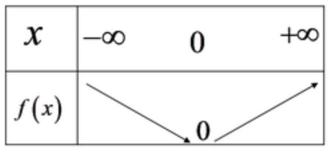
Un tableau de valeurs de la fonction carré est :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.



Sa courbe fait partie d'une famille de courbes appelées « paraboles ».



Exercice 48 (Exercice d'application)**.** *On note f la fonction carré, à l'aide de sa représentation graphique ou d'un calcul, déterminer :*

1. *l'image de 3 par la fonction f.*

2. *les éventuels antécédents de 4 par la fonction f.*

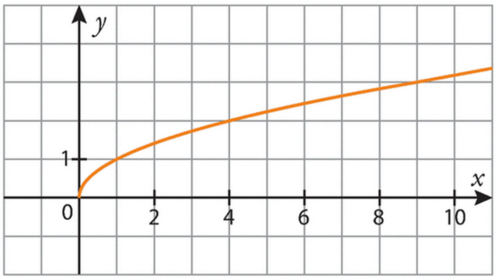
12.2.2 Fonction racine carré

Définition 62. *La fonction racine carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$, qui a tout nombre réel associe sa racine carré positive, elle est définie par $f(x) = \sqrt{x}$.*

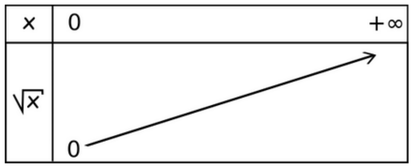
Un tableau de valeurs de la fonction racine carrée est :

x	0	1	2	3	4	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$	2	3

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.



Si $k \geqslant 0$, l'unique antécédent de k par la fonction racine carrée est k^2 et si $k < 0$, k n'a pas d'antécédent.



Remarque 41. *On dit que les fonctions carré et racine carrée sur* $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ *sont réciproques. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie si l'on trace les deux courbes dans un repère.*

Exercice 49. *1. par le calcul, comparer les images par la fonction carré, notée f, de*

(a) 5 et 7

(b) (-6) et (-3).

2. Par le calcul, comparer les images par la fonction racine carré, noté g de

(a) 36 et 64

(b) $\frac{81}{25}$ et $\frac{1}{4}$

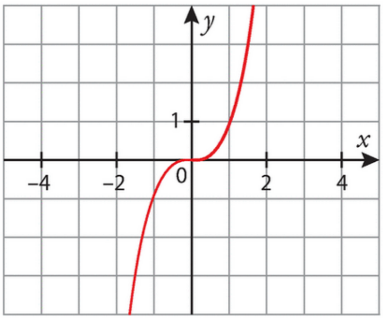
12.2.3 Fonction cubique

Définition 63. *La fonction cubique est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout nombre réel associe son cube, elle est définie par $f(x) = x^3$.*

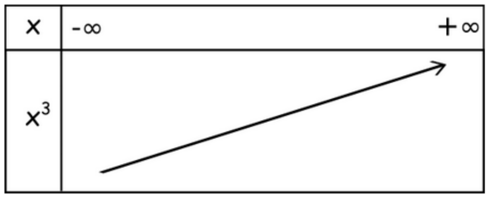
Un tableau de valeurs de la fonction cube est :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.



L'antécédent d'un nombre réel k par la fonction cube est la racine cubique de k : elle se note $\sqrt[3]{k}$. Par exemple $\sqrt[3]{27} = 3$.



Exercice 50 (Exercice d'application)**.** *1. On note f la fonction cube. Déterminer*

(a) L'image de f par 3

(b) les éventuels antécédents par f de 8.

2. Comparer par le calcul les images par f de :

(a) 1 et 4.

(b) (-5) et (-7).

(c) (-2) et 8.

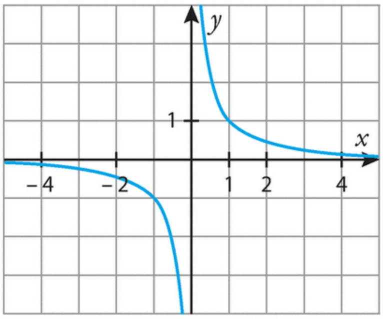
12.2.4 Fonction inverse

Définition 64. *La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty]$, qui a tout nombre réel, non nul, associe son inverse, elle est définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.*

Un tableau de valeurs de la fonction inverse est :

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	-2		2	1	$0{,}5$

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.



Sa courbe fait partie d'une famille de courbes appelées « hyperboles ».

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \frac{1}{x}$	$-$	$\Vert$	$+$

Exercice 51 (Exercice d'application)**.** *1. On note f la fonction inverse. Déterminer :*

(a) l'image par f de $\frac{4}{3}$.

(b) les éventuels antécédents par f de $-\frac{5}{8}$.

2. Comparer par le calcul les images par f de :

(a) 1 et $\frac{3}{2}$.

(b) $(-\frac{4}{5})$ et $(-\frac{2}{7})$.

12.3 Résolution d'équations et d'inéquations à l'aide d'une fonction

12.3.1 Cas général

Commençons par étudier une fonction f définie sur un intervalle I, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Propriété 37.

1. *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = k$.*

2. *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leq k$ revient à déterminer les abscisses des points appartenant à C_f et situés en dessous de la droite d'équation $y = k$.*

3. *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leq k$ revient à déterminer les abscisses des points appartenant à C_f et situés au-dessus de la droite d'équation $y = k$.*

12.3.2 Illustration avec la fonction carré

Résolution d'équation avec la fonction carré

Propriété 38 (Résolution algébrique des équations $x^2 = k$)**.**
L'équation $x^2 = k$ admet :

- *deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$ lorsque $k > 0$.*
- *une unique solution égale à 0 lorsque $k = 0$.*
- *aucune solution lorsque $k < 0$.*

On rappelle que la fonction $f(x) = x^2$ admet une parabole $\mathcal{P}$ comme courbe représentative.

Méthode 22 (Résolution graphique de l'équation $x^2 = k$)**.**
Résoudre l'équation $x^2 = k$ revient à chercher les abscisses des points d'intersections entre $\mathcal{P}$ et la droite horizontale (d) d'équation $y = k$.

Exercice 52 (Résoudre des équations avec la fonction carré)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 = 15$
2. $x^2 = 0.$
3. $2x^2 + 3 = 0$

Correction 13. On applique directement la propriété :

1. $\mathcal{S} = \{\sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$.
2. $\mathcal{S} = \{0\}$.
3. $2x^2 + 3 = 0 \iff x^2 = -\frac{3}{2} < 0$ donc il n'y a aucune solution $\mathcal{S} = \emptyset$

Résolution d'inéquation avec la fonction carré

Propriété 39 (Résolution d'inéquation $x^2 \leq k$)**.**
Commençons par l'inéquation $x^2 \leq k$:

- *Si $k > 0$, il existe deux solutions à l'équation $x^2 = k$, $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$.*
- *Si $k = 0$, alors $\mathcal{S} = \{0\}$.*
- *Si $k < 0$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.*

Propriété 40 (Résolution d'inéquation $x^2 \geq k$)**.**
Maintenant, intéressons l'inéquation $x^2 \leq k$:

- *Si $k > 0$, il existe deux solutions à l'équation $x^2 = k$, $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$.*
- *Si $k \leq 0$, comme le carré de tout nombre réel est positif, on a $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.*

Méthode 23 (Résolution graphique de l'équation $x^2 \leq k$)**.**
Résoudre l'inéquation $x^2 \leq k$ revient à chercher les points de $\mathcal{P}$ situés sous la droite (d).

Méthode 24 (Résolution graphique de l'équation $x^2 \geq k$)**.**
Résoudre l'inéquation $x^2 \leq k$ revient à chercher les points de $\mathcal{P}$ situés au-dessus de la droite (d).

Exercice 53. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1. $x^2 \leq 6$.

2. $2x^2 + 1 \geq 9$.

Correction 14.
1. L'inéquation est de la forme $x^2 \leq k$ avec $k \geq 0$. On a donc $\mathcal{S} = [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$.
2. On a $2x^2 + 1 \geq 9 \iff 2x^2 \geq 8 \iff x^2 \geq 4$. Ainsi, on trouve $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

Cas des polynômes du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré avec $a \neq 0$. La courbe représentative de f est une parabole $\mathbb{P}$.

Remarque 42. *Dans le cas $a = 1$ et $b = c = 0$, on retrouve la fonction carré.*

Méthode 25 (Résolution graphique de l'équation $f(x) \leq 0$)**.**
Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$ revient à chercher les points de $\mathcal{P}$ situés sous l'axe des abscisses. Dans ce cas, il existe deux points d'intersections x_1 et x_2 (qui peuvent être confondues) et $\mathcal{S} = [x_1; x_2]$.
Dans le cas où $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses, on a deux cas :

- *Si $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, on a $\mathcal{S} = \emptyset$.*
- *Si $\mathcal{P}$ est en dessous de l'axe des abscisses, on a $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.*

Méthode 26 (Résolution graphique de l'équation $f(x) \geq 0$)**.**
Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ revient à chercher les points de $\mathcal{P}$ situés au-dessus l'axe des abscisses. Dans ce cas, il existe deux points d'intersections x_1 et x_2 (qui peuvent être confondues) et $\mathcal{S} =]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$.
Dans le cas où $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses, on a deux cas :

- *Si $\mathcal{P}$ est en dessous de l'axe des abscisses, on a $\mathcal{S} = \emptyset$.*
- *Si $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, on a $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.*

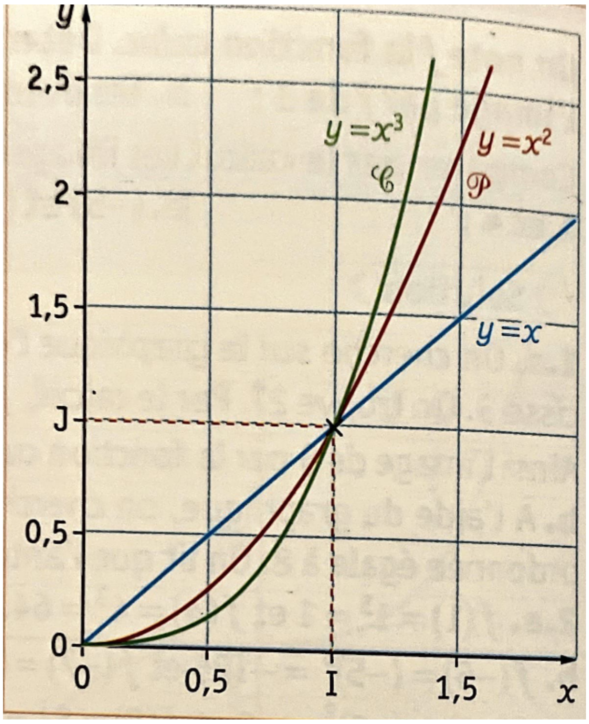
Exercice 54. *Résoudre l'inéquation $-x^2 - 2x + 1 \geq 0$.*

Correction 15. On pose $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ et on trace la courbe représentative de f. Les solutions de $f(x) \geq 0$ sont les abscisses des points de la courbe qui sont au-dessus de l'axe des abscisses. On lit $x_1 = -2,4$ et $x_2 = 0,4$ donc $\mathcal{S} = [0,4; -2,4]$.

12.4 Position relative des courbes des fonctions de références

Dans ce paragraphe, on étudie sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ la position relative des courbes suivantes :

- La droite (d) d'équation $y = x$;
- La parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction carré d'équation $y = x^2$.
- La cubique $\mathcal{C}$ représentative de la fonction cube d'équation $y = x^3$ pour $x \geq 0$.



Théorème 26. *Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. *Si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$.*
2. *Si $x \geq 1$ alors $1 \leq x \leq x^2 \leq x^3$.*

Démonstration. Pour commencer, on a $1 = 1^2 = 1^3$ donc le point de coordonnées $(1; 1)$ appartient donc à la droite (d), à la parabole $\mathcal{P}$ et à la courbe $\mathcal{C}$.

1. Supposons $0 \leq x \leq 1$, en multipliant chaque membre de cette inégalité par x (qui est positif donc le sens des inégalités ne changent pas), on obtient : $0 \leq x^2 \leq x$. Par le même procédé, on obtient $0 \leq x^3 \leq x^2$. Ainsi, pour tout réel x appartenant $[0; 1]$, on a $0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$.

2. Supposons $x \geq 1$, en multipliant les deux membres de cette inégalité par x (qui est positif donc le sens de l'inégalité ne changent pas), on obtient $x \leq x^2$. Par le même argument, on a $x^2 \leq x^3$.
   Ainsi, pour tout réel $x \geq 1$, on a $1 \leq x \leq x^2 \leq x^3$.

□

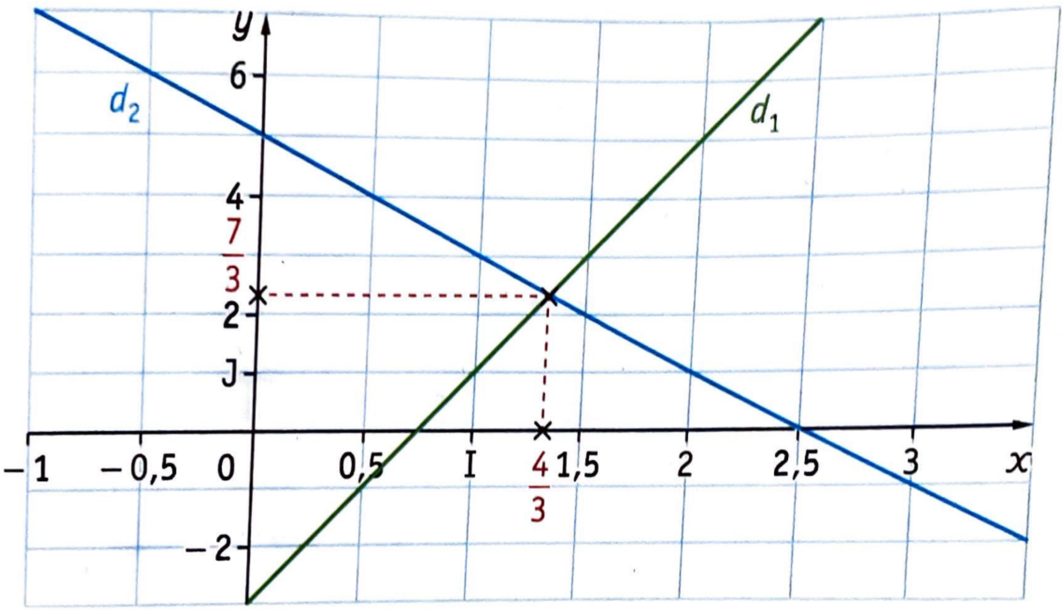
Remarque 43. *Deux remarques :*

- *Sur l'intervalle* $[0;1]$*, la cubique* $\mathcal{C}$ *est au-dessous de la parabole* $\mathcal{P}$ *qui est en dessous de la droite* (d)*.*
- *Sur l'intervalle* $[1;+\infty[$*, la droite* (d) *est en dessous de la parabole* $\mathcal{P}$ *qui est-elle même située en dessous de la cubique* $\mathcal{C}$*.*

Méthode 27 (Étudier la position relative de deux courbes représentatives)**.**
Notre but est de pouvoir situer la position des courbes représentatives de deux fonctions f *et* g *: Se coupent-elles ? Sont-elles confondues ? y'en a-t-il une au-dessus de l'autre ?*
Pour cela on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$ *:*

- *Si elle est positive,* $\mathcal{C}_f$ *est au-dessus de* $\mathcal{C}_g$*.*
- *Si elle est négative,* $\mathcal{C}_g$ *est au-dessus de* $\mathcal{C}_f$*.*
- *Si elle est nulle,* $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *sont confondues.*

Exemple 46. Considérons deux fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x - 3$ et $g(x) = -2x + 5$, notons (d_1) et (d_2) leurs droites représentatives dans un repère du plan.



Prenons M et M' deux points ayant même abscisse, appartenant respectivement à (d_1) et (d_2), c'est-à-dire $M(x; 4x-3)$ et $M'(x, 2x+5)$.
Calculons $f(x) - g(x) = (4x-3) - (-2x+5) = 4x - 3 + 2x - 5 = 6x - 8$.
On a $6x - 8 \geq 0 \iff 6x \geq 8 \iff x \geq \frac{8}{6} \iff x \geq \frac{4}{3}$.
En conclusion, on a :

- Si $x \geq \frac{4}{3}$ alors $f(x) \geq g(x)$ donc (d_1) est au-dessus de (d_2).
- Si $x = \frac{4}{3}$ alors $f(x) = g(x)$ donc (d_1) et (d_2) sont confondues.
- Si $x \leq \frac{4}{3}$ alors $f(x) \leq g(x)$ donc (d_1) est en dessous de (d_2).

12.5 Parité d'une fonction

Définition 65 (Fonction paire)**.**
Une fonction f, d'ensemble de définition $\mathcal{D}$, est paire si pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$, on a $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = f(x)$.

Propriété 41. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Démonstration. Considérons un point de la courbe, il est donc de coordonnée $(x : f(x))$.
On veut montrer que son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées qui a pour coordonnées $(-x; f(x))$ appartient aussi à la courbe de f.
Du fait que la fonction f est paire, $-x$ appartient à l'ensemble de définition et comme $f(-x) = f(x)$ pour tout x, le point de coordonnées $(-x; f(-x))$ a la même ordonnée que $(x : f(x))$ et comme son ordonné est égale à l'image de son abscisse, on vient de prouver que $(-x; f(x))$ appartient à la courbe de f. □

Méthode 28 (Conjecturer la parité d'une fonction)**.**
Si une courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut conjecturer que la fonction est paire.

Propriété 42 (Parité de la fonction carré)**.**
La fonction carré est paire.

Démonstration. Considérons la fonciton f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout réel x donc la fonction carré est paire. □

Remarque 44. *On en déduit que la courbe de la fonction carré est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Définition 66. *Une fonction f, d'ensemble de définition $\mathcal{D}$, est impaire si pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$, on a $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = -f(x)$.*

Propriété 43 (Parité des fonctions cubes et inverse)**.**
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Méthode 29 (Conjecturer l'imparité d'une fonction)**.**
Si une courbe semble symétrique par rapport à l'origine du repère, on peut conjecturer que la fonction est impaire.

Propriété 44. *Les fonctions cube et inverse sont impaires.*

Remarque 45. *On en déduit que les courbes des fonctions inverse et cube sont symétriques par rapport à l'origine.*

Chapitre 13

Équations de droites

Dans toute cette séquence, on se place dans un repère orthonormé.

13.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 67 (Vecteur directeur)**.**
Soient A et B deux points distincts d'une droite (d), alors $\overrightarrow{AB}$ est un <u>vecteur directeur</u> de la droite (d), de même que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 47. Soient $A(3;1)$ et $B(1;2)$, alors $\overrightarrow{AB}\binom{-2}{1}$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\binom{2}{-1}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB) car les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarque 46. *Il existe une infinité de vecteurs directeurs d'une droite donnée, ces vecteurs ont tous la même direction et sont colinéaires entre eux.*

Méthode 30 (Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite)**.**
On se place dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On sélectionne deux points $A(x_A;x_B)$ et $B(x_B,y_B)$ appartenant à la droite (d), puis on décompose le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Théorème 27. *Soit un point A du plan et un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, il existe une unique droite du plan passant par A et ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.*

Prenons A et B deux points distincts du plan, un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si A, B, M sont alignés, donc si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Théorème 28. *Soit* (d) *une droite du plan, un point* $A \in (d)$ *et un vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$ *de* (d).
Un point M *du plan appartient à* (d) *si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *sont colinéaires, c'est-à-dire* $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$

13.2 Équation cartésienne d'une droite

Propriété 45 (Équation cartésienne d'une droite)**.**
Soient a et b deux réels et (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$. Un point appartient à (d) si et seulement ses coordonnées $(x;y)$ vérifient l'égalité $ax+by+c=0$ appelée <u>*équation cartésienne*</u> *de la droite (d) avec c une constante réelle.*

Démonstration. Soient $A(x_A, y_A)$ un point donné de la droite vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$ et $M(x;y)$ un point quelconque, $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$ donc :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) &= a(x-x_A)-(-b)(y-y_A)\\ &= ax-ax_A+by-by_A\\ &= ax+by+(-ax_A-by_A).\end{aligned}$$

Le point $M(x;y)$ appartient à cette droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
On a donc $ax+by+(ax_A-by_A)=0$ est bien de la forme $ax+by+c=0$. □

Remarque 47.

1. *Si $a=0$ alors $\overrightarrow{u}\binom{-b}{0}$ donc la droite est horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses et de son équation cartésienne est de la forme $y+c=0$.*
2. *Si $b=0$ alors $\overrightarrow{u}\binom{0}{a}$ donc la droite est verticale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des ordonnées, et son équation cartésienne est de la forme $x+c=0$.*
3. *Une droite possède plusieurs équations cartésiennes, il suffit de multiplier tous les coefficients par un même réel.*

Méthode 31 (Déterminer une équation cartésienne d'une droite par le calcul)**.**
Prenons un point $A(-1;2)$, un vecteur $\overrightarrow{u}\binom{1}{4}$ et déterminons l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par A.
On aura deux méthodes :

1. *Comme $\overrightarrow{u}\binom{2}{-1}$ alors $a=4$ et $b=-1$, ainsi une équation cartésienne de la droite est de la forme $4x-y+c=0$.*
   Du fait que $A(-1;2)$ appartient à cette droite, on a l'égalité $4\times(-1)-2+c=0$ donc $c=6$, une équation cartésienne est $4x-y+6=0$.
2. *Prenons $M(x;y)$ un point de la droite, alors on a $\overrightarrow{AM}\binom{x+1}{y-2}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. On rappelle que le déterminant de deux vecteurs colinéaires*

est nul donc, on a :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 &\iff 4(x+1) - 1(y-2) = 0 \\ &\iff 4x + 4 - y + 2 = 0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne est donc $4x - y + 6 = 0$.

Propriété 46. *Soient a, b et c trois réels avec $(a;b) \neq (0;0)$.*
L'ensemble d'équation $ax+by+c=0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$.

Exemple 48. Le point $A(-2;1)$ appartient à la droite (d) dont une équation cartésienne est $3x+2y+4=0$ car $3x_A+2y_A+4 = 3\times(-2)+2\times 1+4 = 0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation.
Le point $B(2;-1)$ n'appartient pas à (d) car :
$3x_B + 2y_B + 4 = 3\times 2 + 2\times(-1) + 4 = 8 \neq 0$ donc ses coordonnées ne vérifient pas l'équation et $B \notin (d)$.

Méthode 32 (Représenter une droite par son équation cartésienne)**.**
Représentons la droite qui a pour équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$.

On aura deux méthodes :

1. *Avec les coordonnées de deux points, prenons A d'abscisse $x_A = 1$. Alors ses coordonnées vérifient l'équation :*

$$\begin{aligned}2x_A - 3y_A + 1 = 0 &\iff 2\times 1 - 3y_A + 1 = 0 \\ &\iff 3 - 3y_A = 0 \\ &\iff y_A = 1\end{aligned}$$

   Donc $A(1;1)$.
   Les coordonnées du point B d'ordonnée $y_B = 3$ vérifient :

$$\begin{aligned}&2x_B - 3y_B + 1 = 0 \\ &\iff 2x_B - 3\times 3 + 1 = 0 \\ &\iff 2x_B - 8 = 0 \\ &\iff x_B = 4\end{aligned}$$

   Donc, on a $B(4;3)$, puis, on trace ensuite la droite (AB).

2. *À partir d'un point et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{3}{2}$. Donc à partir du point $A(1;1)$ appartenant à la droite on peut tracer un représentant de vecteur $\overrightarrow{u}$. On trace ensuite la droite.*

13.3 Équation réduite d'une droite

Propriété 47 (Équation réduite de droite)**.**

- *Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m s'appelle le coefficient directeur (ou la pente) et p est l'ordonnée à l'origine.*
- *Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$.*

Démonstration. Étant donné une droite d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$.

1. Si $b = 0$ alors l'équation s'écrit $x = -\frac{c}{a}$.
2. Sinon, on a $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ où $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

□

Remarque 48. *Toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes, mais une unique équation réduite.*

Méthode 33 (Représenter une droite donnée par son équation réduite)**.**

Propriété 48. *La représentation graphique d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx+^p$ est une droite d'équation $y = mx + p$ et inversement toute droite parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.*

Propriété 49. *Considérons une droite d'équation réduite $y = mx + p$.*

- *Le vecteur de coordonnées $\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de cette droite.*
- *Le point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0;p)$.*

Remarque 49. *C'est pour cela que p est appelé l'ordonnée à l'origine.*

Démonstration.

- $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$ donc un vecteur directeur est le vecteur de coordonnée$\binom{1}{m}$.
- Si $x = 0$ alors $y = p$ et le point de coordonnées $(0;p)$ est sur l'axe des ordonnées.

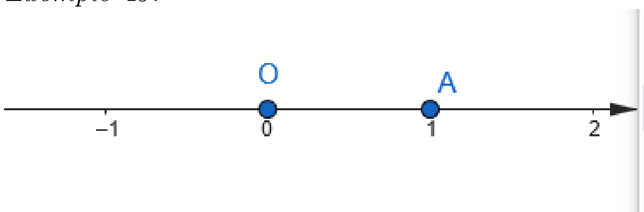
□

Méthode 34 (Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite)**.**

1. *On lit l'ordonnée à l'origine qui est le point* $(0; p)$*.*

2. *On prend deux points pour obtenir un vecteur directeur de la droite. Si son abscisse est 1, on lit* m*, sinon on cherche un vecteur colinéaire d'abscisse 1.*

Exemple 49.



Comme les droites d_1 et d_2 ne sont parallèles à l'axe des ordonnées, leur équation est de la forme $y = mx + p$.

1. La droite d_1 passe par le point $A(0; 2)$ donc $p = 2$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\binom{1}{-2}$ donne $m = -2$.
   L'équation réduite de (d_1) est $y = -2x + 2$.

2. la droite d_2 passe par le point $C(0; 1)$ donc $p = 1$. Le vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\binom{4}{1}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}\binom{1}{\frac{1}{4}}$ donc $m = \frac{1}{4}$.
   L'équation réduite de d_2 est donc $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Méthode 35 (Déterminer l'équation réduite d'une droite par le calcul)**.**
On a plusieurs étapes :

1. *On vérifie si les deux points ont la même abscisse.*

2. *On calcule le coefficient directeur.*

3. *On utilise un des deux points pour trouver l'ordonnée à l'origine*

Exemple 50. Déterminons l'équation réduite de la droite (AB) avec $A(-1; -1)$ et $B(1; 3)$.
Comme $x_A \neq x_B$, on calcule le coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-1)}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$

Exemple 51. Déterminons l'équation réduite de la droite (CD) avec $C(-2; 3)$ et $D(-2; 1)$.
Comme $x_C = x_D = -2$, on a $x = -2$ comme équation réduite de la droite (CD).

Méthode 36 (Déterminer l'équation réduite à partir d'une équation cartésienne)**.**
On part d'une équation cartésienne $ax+by+c=0$ d'une droite, et on désire déterminer son équation réduite sous la forme $y=mx+p$ ou $x=k$.

1. *Si $b \neq 0$, on exprime y en fonction du reste de l'expression.*

2. *Si $b=0$, on exprime l'inconnue x en fonction du reste de l'expression.*

Exemple 52. Déterminons l'équation réduite de (d) : $-42x+7y-28=0$, on a $b=7\neq 0$ donc on exprime y en fonction des autres termes :
$-42x+7y-28=0 \iff 7y=42x+28 \iff y=\frac{42}{7}x+\frac{28}{7} \iff y=6x+4$.

Remarque 50. *Ici $m=6$ et $p=4$ donc on sait que $\overrightarrow{u}\binom{1}{6}$ est un vecteur directeur et que cette droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0;4)$.*

Exemple 53. Déterminons l'équation réduite de $5x+45=0$:
on a $x=\frac{-45}{5}=-9$ donc la droite d'équation $x=-9$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

13.4 Positions relatives de deux droites

13.4.1 Droites parallèles et sécantes

Théorème 29. *Soient (d) et (d') deux droites du plan, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs respectifs.*

1. *Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si* $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

2. *Les droites (d) et (d') sont sécantes si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si* $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$.

13.4.2 Positions relatives

Propriété 50. *Deux droites sont parallèles, éventuellement confondues, si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre. Dans le cas contraire, les deux droites sont sécantes.*

Propriété 51. *Les droites (d) et (d') d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si a et b sont respectivement proportionnels à a' et b'.*
Si, de plus, c et c' sont également proportionnels, alors elles sont confondues.

Démonstration. Les vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{-b'}{a'}$ sont des vecteurs directeurs des deux droites (d) et (d').
Elles sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si :
$\det(\rightarrow, \overrightarrow{u'}) = -a'b - (ab') = 0 \iff ab' - ba' = 0 \iff ab' = ba' \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. $\square$

Propriété 52.

- *Les droites (d) et (d') d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Si, de plus, $p = p'$ alors elles sont confondues.*

- *Les droites (d) et (d'), d'équations réduites $x = k$ et $x = k'$ sont toujours parallèles (confondues si $k = k'$)*

- *Les droites (d) et (d'), d'équations réduites $y = mx + p$ et $x = k$ sont toujours sécantes.*

Démonstration du premier point.
Pour les équations réduites les vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u}\binom{1}{m}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{1}{m'}$ ce qui donne :
$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = 1 \times m' - 1 \times m = 0 \iff m = m'$ $\square$

Méthode 37 (Étudier la position relative de deux droites)**.**
Prenons deux droites $(d) : ax + by + c = 0$ *et* $(d') : a'x + b'y + c' = 0$.
Déterminons la position relative de ces deux droites.
On a deux méthodes :

1. *On vérifie si* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$*. Si on a égalité, alors les droites sont parallèles sinon elles sont sécantes*

2. *Sinon, on détermine un vecteur directeur pour chaque droite et on calcule le déterminant pour savoir si les droites sont sécantes ou non.*

Exemple 54. Prenons deux droites $(d) : 4x-3y+1 = 0$ et $(d') : -2x+y+3 = 0$.
Déterminons la position relative de ces deux droites.

On a deux méthodes :

1. Ici on a $a = 4$, $a' = -2$, $b = -3$ et $b' = 1$. Comme $\frac{4}{-2} \neq \frac{-3}{1}$, il n'y a pas de proportionnalité donc les droites sont sécantes en un point.

2. Un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{u}\binom{3}{4}$ tandis qu'un vecteur directeur de (d') est $\overrightarrow{v}\binom{-1}{-2}$.
Calculons le déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3 \times (-2) - 4 \times (-1) = -2 \neq 0$.
Ainsi, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes.

13.5 Système de deux équations à deux inconnues

Définition 68 (Système de deux équations à deux inconnues)**.**
On dit qu'un couple $(x;y)$ *vérifie le* <u>*système d'équation à deux inconnues*</u> $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right.$ *où* a, a', b, b', c, c' *sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations.*

Remarque 51.

1. *Résoudre un système d'équation revient à déterminer l'ensemble solution* S *constitué de tous les couples de réels* $(x;y)$ *vérifiant les deux équations.*
2. *Deux systèmes d'équations sont dits équivalents, s'ils partagent le même ensemble solution.*

13.5.1 Résolution graphique

Théorème 30. *Résoudre graphiquement le système d'équation* $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right.$ *équivaut à déterminer l'ensemble des couples de réels* $(x;y)$ *tel que les points* $M(x;y)$ *appartiennent à la fois a la droite* $(d) : ax+by+c=0$ *et à la droite* $(d') : a'x+b'y+c'=0$

Donnons une interprétation géométrique à nos systèmes d'équations :

Théorème 31. *Un système d'équation à deux inconnues admet :*

1. *une infinité de solutions lorsque les droites* (d) *et* (d') *sont confondues.*
2. *aucun couple solution lorsque les droites* (d) *et* (d') *sont parallèles et non confondues.*
3. *un unique couple solution lorsque les droites* (d) *et* (d') *sont sécantes.*

Exemple 55. L'ensemble solution du système suivant $\left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 2 \\ 2x-2y & = & -4 \end{array}\right.$ est le couple $S_1 = \{(x; 2+x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 56. L'ensemble solution du système suivant $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+7y & = & 15 \\ -2x+7y & = & -3 \end{array}\right.$ est le couple $S_2 = \emptyset$.

Exemple 57. L'ensemble solution du système suivant $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-8 & = & 0 \\ 2x-3y+4 & = & 0 \end{array}\right.$ est le couple $S_3 = \{(1;2)\}$.

13.5.2 Résolution algébrique

Par substitution

Propriété 53 (Résolution par substitution)**.**
Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Méthode 38. *1. On repère le nombre de solutions.*

2. on repère un x ou un y isolé.

3. On remplace cette inconnue dans la seconde équation.

4. On obtient une équation avec une seule inconnue que l'on résout.

5. On remplace à nouveau.

Exemple 58. Résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-3y+1 & = & 0 \\ -2x+y+3 & = & 0 \end{array}\right.$

Comme $\frac{4}{-2} \neq \frac{-3}{1}$ alors les deux droites d'équations $4x-3y+1=0$ et $-2x+y+3=0$ sont sécantes et le système n'admet qu'une seule solution.
On siole y dans la seconde équation ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x-3y+1 & = & 0 \\ y & = & 2x-3 \end{array}\right.$$

On remplace y par $2x-3$ dans la première équation donc on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x-3(2x-3)+1 & = & 0 \\ y & = & 2x-3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+10 & = & 0 \\ y & = & 2x-3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 \\ y & = & 2\times 5-3=7 \end{array}\right.$$

Donc la solution est le point de coordonnée $(5;7)$.

Remarque 52. *L'inconvénient de cette méthode est qu'en cas d'erreur sur la première équation, la seconde sera fausse.*

Par combinaison linéaire

Propriété 54 (Résolution par combinaison linéaire)**.**
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine.
Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la seconde inconnue, on peut renouveler la même méthode pour éviter l'inconvénient de la méthode précédente.

Méthode 39. *1. On détermine le nombre de solutions.*

2. On observe par quelles valeurs multiplier les équations afin d'éliminer une inconnue en les additionnant.

3. On fait de même pour l'autre inconnue.

4. On peut aussi remplacer la première inconnue trouvée dans une des deux équations pour trouver l'autre inconnue.

Exemple 59. Résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+1 & = & 0(L_1) \\ -2x+4y & = & 3(L_2) \end{array}\right.$

Pour les droites (d) et (d') d'équations $3x-2y+1=0$ et $-2x+4y=3$ on constate que $\frac{3}{-2} \neq \frac{-2}{4}$ donc comme les constantes ne sont pas proportionnelles alors les deux droites sont sécantes et le système admet une unique solution.

Pour éliminer l'inconnue x, on calcule $2L_1+3L_2$ ce qui nous donne $2(3x-2y+1)+3(-2x+4y)=2\times 0+3\times 3 \iff 8y+2=9 \iff y=\frac{7}{8}$.

De même, pour éliminer l'inconnue y, on calcule $2L_1+L_2$ ce qui donne $2(3x-2y+1)+(-2x+4y)=2\times 0+3 \iff 4x+2=3 \iff x=\frac{1}{4}$.

Donc la solution est le point de coordonnée $(\frac{1}{4};\frac{7}{8})$.

Chapitre 14

Variations et signe d'une fonction

Chapitre 15

Fiche Exercices

15.1 Ensemble de nombres

15.1.1 Fiche d'exercice 1

Exercice 55. *Développer puis réduire.*

1. $A = (x-2)^2$
2. $B = (x+2)^2$
3. $C = (x+1)(x-4) + (x+3)(x-1)$
4. $D = (x+1)^2 - (x-3)(x-5)$

Correction 16.
Dans tout l'exercice, il fallait utiliser la double distributivité que l'on rappelle :

Propriété 55 (Simple et double distributivité).
Pour tous réels $k, a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $k(a+b) = ka + kb.$
- $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

Et se souvenir, par exemple, que $(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$.

1. $A = x^2 - 4x + 4.$
2. $B = x^2 + 4x + 4.$
3. $C = 2x^2 + 7x + 1.$
4. $D = 10x - 14$

Exercice 56. *Factoriser.*

1. $A = x^2 - 10x$
2. $B = (x-5)(x+2) + (x-5)(x-7)$
3. $C = (x+3)(x-2) - (x-2)(2x+1)$
4. $D = 2x(x+3) + x(x+3)(x+2)$
5. $E = x^2 - 9$

Correction 17.
La factorisation est le processus inverse du développement. Pour le dernier il fallait se souvenir de :

Propriété 56 (Identité remarquable).
Pour deux réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Le facteur commun est souligné.

1. $A = \underline{x}^2 - 10\underline{x} = x(x-10)$.
2. $B = \underline{(x-5)}(x+2) + \underline{(x-5)}(x-7) = (x-5)(2x-5)$.
3. $C = (x+3)\underline{(x-2)} - \underline{(x-2)}(2x+1) = (x-2)(-x+2)$.
4. $D = 2\underline{x(x+3)} + \underline{x(x+3)}(x+2) = x(x+3)(x+4)$.
5. $E = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

Exercice 57 (Le coup du 1)**.**

$A = (x+4)(x-3) + (x+4)(x-1) + x + 4$.
Alice a obtenu la factorisation suivante : $A = (x+4)(2x-4)$.

1. (a) *Calculer les deux expressions de A pour $x = 0$.*
   Que peut-on conclure ?
   (b) *Kenza commence à factoriser A en écrivant :*
   $A = (x+4)(x-3) + (x+4)(x-1) + (x+4) \times 1$.
   Poursuivre le travail de Kenza afin de factoriser A.
2. *Factoriser :*
   (a) $B = (2x-1)(x+3) + 2x - 1$
   (b) $C = (x+1)^2 + (x+1)(x-2) + x + 1$
3. *Démontrer que pour tout nombre réel x, on a :*
   $(x+6)(x+7) = (x+6)^2 + x + 6$.

Correction 18.

1. (a) Pour $x = 0$ en utilisant l'expression donnée par l'énoncé, on trouve :

$$\begin{aligned} A &= (0+4)(0-3)+(0+4)(0-1)+0+4 \\ &= 4\times(-3)+4\times(-1)+4 \\ &= -12-4+4 \\ &= -12. \end{aligned}$$

Avec celle d'Alice, on a $A = (0+4)(2\times 0-4) = 4\times(-4) = -16$. Comme les deux expressions ne sont pas égales pour une même valeur de x, on peut conclure qu'Alice a fait une erreur dans sa factorisation.

   (b) On a :

$$\begin{aligned} A &= \underline{(x+4)}(x-3)+\underline{(x+4)}(x-1)+\underline{(x+4)}\times 1. \\ &= (x+4)(x-3+x-1+1) \\ &= (x+4)(2x-3). \end{aligned}$$

2. Ici, il fallait appliquer la technique de Kenza aux deux items :

   (a) $B = (2x-1)(x+3)+(2x-1)\times 1 = (2x-1)(x+4)$

   (b) Ici le calcul est juste un peu plus long :

$$\begin{aligned} C &= \underline{(x+1)}(x+1)+\underline{(x+1)}(x-2)+\underline{(x+1)}\times 1 \\ &= (x+1)(x+1+x-2+1) \\ &= (x+1)\times 2x. \end{aligned}$$

3. On applique encore la même technique mais cette fois il fallait partir du membre de droite :

$$\begin{aligned} (x+6)^2+x+6 &= \underline{(x+6)}(x+6)+\underline{(x+6)}\times 1 \\ &= (x+6)(x+7) \end{aligned}$$

Exercice 58 (Le coup du -1)**.**
On souhaite factoriser l'expression :
$A = (2x-1)(x+2)-2x+1$ *qui ne semble pas avoir de facteur commun.*

1. (a) Recopier et compléter :
$A = (2x+1)(x+2)+(-1)\times(\dots - \dots)$

(b) *En déduire une factorisation de A.*

2. *Factoriser*

   (a) $B = (x-2)(x+1) - x + 2$

   (b) $C = (x-3)^2 - x + 3$

Correction 19.
L'énoncé comportait une erreur, au 1.(a) il fallait compléter :
$A = (2x-1)(x+2) + (-1) \times (\dots - \dots)$
au lieu de $A = (2x+1)(x+2) + (-1) \times (\dots - \dots)$.
Cet exercice est très similaire au précédent sauf qu'ici au lieu de « jouer » avec 1, on le fait avec -1 et qu'il faut faire attention aux signes $\pm$.

1. (a) Avec le bon énoncé, il fallait remarquer que $(-2x+1) \times (-1) = 2x - 1$, ainsi on a :

$$A = (2x-1)(x+2) + (-1) \times (2x-1)$$

   (b) De ce fait, on a un facteur commun qui est $(2x-1)$ donc on a : $A = (2x-1)(x+2-1) = (2x-1)(x+1)$.

2. En appliquant, la même technique qu'à la question précédente, on a :

   (a) $B = \underline{(x-2)}(x+1) + \underline{(x-2)} \times (-1) = (x-2)(x+1-1) = x(x-2)$.

   (b) $C = \underline{(x-3)}(x-3) + (-1) \times \underline{(x-3)} = (x-3)(x-3-1) = (x-3)(x-4)$.

15.1.2 Séance d'exercice en groupe

Développement/réduction

Exercice 59. $A(x) = (x-3)(x+3) - 2(x-3)$.

1. *Factoriser $A(x)$.*

2. *Développer puis réduire $A(x)$*

3. *En choisissant la bonne écriture de A, calculer $A(-1)$ et $A(0)$.*

Exercice 60. *Développer puis réduire.*

1. $A = (5x-3)(2x-7) - (2x+1)(5-3x)$

2. $B = (2-3x)(5-2x) - 4(3x-1)(x+2)$

3. $C = (3x+1)(x+4) - (2x+5)(x-4)$

4. $D = (x+3)(x-2) - (x-3)(x+2)$

Factorisation

Exercice 61. *Factoriser.*

1. $A = 2(3x-1)(x+3) - 3(x+3)(4x+1)$
2. $B = (5x-2) + 4(2x+1)(5x-2)$
3. $C = (7x-2)(x-9) + 14x - x$
4. $D = (5x-1)(2x+3) - 5x + 1$

Calcul Fractionnaire

Exercice 62. *Calculer.*

1. $A = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{8}$.
2. $B = \dfrac{5}{18} \times (\dfrac{6}{15} + \dfrac{5}{15})$
3. $C = \dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}$
4. $D = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{6}$

Exercice 63. *Calculer.*

1. $A = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{4}}$
2. $B = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}$
3. $C = 5 - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{2}$
4. $D = \dfrac{3,9 \times (10^{-2})^2}{3 \times 10^{-5}}$

15.2 Équations produits

Exercice 64. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$, $(2x-1)(3-5x)=0$.

Correction 20.

$$(2x-1)(3-5x)=0$$

Un produit de facteur est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$$\iff 2x-1=0 \text{ ou } 3-5x=0$$
$$\iff x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=\frac{3}{5}.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S}=\{\frac{1}{2};\frac{3}{5}\}$.

Exercice 65. *Le but est de résoudre, dans* $\mathbb{R}$, *l'équation :*
(E) : $(x+1)(2x+4)-(x-7)(x+1)=0$.

1. *Factoriser l'équation* (E).
2. *Avec l'expression obtenue, résoudre* (E).

Correction 21.

1. $(x+1)(x+11)=0$.
2. $$(x+1)(x+11)=0.$$
   Un produit de facteur est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.
   $$\iff x+1=0 \text{ ou } x+11=0$$
   $$\iff x=-1 \text{ ou } x=-11.$$
   L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S}=\{-11,-1\}$.

Exercice 66. *Soit* $A(x)=x^2-25+(x+5)(4-3x)$.

1. *Développer puis réduire* $A(x)$.
2. *Factoriser* $A(x)$
   (Indication : Commencer par factoriser x^2-25 *puis factoriser* $A(x)$*).*
3. *En choisissant l'expression appropriée de* A, *résoudre* $A(x)=0$.

Correction 22.

1. $A(x)=2x^2-11x-5$

2. Comme $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$ donc

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+5)(x-5) + (x+5)(4-3x) \\ &= (x+5)(x-5+4-3x) \\ &= (x+5)(-2x-1) \\ A(x) &= -(x+5)(2x+1) \end{aligned}$$

3. En utilisant la forme factorisée de $A(x)$, on est amené à résoudre :

$$A(x) = -(x+5)(2x+1) = 0$$
$$\iff (x+5)(2x+1) = 0$$

Un produit de facteur est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$$\iff x+5 = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0$$
$$\iff x = -5 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \{-5; -\frac{1}{2}\}$.

Exercice 67. *Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel, l'équation :*
$(3x+2)(2x-1) + (4x-2)(3-5x) = 0$.

Correction 23.
Tout d'abord, pour factoriser l'expression, il faut remarquer que :

$$(4x-2) = 2(2x-1).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &(3x+2)(2x-1) + (4x-2)(3-5x) = 0 \\ \iff &(3x+2)(2x-1) + 2(2x-1)(3-5x) = 0 \\ \iff &(2x-1)(3x+2+2(3-5x)) = 0 \\ \iff &(2x-1)(3x+2+6-10x) = 0 \\ \iff &(2x-1)(-7x+8) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteur est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$$\iff 2x-1 = 0 \text{ ou } -7x+8 = 0$$
$$\iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{8}{7}.$$

Exercice 68. *Soit $F(x) = x^2 - 36 + (x+6)(\frac{12}{4} - \frac{2}{3}x)$.*

1. *Développer puis réduire $F(x)$.*
2. *Factoriser $F(x)$*
(Indication : Commencer par factoriser $x^2 - 36$).

3. *En choisissant l'expression appropriée de F, résoudre $F(x) = 0$.*

Correction 24. 1. $F(x) = x^2 - 36 + (x+6)(3 - \frac{2}{3}x) = \frac{1}{3}x^2 - x - 18$.

2. Comme $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)(x-6)$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= (x+6)(x-6) + (x+6)(3 - \frac{2}{3}x) \\ &= (x+6)(x - 6 + 3 - \frac{2}{3}x) \\ &= (x+6)(\frac{1}{3}x - 3). \end{aligned}$$

3. En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} &F(x) = 0 \\ \iff \ &(x+6)(\frac{1}{3}x - 3) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteur est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$$\begin{aligned} &\iff x + 6 = 0 \text{ ou } (\frac{1}{3}x - 3) = 0 \\ &\iff x = -6 \text{ ou } x = 9. \end{aligned}$$

15.3 Racine carré

Exercice 69. *Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible.*

- $\sqrt{63}$
- $\sqrt{99}$
- $\sqrt{50}$

Exercice 70. *Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible.*

- $\sqrt{12}$
- $\sqrt{80}$
- $\sqrt{384}$

Exercice 71.

1. (a) *Écrire $\sqrt{27}$, $\sqrt{12}$ et $\sqrt{300}$ sous la forme $a\sqrt{3}$ avec a entier.*
   (b) *En déduire $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{300}$*
2. *Écrire les nombres suivants sou la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible.*
   (a) $E=\sqrt{50}+4\sqrt{18}-7\sqrt{8}$
   (b) $F=\sqrt{20}-8\sqrt{45}+2\sqrt{5}$

Exercice 72. *Écrire le nombre suivant sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b étant le plus petit entier possible :*

1. $A=\sqrt{72}+\sqrt{18}$
2. $B=\sqrt{27}-\sqrt{108}$
3. $C=4\sqrt{80}+3\sqrt{125}$

Exercice 73. *Calculer les produits suivants :*

1. $J=7\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}$
2. $K=3\sqrt{5}\times 9\sqrt{3}$
3. $L=4\sqrt{5}\times(-5\sqrt{2})$
4. $M=-2\sqrt{11}\times 6\sqrt{33}$

Exercice 74. *Écrire les nombres suivants sous forme de quotient avec un dénominateur entier :*

1. $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$
2. $\sqrt{\dfrac{1}{16}}$
3. $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$
4. $\dfrac{2}{7} \times \sqrt{\dfrac{49}{64}}$

Exercice 75. *Rendre rationnels les dénominateurs proposés*

1. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$
3. $\dfrac{8}{\sqrt{6}+2}$
4. $\dfrac{3}{1-\sqrt{3}}$

15.4 Fonction affines

15.4.1 Fiche d'entrainement

Exercice 76. *Soit m un réel quelconque. On appelle f la fonction affine définie par $f(x) = (m-2)x + 2m$. Déterminez la ou les valeurs de m dans chaque cas :*

1. *f est une fonction linéaire.*
2. *f est une fonction constante.*
3. *$f(3) = 1$.*
4. *f est strictement décroissante.*

Exercice 77. *On considère la fonction g telle que $f(-2) = -1$ et $f(1) = -\frac{5}{2}$.*

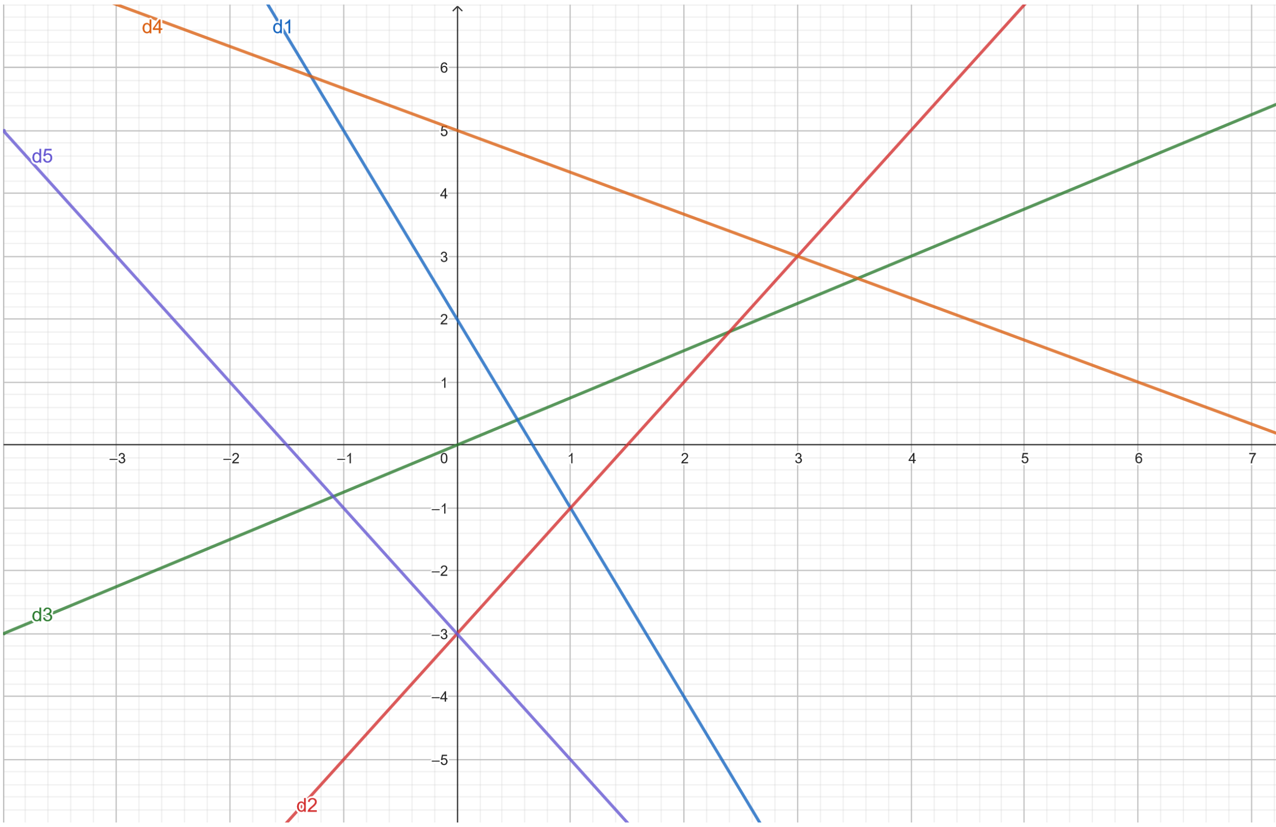
1. *Calculer le taux de variation de la fonction f.*
2. *Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.*
3. *Dresser le tableau de variation de la fonction f.*
4. *Représenter la fonction f dans un repère orthonormée.*

Exercice 78. *On désire représenter une fonction affine f dans un repère orthonormé.*

1. *Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = -1$ et $f(1) = 5$.*
2. *Placer les points $(-2; -1)$ et $(1, 5)$ dans un repère orthonormé et tracer la droite (d) issue de ces deux points.*
3. *Calculer $f(0)$, le point $(0; f(0))$ appartient-il à la droite (d) ? Tester pour d'autres nombres.*
   On dit que la droite (d) est la représentation graphique de f.
4. *Maintenant, considérons $g(x) = -2x+1$ une autre fonction affine. On souhaite caractériser le point d'intersection entre les droites représentant respectivement les fonctions f et g.*
   (a) *Tout d'abord, calculer $g(0)$ et $g(1)$ puis placer dans le repère les points de coordonnées $(0; g(0))$ et $(1; g(1))$. Enfin, tracer la droite issue de ces deux points. On appellera (e) cette nouvelle droite.*
   (b) *Les droites (d) et (e) se rencontrent-elles ? Donner les coordonnées (même approximatives) de ce point d'intersection.*
   (c) *Résoudre $f(x) = g(x)$ puis comparer les coordonnés obtenues avec la question précédente.*

15.4.2 Fiche de révision

Exercice 79. *Observer le graphique ci-dessous puis compléter le tableau.*



Droite	*Coefficient directeur*	*Ordonnée à l'origine*	*Fonction associée*
...	...	...	$f(x) = -3x + 2$
...	...	...	$f(x) = 2x - 3$
...	...	...	$f(x) = \frac{3}{4}x$
...	...	...	$f(x) = \ldots$
d_5	...	...	$f(x) = \ldots$

Exercice 80. *Soit f la fonction affine définie par $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$*

1. *Donner la valeur exacte des images par f des réels suivants :* $3; 5; \frac{3}{4}, \sqrt{2}$.
2. *Donner les antécédents par f des réels suivants :* $2; \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$.

Exercice 81. *Pour chacune des fonctions affines suivantes, déterminer le coefficient directeur et construire le tableau de variation de la fonction.*

1. $f(x) = -2x + 1$
2. $h(x) = 2 + \frac{x}{3}$
3. $g(x) = 3 - x$
4. $l(x) = \frac{x\sqrt{2}-1}{3}$

Exercice 82. 1. *Déterminer le tableau de signes des fonctions affines définies ci-dessous.*

   (a) $f(x) = 2x + 3$
   (b) $g(x) = -4x + 5$
   (c) $h(x) = x + 7$
   (d) $j(x) = 8 - x$

2. *Pour chacune des fonctions précédentes, donner un nombre réel x_1 dont l'image est positive et un nombre x_2 dont l'image est négative.*

Exercice 83.

On donne le tableau de variations de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

1. Quel est le signe de a ?

2. Déterminer le signe de b.

3. D'après le tableau, l'image de -4 est 0.
Traduire cette information par une égalité faisant intervenir a et b.

4. Déterminer a et b sachant que l'image de 0 est 8.

Exercice 84.

On donne le tableau de variations de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

1. Quel est le signe de a ?

2. Déterminer le signe de b.

3. Expliquer pourquoi le tableau permet d'écrire :

$$2a + b = 0$$

4. Déterminer a et b sachant que la droite représentative de f passe par le point de coordonnées $(0 ; 6)$.

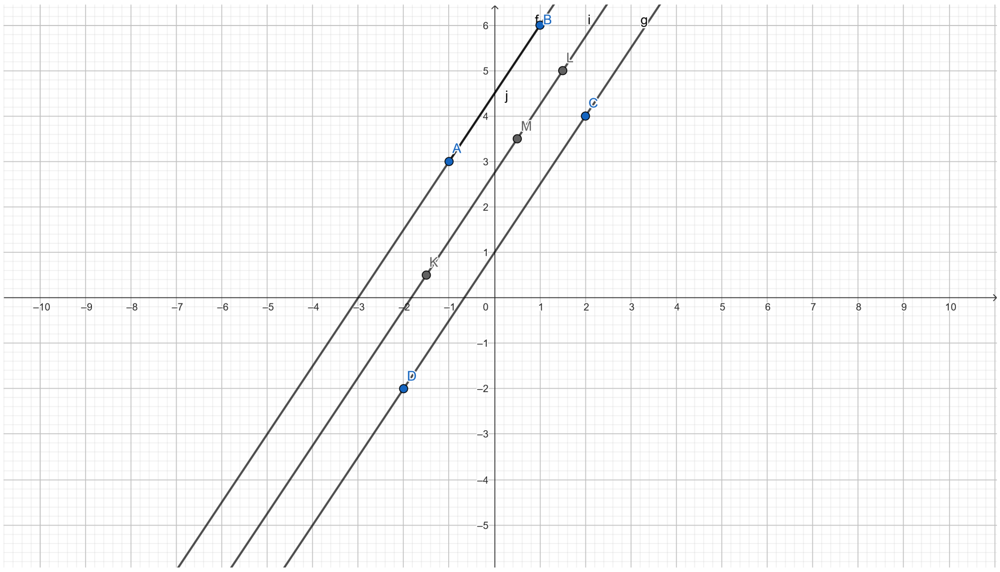
15.4.3 Correction Exercice 2

Propriété 57.
Dans un repère, si on a deux points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.
On notera $M = m[AB]$.

Exercice 85. *Dans le plan muni d'un repère, on considère les quatre points $A(-1; 3)$, $B(1; 6)$, $C(2; 4)$ et $D(-2; -2)$. On admet la propriété suivante :*

1. *Placer les quatre points dans un repère. Tracer les droites (AB) et (DC).*
2. *Déterminer la fonction affine f admettant la droite (AB) comme représentation graphique.*
3. *Déterminer la fonction affine g admettant la droite (DC) comme représentation graphique.*
4. *Démontrer que les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Que peut-on dire sur l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$?*
5. *Déterminer les coordonnées des points K, L, M milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$ et $[AC]$.*
6. *Déterminer la fonction affine admettant $[KL]$ comme représentation graphique.*
7. *Démontrer que les points K, L et M sont alignés.*

Correction 25. 1.



2. On cherche à déterminer la fonction $f(x) = ax + b$ affine qui passe par les points $A(-1; 3)$ et $B(1; 6)$. Ainsi, on peut poser $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, donc on a $f(x_1) = 3$ et $f(x_2) = 6$.
En calculant le taux de variation, on a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{3 - 6}{-1 - 1} \\ &= \frac{-3}{-2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

À ce stade, on a $f(x) = \frac{3}{2}x + b$. Maintenant, on utilise $f(-1) = 3$ pour déterminer b.

$$
\begin{aligned}
& f(-1) = 3 \\
\iff & \frac{3}{2} \times (-1) + b = 3 \\
& \iff b = 3 - (-\frac{3}{2}) \\
& \iff b = 3 + \frac{3}{2} \\
& \iff b = \frac{6}{2} + \frac{3}{2} \\
& \iff b = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2}$.

3. On cherche à déterminer la fonction $g(x) = ax + b$ affine qui passe par les points $D(-2; -2)$ et $C(2; 4)$. Ainsi, on peut poser $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$, donc on a $g(x_1) = -2$ et $g(x_2) = 4$.
En calculant le taux de variation, on a :

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{-2-4}{-2-2} \\
&= \frac{-6}{-4} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

À ce stade, on a $g(x) = \frac{3}{2}x + b$. Maintenant, on utilise $g(-2) = -2$ pour déterminer b.

$$
\begin{aligned}
& g(-2) = -2 \\
\iff & \frac{3}{2} \times (-2) + b = -2 \\
\iff & \frac{3 \times (-2)}{2} + b = -2 \\
& \iff -3 + b = -2 \\
& \iff b = -2 + 3 = 1.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

4. Les fonctions f et g ont les mêmes coefficients directeurs ainsi leurs droites représentatives ont la « même pente ».

La droite représentative de f rencontre l'axe des ordonnées au point $(0; \frac{9}{2})$ tandis que celle de g l'intersecte au point $(0; 1)$. Ainsi, on peut affirmer qu'elles ne sont pas confondues.
On peut alors affirmer que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

L'équation $f(x) = g(x)$ se représente par un point d'intersection entre les deux droites représentant respectivement f et g, comme les droites (AB) et (DC) sont parallèles, elles ne sont pas sécantes donc l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet aucune solution.

5. En utilisant la propriété en début d'exercice on a :

   - $K(\frac{x_A+x_D}{2}; \frac{y_A+y_D}{2})$ donc $K(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2})$.
   - $L(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2})$ donc $L(\frac{3}{2}; 5)$.
   - $M(\frac{x_A+x_C}{2}; \frac{y_A+y_C}{2})$ donc $M(\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$

6. On cherche à déterminer la fonction $h(x) = ax + b$ affine qui passe par les points $K(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2})$ et $L(\frac{3}{2}; 5)$. Ainsi, on peut poser $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$, donc on a $h(x_1) = \frac{1}{2}$ et $h(x_2) = 5$.
   En calculant le taux de variation, on a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - 5}{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{10}{2}}{-\frac{6}{2}} \\ &= \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{6}{2}} \\ &= \frac{9}{2} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{3 \times 3}{2} \times \frac{2}{3 \times 2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   À ce stade, on a $h(x) = \frac{3}{2}x + b$. Maintenant, on utilise $h(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$ pour déterminer b.

$$
\begin{aligned}
h(-\frac{3}{2}) &= \frac{1}{2} \\
\iff \frac{3}{2} \times (-\frac{3}{2}) + b &= \frac{1}{2} \\
\iff -\frac{9}{4} + b &= \frac{1}{2} \\
\iff b &= \frac{1}{2} + \frac{9}{4}) \\
\iff b &= \frac{2}{4} + \frac{9}{4} \\
\iff b &= \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $h(x) = \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$.

7. Pour avoir K, L, M alignés, il suffit que M appartiennent à la droite (KL), ce qui revient à dire que M appartient à la droite représentative de h.
   Comme $M(\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$, il suffit de vérifier que $h(\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$.On a :

$$
\begin{aligned}
h(\frac{1}{2}) &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{11}{4} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{11}{4} \\
&= \frac{14}{4} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

   Ainsi, K, L, M sont alignés.

De cet exercice, on peut retenir la propriété suivante :

Propriété 58.
Prenons f et g deux fonctions affines, si les coefficients directeurs des fonctions f et g sont distincts alors leurs droites représentatives sont sécantes. De plus, l'abscisse du point d'intersection de leurs droites représentatives est l'unique solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

15.4.4 Fiche exercice le 11/10/2023

Exercice 86.
Considérons une fonction affine f telle que $f(0) = 3$ et $f(\frac{3}{2}) = 0$.

1. *Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ pour tout nombre réel x.*
2. *Dresser le tableau de variation de f.*
3. *Résoudre pour tout nombre réel x, $f(x) = 0$.*
4. *Dresser le tableau de signe de f.*
5. *Résoudre pour tout nombre réel x, $f(x) = 6$.*

Exercice 87. *Dans le plan muni d'un repère, on considère les quatre points $A(-1;3)$, $B(1;6)$, $C(2;4)$ et $D(-2;-2)$. On admet la propriété suivante :*

Propriété 59.
Dans un repère, si on a deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $M(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2})$.
On notera $M = m[AB]$.

1. *Placer les quatre points dans un repère. Tracer les droites (AB) et (DC).*
2. *Déterminer la fonction affine f admettant la droite (AB) comme représentation graphique.*
3. *Déterminer la fonction affine g admettant la droite (DC) comme représentation graphique.*
4. *Démontrer que les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Que peut-on dire sur l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$?*
5. *Déterminer les coordonnées des points K, L, M milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$ et $[AC]$.*
6. *Déterminer la fonction affine admettant $[KL]$ comme représentation graphique.*
7. *Démontrer que les points K, L et M sont alignés.*

De cet exercice, on peut retenir la propriété suivante :

Propriété 60.
Prenons f et g deux fonctions affines, si les coefficients directeurs des fonctions f et g sont distincts alors leurs droites représentatives sont sécantes. De plus, l'abscisse du point d'intersection de leurs droites représentatives est l'unique solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 88 (Histoire des sciences)**.**
Dans un traité d'alpinisme, on peut lire que la température décroît de 0,65 °C tous les 100 m d'élévation.

1. *On admet que la température en degrés Celsius varie linéairement en fonction de l'altitude, en mètres. Un jour où il fait 20 °C au niveau de la mer, on considère la fonction f qui donne la température en degrés Celsius à x mètre d'altitude.*
   Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2. *Calculer la température à 4 000 m d'altitude.*
3. *Dresser le tableau de variation de f.*
4. *Résoudre $f(x) = 0$.*
5. *Dresser son tableau de signe.*

Exercice 89 (Collecte de fonds)**.**
Pour collecter des fonds, une association caritative revend à un prix fixe des pantalons fabriqués par des bénévoles. Les frais de l'opération sont fixes et ils s'élèvent à 1200 *€. La vente de* 250 *pantalons a rapporté* 800 *€ à l'association, une fois les frais déduits.*
On appelle x le nombre de pantalons vendus, et $B(x)$ le bénéfice net (en €) de la vente des pantalons pour l'association.

1. *Exprimer $B(x)$ en fonction de x.*
2. *Quel sera le bénéfice de l'association si elle vend* 400 *pantalons ?*
3. *Dresser son tableau de signe.*
4. *Combien de pantalons doit vendre l'association pour que son bénéfice soit supérieur ou égal à 0 ?*
5. *Combien de pantalons doit vendre l'association pour que son bénéfice soit supérieur ou égal à* 3000 *€ ?*

Exercice 90.
La formule de Lorentz est une formule donnant la masse idéale (théorique) en kg noté $p(t)$ d'un homme de taille t (en cm) avec $t \geq 130$. Elle est donnée par : $p(t) = t - 100 - \dfrac{t-150}{4}$.

1. *D'après cette formule, quel est le poids idéal d'un homme mesurant 170 cm ?*
2. *D'après cette formule, quel est le poids idéal d'un homme mesurant 2 m ?*

3. *Montrer que p est une fonction affine.*

4. *Un homme a une masse idéale de 74 kg. Combien mesure-t-il ?*

5. *Établir le tableau de variation et de signe de la fonction p.*

Exercice 91. *Dans le plan muni d'un repère, on considère la droite (d) représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.*
On considère la droite (d') passant par les deux points $A(-3; 0)$ et $B(1; -2)$.

1. *Tracer dans un repère la droite (d) et (d').*

2. *Déterminer la fonction g ayant pour représentation la droite (d').*

3. (a) *Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.*
   (b) *Donner les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').*

4. *Résoudre l'équation $f(x) \times g(x) = 0$.*

Exercice 92. *Dans un plan muni d'un repère, on considère quatre points $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$, $C(-3; -1)$ et $D(2; 4)$.*

1. *Placer les points d'un repère.*

2. *Démonter que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.*

3. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).*

15.5 Intervalles et inéquations

15.5.1 Inéquations

Avant toute chose, il faut se souvenir des propriétés :

Propriété 61 (Manipulation des inégalités)**.**
Prenons a, b, c et k des nombres réels avec $k \neq 0$.

- *Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité.*

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c.$$

- *Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.*

$$\text{Si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

- *Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.*

$$\text{Si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

Remarque 53. *Les propriétés restent identiques en utilisant des inégalités larges ($\leq$ ou $\geq$) au lieu des inégalités strictes ($<$ et $>$).*

Exercice 93. *Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :*

1. $5x + 7 \leq 27$
2. $-3x - 12 \geq 24$

Correction 26.

1. $5x + 7 \leq 27 \iff 5x \leq 27 - 7 \iff 5x \leq 20 \iff x \leq \dfrac{20}{5} \iff x \leq 4$
2. $-3x - 12 \geq 24 \iff -3x \geq 24 + 12 \iff -3x \geq 36 \iff x \leq 36 \times (-\dfrac{1}{3}) \iff x \leq -\dfrac{3 \times 12}{3} \iff x \leq -12$

Exercice 94. *Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :*

1. $x + 2 \geq 12$
2. $4x \leq 36$
3. $x - 11 \leq 10$

Correction 27. 1. $x + 2 \geq 12 \iff x \geq 12 - 2 \iff x \geq 10$

2. $4x \leq 36 \iff x \leq \dfrac{36}{4} \iff x \leq 9$

3. $x - 11 \leq 10 \iff x \leq 10 + 11 \iff x \leq 21$

Exercice 95. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.*

1. $3x + 2 \leq 4x - 14$

2. $9x + 19 \leq -x + 51$

3. $\dfrac{14}{3}x \leq 2x - \dfrac{1}{3}$

4. $\dfrac{-1}{2} - 1 < \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{4}$

Correction 28. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions recherchées.

1. $3x + 2 \leq 4x - 14 \iff 2 \leq 4x - 14 - 3x$
$\iff 2 \leq x - 14 \iff 2 + 14 \leq x \iff 16 \leq x \iff x \geq 16.$
Donc $\mathcal{S} = [16; +\infty[$.

2. $9x + 19 \leq -x + 51 \iff 9x + 19 + x \leq 51 \iff 10x + 19 \leq 51$
$\iff 10x \leq 51 - 19 \iff 10x \leq 32 \iff x \leq \dfrac{32}{10}$
Donc $\mathcal{S} =]-\infty; \dfrac{32}{10}[$.

3. $\dfrac{14}{3}x \leq 2x - \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{14}{3}x - 2x \leq -\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{14}{3}x - \dfrac{6}{3}x \leq -\dfrac{1}{3}$
$\iff (\dfrac{14}{3} - \dfrac{6}{3})x \leq -\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{8}{3}x \leq -\dfrac{1}{3}$
$\iff x \leq -\dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{3} \iff x \leq -\dfrac{1}{8}$
Donc $\mathcal{S} =]-\infty; -\dfrac{1}{8}]$.

4. $\dfrac{-1}{2} - 1 < \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{-1}{2} - \dfrac{2}{2} < \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{-1-2}{2} < \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{4}$
$\iff -\dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{4} \iff -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{5}x \iff -\dfrac{6}{4} - \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{5}x$
$\iff \dfrac{-6-1}{4} < \dfrac{1}{5}x \iff -\dfrac{7}{4} < \dfrac{1}{5}x \iff -\dfrac{7}{4} \times 5 < x \iff -\dfrac{35}{4} < x$
Donc $\mathcal{S} =]-\dfrac{35}{4}; +\infty[$

Exercice 96. *1. Éléonore dit qu'elle a trouvé des nombres solutions de l'inéquation* $4x + 2 > 4(x + 5) + 1$*. Qu'en pensez-vous ?*

2. *Samy dit que tous les nombres réels sont solutions de l'inéquation* $-3x + 7 \geq 5 - 3x$. *Qu'en pensez-vous ?*

3. *Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :*

   (a) $3x + 5 \leq 4 + 3x$

   (b) $5x - 2 > 5(x - 3) + 1$

Correction 29. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions recherchées.

1. Résolvons cette inéquation :
   $4x+2 > 4(x+5)+1 \iff 4x+2 > 4x+20+1 \iff 4x+2 > 4x+21 \iff 4x > 4x + 21 - 2 \iff 4x > 4x + 19 \iff 4x - 4x > 19 \iff 0 > 19$. On aboutit à une contradiction. On peut donc conclure qu'il n'existe aucune solution à cette équation. Vraisemblablement, Éléonore s'est trompé.

2. Résolvons l'inéquation :
   $-3x + 7 \geq 5 - 3x \iff -3x + 3x + 7 \geq 5$
   $\iff 7 \geq 5 \iff 7 - 5 \geq 0 \iff 2 \geq 0$.
   Ainsi, cette inégalité étant toujours vraie, on peut conclure que tous les nombres réels sont solutions de l'inéquation.

3. (a) $3x + 5 \leq 4 + 3x \iff 3x + 5 - 4 \leq 3x \iff 3x + 1 \leq 3x$
   $\iff 1 \leq 3x - 3x \iff 1 \leq 0$.
   On aboutit à une contradiction, ainsi $\mathcal{S} = \emptyset$.

   (b) $5x - 2 > 5(x - 3) + 1 \iff 5x - 2 > 5x - 15 + 1 \iff 5x - 2 > 5x - 14 \iff 5x > 5x - 14 + 2 \iff 5x - 5x > -12 \iff 0 > 12$
   Ainsi, cette inégalité étant toujours vraie, on peut conclure que tous les nombres réels sont solutions de l'inéquation.
   Donc $\mathcal{S} =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

15.5.2 Comparaison et valeurs absolues

Comparaison

Exercice 97. *Pour tout nombre réel x, comparer $C = 4x+9$ et $E = -x+44$.*

Correction 30. On va s'intéresser au cas $C > E$, puis $C = E$ et on en déduira $C < E$.

- $C > E \iff 4x+9 > -x+44 \iff 4x+9+x > 44 \iff 5x+9 > 44 \iff 5x > 44-9 \iff 5x > 35 \iff x > \frac{35}{5} \iff x > 7$.
  Ainsi, pour $x \in]7; +\infty[$, on a $C > E$.
- $C = E \iff 4x+9 = -x+44 \iff 4x+9+x = 44 \iff 5x+9 = 44 \iff 5x = 44-9 \iff 5x = 35 \iff x = \frac{35}{5} \iff x = 7$.
  Ainsi, quand $x = 7$, on a $C = E$.
- Ainsi, pour $x \in]-\infty; 7[$, on a $C < E$.

Exercice 98. *Pour tout nombre réel a, comparer les expressions $R = 15-2a$ et $S = a + 14$.*

Correction 31. Résolvons $R \geq S$, on a :

$$\begin{aligned} 15 - 2a &\geq a + 14 \\ 15 &\geq a + 14 + 2a \\ 15 &\geq 3a + 14 \\ 15 - 14 &\geq 3a \\ 1 &\geq 3a \\ \frac{1}{3} &\geq a \text{ (3>0 donc l'inégalité ne change pas de sens)} \end{aligned}$$

Ainsi, $R \geq S \iff a \leq \dfrac{1}{3}$. On peut que conclure que :

- Comme $R > S \iff a < \frac{1}{3}$, on en déduit que R est supérieur à S quand a est plus petit que $\frac{1}{3}$.
- Comme $R = S \iff a = \frac{1}{3}$, on en déduit que R est égal à S quand a est égal à $\frac{1}{3}$.
- Comme $R < S \iff a > \frac{1}{3}$, on en déduit que R est inférieur à S quand a est plus grand que $\frac{1}{3}$.

Exercice 99. *On considère les expressions $A = 45 + 5x$ et $B = 1000 - 5x$, pour tout nombre réel x. Comment faut-il choisir x pour que le résultat de A soit supérieur au résultat de B ?*

Correction 32. On a :

$$\begin{aligned} & A > B \\ \iff & 45 + 5x > 1000 - 5x \\ \iff & 45 > 1000 - 5x - 5x \\ \iff & 45 > 1000 - 10x \\ \iff & 45 - 1000 > -10x \\ \iff & -955 > -10x \end{aligned}$$

Comme $-10 < 0$, quand on va diviser par -10 chaque membre de l'inégalité, celle ci va changer de sens.
Donc, $A > B \iff -955 > -10x \iff \frac{-955}{-10} < x \iff \frac{955}{10} < x$.

Ainsi, il faut choisir un nombre $x > \frac{955}{10}$ ce qui revient à dire que x appartient à l'intervalle $]\frac{955}{10}; +\infty[$ et que l'on note $x \in]\frac{955}{10}; +\infty[$

Exercice 100.
1. *Quel est le signe (positif ou négatif) de x^2 suivants les valeurs de x ?*
2. *Comparer les valeurs de $2 + x + x^2$ et $1 + x$.*

Correction 33.
1. Un carré est toujours positif donc pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$.
2. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $2 + x + x^2 - 1 + x = x^2 + 2$. Ainsi, si on établit quand $x^2 + 2$ est positif (ou négatif) on pourra en déduire quand $x + 1$ est plus petit (ou plus grand) que $x^2 + x + 2$.
   Avec la question précédente, on sait que pour tout nombre réel x, on a $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 2 \geq 2 > 0$.
   Ainsi, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 2 > x + 1$.

Exercice 101. *Comparer les expressions suivantes.*

1. $5 + 2x$ *et* $x + 9$ *pour tout nombre réel* x.
2. $9 + \frac{1}{2}x$ *et 1 pour tout nombre réel* x.
3. $A = x^2 - 6x + 150$ *et* $B = x^2 + 4x$ *pour tout nombre réel* x.
4. $A = 2t + 9$ *et* $B = -2t + 3$ *pour tout nombre réel* t.

Correction 34.

Exercice 102.
1. *A, B, C trois nombres strictement positifs tels que $A > B > C$. Comparer :*
   (a) $\frac{A}{B}$ *et 1.*

(b) $\frac{C}{B}$ et 1.

2. *(a) Sachant que $\sqrt{2} > 1$, comparer $3\sqrt{2} + 4$ et 7.*

   (b) $\frac{3\sqrt{2}+4}{7}$ est-il supérieur à 1 ?

3. *x est un nombre réel supérieur ou égal à 1. Que peut-on dire de $\frac{2x+3}{2x+7}$ par rapport à 1 ?*

Correction 35. 1. A, B, C trois nombres strictement positifs tels que $A > B > C$.

   (a) On a $A > B$ en divisant chaque membre par B (ce qui est possible car B est strictement positif) on a $A > B \iff \frac{A}{B} > 1$.

   (b) On a $B > C$ en divisant chaque membre par B (ce qui est possible car B est strictement positif) on a $B > C \iff 1 > \frac{C}{B}$.

2. (a) On a $\sqrt{2} > 1 \iff 3\sqrt{2} > 3 \iff 3\sqrt{2} + 4 > 3 + 4 \iff 3\sqrt{2} + 4 > 7$.

   (b) En reprenant l'inégalité de la question précédente $3\sqrt{2} + 4 > 7$, en divisant chaque membre par 7 on obtient $\frac{3\sqrt{2}+4}{7} > 1$ (comme $7 > 0$, l'inégalité ne change pas de sens).
   Donc $\frac{3\sqrt{2}+4}{7}$ est supérieur strictement à 1.

3. Soit $x \in [1; +\infty[\iff x \geq 1$.

   On a $2x + 7 > 2x + 3 \iff 2x + 7 - 2x > 3 \iff 7 > 3$. Donc tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.
   Ainsi, $2x + 7$ est toujours supérieur à $2x + 3$.
   Comme $x \geq 1$, on peut affirmer que $2x + 3 \geq 2 \times 1 + 3 \iff 2x + 3 \geq 5 > 0$.
   On a donc $2x + 7 > 2x + 3$ et en divisant chaque membre par $2x + 3$ on a $\frac{2x+3}{2x+7} > 1$. De ce fait, la fraction $\frac{2x+3}{2x+7}$ est strictement inférieure à 1.

Valeurs Absolues

Exercice 103. *1. Déterminer les intervalles des nombres x vérifiant :*

   (a) $|x - 5| \leq 1$.

   (b) $|x - 10| \leq 20$.

2. Compléter :

   (a) $x \in [0; 10] \iff |x - \ldots| \leq \ldots$.

   (b) $x \in [25; 37] \iff |x - \ldots| \leq \ldots$.

Correction 36.

1. (a) Ici 5 est le centre et 1 le rayon donc $|x-5| \leq 1 \iff 5-1 \leq x \leq 5+1 \iff 4 \leq x \leq 6$.
   (b) Ici 10 est le centre et 20 le rayon donc $|x-10| \leq 20 \iff 10-20 \leq x \leq 10+20 \iff -10 \leq x \leq 30$.
2. (a) $x \in [0;10] \iff |x-5| \leq 5$ car le rayon est égal à $\frac{10-0}{2} = 5$ et le centre est égal à $10-5=5$.
   (b) $x \in [25;37] \iff |x-31| \leq 6$ car le rayon est égal à $\frac{37-25}{2} = 6$ et le centre est égal à $37-6=31$.

Exercice 104. *Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels x vérifiant :*

1. $|x+5| \leq 3$.

2. $|x+1| \leq 2$.

3. $|x-3| < 1$.

Correction 37. Ici, il faut se souvenir que si c est un nombre réel et $r>0$, on a $x \in [c-r;c+r] \iff |x-c| \leq r$.

1. Comme $x+5 = x-(-5)$, le centre est -5 et le rayon 3 donc on a $|x+5| \leq 3 \iff x \in [-5-3;-5+3] = [-8;-2]$.
2. Comme $x+1 = x-(-1)$, le centre est -1 et le rayon 2 donc on a $|x+1| \leq 2 \iff x \in [-1-2;-1+2] = [-3;1]$.
3. Le centre est 3, le rayon 1 donc $|x-3| < 1 \iff x \in [3-1;3+1] = [2;4]$.

Exercice 105. *Écrire une inégalité vérifiée par x et utilisant une valeur absolue dans les cas suivants.*

1. $x \in [-4;5]$.

2. $x \in [0;1,1]$.

3. $x \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$.

Correction 38.

1. Le rayon est égal à $\frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}$, le centre est $5-\frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ donc $x \in [-4;5] \iff |x-\frac{1}{2}| \leq \frac{9}{2}$.
2. Le rayon est égal à $0,55$, le centre est égal rayon donc $x \in [0;1,1] \iff |x-0,55| \leq 0,55$.
3. Le rayon est égal à $\frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, le centre est $\frac{2}{3}-\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ donc $x \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}] \iff |x-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{6}$.

15.5.3 Inégalités

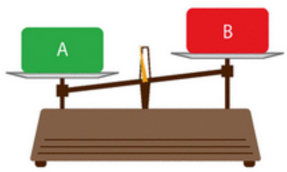
Exercice 106.

2 Manipuler des inégalités

1. On considère la balance ci-contre.

a) Laquelle des deux masses est la plus lourde ?

b) On rajoute une masse de 20 g de chaque côté de la balance. Cela changera-t-il le résultat de la comparaison ?



2. Recopier et compléter avec $<$ ou $>$: « Si A $>$ B alors A + 20 **...** B + 20. »

3. Recopier et compléter.

a) Si $x \leqslant y$ alors $x + 30$ **...** $y + 30$.

b) Si $M > M'$ alors $M - 4$ **...** $M' - 4$.

c) Si $a \geqslant b$ alors $a + k$ **...** $b + k$.

d) Si $x > 2$ alors $x + 30$ **....**

4. D'après vous, peut-on dire que « si $a \leqslant b$ alors $k \times a \leqslant k \times b$ » pour n'importe quels nombres réels a, b et k ?

5. Pour aller plus loin Un rectangle a pour longueur 6. Expliquer pourquoi, si sa largeur est inférieure ou égale à 2,1, alors son périmètre sera inférieur ou égal à 16,2.

Correction 39.

1. (a) La masse A est la plus lourde.
   (b) Non.
2. Si $A > B$ alors $A + 20 > B + 20$.
3. (a) Si $x \leq y$ alors $x + 30 \leq y + 30$.
   (b) Si $M > M'$ alors $M - 4 > M' - 4$.
   (c) Si $a \geq b$ alors $a + k \geq b + k$.
   (d) Si $x > 2$ alors $x + 30 > 32$.
4. Non, il faut que k soit un réel strictement positif. On aurait aussi pu dire que k appartienne à l'intervalle $]0; +\infty[$ ce qui se note $k \in]0; +\infty[$
5. On note L la longueur du rectangle et l la largeur. On sait que le périmètre P d'un rectangle est $P = 2L + 2l = 2 \times (L + l)$. Dans notre cas, on sait que $L = 6$ et $l \leq 2,1$ donc

$$\begin{aligned} L + l = 6 + l &\leq 6 + 2,1 \\ \iff L + l &\leq 8,1 \\ \iff 2 \times (L + l) &\leq 2 \times 8,1 \text{ comme } 2 > 0\text{, le sens de l'inégalité ne change pas} \\ \iff P = 2 \times (L + l) &\leq 16,2 \end{aligned}$$

   Ainsi le périmètre du rectangle est inférieur ou égal à 16,2.

Exercice 107. *1. $x \in \mathbb{R}$ un réel tel que $x > 4$.*
Quelles inégalités peut-on en déduire pour $x + 6$ et pour $\frac{x}{2}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel tel que $2 < a \leq 9$. Donner un encadrement de $-3a$.

Correction 40. 1. Si on a un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 4$, on sait qu'ajouter une même quantité aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de celle-ci donc on a :

$$x > 4 \iff x + 6 > 4 + 10 \iff x + 6 > 14$$

On sait aussi que multiplier par un nombre positif les deux membres d'une inégalité ne change pas non plus le sens des inégalités, comme $\frac{1}{2} > 0$ alors on a :

$$x > 4 \iff \frac{1}{2} \times x > \frac{1}{2} \times 4 \iff \frac{x}{2} > \frac{4}{2} \iff \frac{x}{2} > 2.$$

2. Prenons un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $2 < a \leq 9$, décomposons cet encadrement :
D'un côté, nous avons :

$$\begin{aligned} 2 < a &\iff -3 \times 2 > a \times (-3) \text{ } (-3 < 0 \text{, le sens de l'inégalité change}) \\ &\iff -6 > -3a \end{aligned}$$

De l'autre, on a :

$$\begin{aligned} a \leq 9a &\iff -3\times \geq 9 \times (-3) \text{ } (-3 < 0 \text{, le sens de l'inégalité change}) \\ &\iff -3a \geq -27 \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les deux, on obtient $-6 > -3a \geq 27$.

Exercice 108. *Soit $t \geq 10$. Quelles inégalités peut-on en déduire pour $2,5t$ et $t - 7$?*

Correction 41. • Pour $2,5t$.
On sait que multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens des inégalités donc $t \geq 10 \iff 2,5t \geq 25$.

• Pour $t - 7$.
On sait qu'ajouter (on n'oublie pas que soustraire par 7 revient à ajouter par son opposée -7) une même quantité aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité donc :

$$t \geq 10 \iff t - 7 \geq 10 - 7 \iff t - 7 \geq 3.$$

Exercice 109. *Sachant que $-4 < x < 0$, donner un encadrement de $\frac{x}{4}$ et $x + 12$.*

Correction 42. Prenons un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $-4 < x < 0$.

• Pour $\frac{x}{4}$.
Décomposons cet encadrement, comme $\frac{1}{4} > 0$, multiplier chaque membre de l'inégalité par ce nombre ne change pas le sens donc :

- $-4 < x \iff -4 \times \frac{1}{4} < x \times \frac{1}{4} \iff -1 < \frac{x}{4}$.
- $x < 0 \iff \frac{1}{4} \times x < 0 \times \frac{1}{4} \iff \frac{x}{4} < 0$.

Donc, on a $-1 < x < 0$.

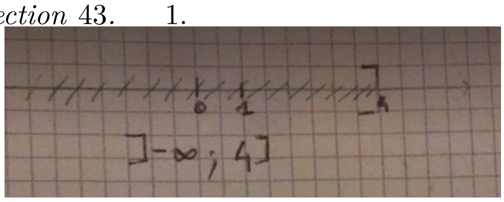
- Pour $x + 12$.
  - $-4 < x \iff -4 + 12 < x + 12 \iff 8 < x + 12$.
  - $x < 0 \iff x + 12 < 0 + 12 \iff x + 12 < 12$.

  Donc, on a $8 < x + 12 < 12$.

Exercice 110. *Soit* $x \in]-\infty; 4]$.

1. *Représenter cet intervalle sur une droite gradué.*
2. *Donner une inégalité vérifié par a)* $3x$, *b)* $x - 1$ *et c)* $3x - 2$.
3. *Dans chaque cas, donner l'intervalle représenté par l'inégalité obtenue.*

Correction 43. 1.

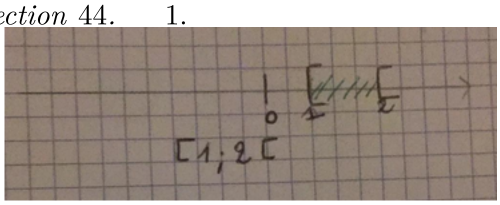


2. Si x appartient à l'intervalle $]-\infty; 4]$ alors $x \leq 4$. Alors,
   (a) $3x \leq 12$.
   (b) $x - 1 \leq 3$.
   (c) En reprenant l'inégalité du (a) on obtient : $3x - 2 \leq 10$.
3. Dans chaque cas, on trouve $]-\infty; 4]$.

Exercice 111. *Soit* $x \in [1; 2[$.

1. *Représenter cet intervalle par une inégalité.*
2. *À quel intervalle appartient : a)* $2x$ *?, b)* $-0,5x$ *?, c)* $3x-1$ *?, d)* $5-2x$ *?*

Correction 44. 1.



2. Si x appartient à l'intervalle $[1; 2[$ alors $1 \leq x < 2$. Ainsi,

(a) Comme $1 \leq x < 2 \iff 2 \leq 2x < 4$, alors on a $2x \in [2;4[$.

(b) Comme $1 \leq x < 2 \iff -0,5 \geq -0,5x > -1$, alors on a $-0,5x \in]-1;-0,5]$.

(c) Comme $1 \leq x < 2 \iff 3 \leq 3x < 6 \iff -2 \leq 3x-1 < 5$, alors on a $3x-1 \in [-2;5[$.

(d) Comme $1 \leq x < 2 \iff -2 \geq -2x > -4 \iff 3 \geq 5-2x > -1$, alors on a $5-2x \in]-1;3]$.

Exercice 112. *Soit x et y deux nombres réels tels que $1,4 \leq x \leq 3,2$ et $0 \leq y \leq 1$. Que peut-on en déduire pour $x+y$? $x+3y$? $x-y$? $2x-3y$?*

Correction 45. Si on a deux encadrements $1,4 \leq x \leq 3,2$ et $0 \leq y \leq 1$. Alors on a :

- $1,4 \leq x+y \leq 4,2$.
- Comme $0 \leq 3y \leq 3$ alors $1,4 \leq x+3y \leq 6,2$
- $1,4 \leq x-y \leq 2,2$.
- Comme $2,8 \leq 2x \leq 6,4$ et $-3 \leq -3y \leq 0$ donc $-0,2 \leq 2x-3y \leq 6,4$

Exercice 113. *On va essayer d'établir quelques démonstrations.*

1. *Considérons deux nombres réels a, b tels que $a < b$.*
   (a) *Calculer $(b+c)-(a+c)$ et comparer ce résultat à 0.*
   (b) *Comparer $a+c$ et $b+c$.*
2. *Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et un nombre réel $k > 0$.*
   (a) *En observant que $kb - ka = k(b-a)$, que peut-on dire du signe du nombre $kb - ka$?*
   (b) *Comparer ka et kb.*
3. *De manière analogue à la question 2, montrer que si $a < b$ et $k < 0$ alors $ka > kb$.*

Correction 46. Prenons deux nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a$.

1. Prenons un troisième nombre réel $c \in \mathbb{R}$.
   (a) On a $(b+c)-(a+c) = b+c-a-c = b-a$.
   Comme $b > a$ c'est-à-dire que b est un nombre strictement plus grand que le nombre a, on peut conclure que la différence $b-a$ est strictement positive. Ainsi, on a $(b+c)-(a+c) = b-a > 0$.

(b) Grâce à la question précédente, on peut conclure que $(b + c)$ est strictement plus grand que $(a + c)$ ce qui s'écrit $b + c > a + c$.

2. Considérons maintenant un nombre réel $k > 0$ qui est strictement positif.

   (a) Le signe du produit $k(b - a)$ dépend de chacun des facteurs. On sait que $k > 0$ est strictement positif, et grâce à la question 1.(a) on sait que $b - a > 0$ est strictement positif.
   De ce fait, on peut affirmer que le produit $k(b - a)$ est positif.

   (b) Comme on a $kb - ka = k(b - a) > 0$, on peut affirmer que $kb > ka$.

3. Maintenant, supposons que $k < 0$ soit strictement négatif.
   Le signe du produit $k(b - a)$ dépend de chacun des facteurs. On sait que $k < 0$ est strictement négatif, et grâce à la question 1.(a) on sait que $b - a > 0$ est strictement positif.
   De ce fait, on peut affirmer que le produit $k(b - a)$ est négatif.
   Comme on a $kb - ka = k(b - a) < 0$, on peut affirmer que $kb < ka$.

15.6 Arithmétique

15.6.1 Fiche n°1

Exercice 114. *1. Justifier que 98 est un multiple de 14.*

2. Traduire cette propriété avec chacune des expressions «est diviseur de» ; « a pour diviseur» ; «est divisible par » ; « a pour multiple ».

Correction 47. 1. $98 = 14 \times 7$. Donc 98 est un multiple de 14.

2. 14 est un diviseur de 98 ; 98 a pour diviseur 14 ; 98 est divisible par 14 ; 14 a pour multiple 98.

Exercice 115. *1. Donner tous les diviseurs positifs de 11.*

2. Donner tous les diviseurs positifs de 21.

3. Déterminer tous les multiples de 9 inférieurs à 50.

Correction 48. 1. $11 = 1 \times 11 = 11 \times 1$ donc les seuls diviseurs positifs de 11 sont 1 et 11.

2. $21 = 7 \times 3$ donc les diviseurs positifs de 21 sont $1, 3, 7, 21$.

3. Il suffit de regarder la table de 9 : $9, 18, 27, 36, 45$.

Exercice 116. *Soient les nombres $a = 4p$ et $b = 5p$ avec p et q des entiers.*

1. Justifier que a est pair.

2. Le nombre b peut-il être pair ?

Correction 49. Soient les nombres $a = 4p$ et $b = 5q$ avec p et q des entiers.

1. $a = 4p = 2 \times 2p$ donc 2 divise a donc a est pair.

2. b peut-être pair si q est pair.

Exercice 117. *Montrer que :*

1. la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

2. le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

3. la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Correction 50. 1. Si a et b sont deux entiers relatifs pairs, alors il existe k et k' deux entiers tels que :

- $a = 2k$

- $b = 2k'$

Sommons-les on a : $a + b = 2k + 2k'$ donc en factorisant par 2 on a $a + b = 2(k + k')$.
En posant $K = k + k' \in \mathbb{Z}$, qui est un entier, car la somme de deux entiers est un entier, on a $a + b = 2K$ donc $a + b$ est pair.

2. Si a et b sont deux entiers relatifs impairs, alors il existe k et k' deux entiers tels que :

   - $a = 2k + 1$
   - $b = 2k' + 1$

   Réalisons le produit des deux, on a :
   $a \times b = (2k + 1) \times (2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1$ donc en factorisant par 2 on a $a \times b = 2(2k'k + k + k') + 1$.
   En posant $K = (2k'k+k+k') \in \mathbb{Z}$, qui est un entier, on a $a \times b = 2K+1$ donc $a \times b$ est impair.

3. Si a est un entier relatif pair et b un entier relatifs impair, alors il existe k et k' deux entiers tels que :

   - $a = 2k$
   - $b = 2k' + 1$

   Sommons-les on a : $a + b = 2k + 2k' + 1$ donc en factorisant par 2 on a $a + b = 2(k + k') + 1$. En posant $K = k + k' \in \mathbb{Z}$, qui est un entier, car la somme de deux entiers est un entier, on a $a + b = 2K + 1$ donc $a + b$ est impair.

Exercice 118. *Montrer que :*

1. *la somme de deux entiers impairs est paire.*
2. *si a et b sont pairs alors $a^2 + b^2$ est pair.*

Correction 51. 1. Prenons a, b deux entiers relatifs impairs, il existe k et k' deux entiers tels que :

   - $a = 2k + 1$
   - $b = 2k' + 1$

   Sommons-les, on a : $a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2$ donc en factorisant par 2, on a $a + b = 2(k + k' + 1)$.
   Posons $K = k + k' + 1 \in \mathbb{Z}$, alors on a $a + b = 2K$ donc $a + b$ est pair.

2. Si a et b sont deux entiers relatifs pairs, alors il existe k et k' deux entiers tels que :

- $a = 2k$
- $b = 2k'$

Sommons leurs carrés on a : $a^2 + b^2 = (2k)^2 + (2k')^2 = 4k^2 + 4k^{'2} =$ donc en factorisant par 2 on a $a^2 + b^2 = 2(2k^2 + 2k^{'2})$.
En posant $K = 2k^2 + k^{'2} \in \mathbb{Z}$, qui est un entier, car la somme de deux entiers est un entier, on a $a^2 + b^2 = 2K$ donc $a + b$ est pair.

15.6.2 Fiche n°2

On en profite pour rappeler une nouvelle fois les identités remarquables :

Propriété 62 (Identités Remarquables)**.** *Pour tous nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exercice 119. *Considérons a un entier relatif non nul.*
Écrire une expression mathématique correspondant aux affirmations suivantes.

1. *a est un multiple de 7.*
2. *a divise 42.*
3. *a est un diviseur de 55.*
4. *-10 divise a.*

Correction 52. Considérons a un entier relatif non nul

1. $a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.
2. $42 = a \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.
3. $55 = a \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.
4. $a = -10 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

Exercice 120. *Quels que soient les entiers relatifs a et b distincts et non nuls. Écrire une phrase mathématique correspondant aux phrases suivantes.*

1. *La somme de a et b est un multiple de 6.*
2. *La différence de a et b est un diviseur de 2020.*
3. *La somme du double de a et du triple de b est un diviseur de 46.*
4. *Le produit de a et b divise 84.*

Correction 53. Soient a et b deux entiers relatifs distincts.

1. $a + b = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.
2. $2020 = (a-b) \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.
3. $46 = (2a+3b) \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

4. $84 = (a \times b) \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

Exercice 121. *La somme de trois entiers consécutifs est-elle un multiple de 3 ?*

Correction 54. Soit n un entier, $(n+1)$ est successeur et $(n+2)$ le successeur de $(n+1)$.
Calculons la somme, on a $n+(n+1)+(n+2) = n+n+1+n+2 = 3n+3$.
En factorisant par 3, on a $n+(n+1)+(n+2) = 3(n+1)$.
Puis en posant $K = n+1$, on obtient $n+(n+1)+(n+2) = 3K$ donc la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 122. *Montrer que si n est pair alors $4n+3$ est impair.*

Correction 55. Prenons un entier n pair alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Alors, on a $4n+3 = 4(2k)+3 = 8k+3 = 2 \times 4k + 2 + 1$.
Donc, en factorisant par 2, on a $4n+3 = 2(4k+1)+1$.
Puis, en posant $K = 4k+1 \in \mathbb{Z}$, on a $4n+3 = 2K+1$. Ainsi, $4n+3$ est impair.

Exercice 123. *Quel que soit l'entier relatif a, montrer que la différence de deux multiples de a est un multiple de a.*

Correction 56. Prenons deux multiples de a, par exemple $x = ka$ et $y = la$ avec k et l deux entiers relatifs.
On a $x-y = ka-la = (k-l)\times a = a\times(k-l)$. Donc en posant $K = (k-l) \in \mathbb{Z}$, on a $x-y = aK$ donc $x-y$ est un multiple de a.

Exercice 124. *Montrer que si n est pair alors $-n^2+n+1$ est impair.*

Correction 57. Si n est pair, alors il existe k un entier relatif tel que $n = 2k$.
On a : $-n^2+n+1 = -(2k)^2+2k+1 = -4k^2+2k+1 = 2(-2k^2+k)+1$.
En posant $K = -2k^2+k \in \mathbb{Z}$, on a $-n^2+n+1 = 2K+1$, c'est donc un nombre impair.

Exercice 125. *Montrer que si n est impair, alors $3n^2+n$ est pair.*

Correction 58. Prenons un entier n impair, il existe k un entier relatif tel que $n = 2k+1$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
3n^2+n &= 3(2k+1)^2+(2k+1) \\
&= 3(4k^2+4k+1)+2k+1 \\
&= 12k^2+12k+3+1 \\
&= 12k^2+12k+4 \\
&= 2(6k^2+6k+2).
\end{aligned}$$

Donc en posant $K = (6k^2+6k+2) \in \mathbb{Z}$, on a $3n^2+n = 2K$ c'est donc un nombre pair.

Exercice 126. *Pour tout entiers a et b, monter que $a+10b+100b+1000a$ est un multiple de 11.*

Correction 59. Déjà remarquons que $110 = 11\times 10$ et $1001 = 11\times 91$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} a+10b+100b+1000a &= 1001a+110b \\ &= 11(91a+10b). \end{aligned}$$

En posant $K = 91a+10b$, on trouve que ce nombre est un multiple de 11.

Exercice 127. *Demain, c'est le jour du marché. Le pâtissier a préparé 131 éclairs au chocolat. La vitrine réfrigérée des desserts contient des présentoirs superposés destinés à accueillir chacun 4 produits.*
Combien de présentoirs lui faut-il pour ranger ses éclairs ? Combien d'éclairs au chocolat y aura-t-il sur le dernier présentoir ?

Correction 60. La division euclidienne de 131 par 4 donne $131 = 4\times 32+3$. Ainsi, il lui faudra 32 présentoirs et sur le 33ᵉ il n'y aura que 3 éclairs.

Exercice 128. *729 élèves sont inscrits à la cantine du lycée. Pour simplifier l'aménagement à l'intérieur du réfectoire, il convient de constituer des tables ayant le même nombre d'élèves. Peut-on les mettre par 5 ? Par 9 ? Par 4 ?*

Correction 61. 729 n'est pas divisible par 5 (critère de divisibilité par 5) donc on ne peut pas les ranger par table de 5.
$7+2+9 = 18$ est un multiple de 9 donc 729 est divisible par 9 (critère de divisibilité par 9) et on a $729 = 9\times 81$. Ainsi, on peut les ranger en table de 9.
On réalise la division euclidienne de 729 par 4 et on trouve $729 = 4\times 182+1$ donc on ne peut pas les ranger par table de 4.

Exercice 129. *Soit u et d deux entiers naturels tels que u soient compris entre 0 et 9. Considérons le nombre $N = 10d+u$.*

1. *Que représente u et d pour N ?*
2. *Montrer que si N est divisible par 17, alors $d-5u$ est divisible par 17.*
3. *Montrer que si $d-5u$ est divisible par 17, alors N est divisible par 17.*
4. *Donner un critère de divisibilité par 17.*
5. *En utilisant les questions précédentes, déterminer si les nombres 1428 et 867 sont-ils divisibles par 17 ?*

Correction 62. 1. Le nombre u est le chiffre des unités N et d est le nombre des dizaines de N.

2.

3. On montre les deux questions d'un coup.
   Comme N est divisible par 17, il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 17k$. Comme $N = 10d + u$, on a :

$$\begin{aligned}
& N = 17k \\
\iff\ & 10d + u = 17k \\
\iff\ & -5 \times (10d + u) = (-5) \times 17k \\
\iff\ & -50d - 5u = 17k', \text{ en posant } k' = -5 \times k \\
\iff\ & -51d + d - 5u = 17k' \\
\iff\ & d - 5u = 17k' + 51d \\
\iff\ & d - 5u = 17(k' + 3d) \\
\iff\ & d - 5u = 17K, \text{ en posant } K = k' + 3d
\end{aligned}$$

   Donc $d - 5u$ est divisible par 17 si et seulement si $N = 10d + u$ est divisible par 17.

4. Pour qu'un nombre soit divisible par 17, il faut et il suffit que, la différence entre cinq fois son chiffre des unités et son nombre de dizaines doit être un multiple de 17.

5.
   - Pour 1428, on a $1428 = 142 \times 10 + 8$ donc $d - 5u = 142 - 5 \times 8 = 1023 = 6 \times 17$ et $1428 = 17 \times 84$.
   - Pour 867, on a $867 = 86 \times 10 + 7$ donc $d - 5u = 86 - 5 \times 7 = 51 = 3 \times 17$ et $867 = 17 \times 51$.

15.7 Fiche révision Arithmétique et intervalles

Exercice 130. *Emma et Tristan jouent à un jeu vidéo.*

1. *Emma gagne 5 points par partie tandis que Tristan gagne 3 points par partie. Ils s'arrêtent de jouer lorsqu'ils ont le même nombre de points.*

2. *Même question si Emma gagne 8 points et Tristan 12 points.*

Correction 63. Soit k l'entier représentant le nombre de parties jouées (k est donc positif).

1. On cherche le premier nombre tel que $5k = 3k$. On cherche donc le plus petit multiple commun à 3 et 5. Avec l'exercice du billard, on a vu que pour deux entiers relatifs a et b, on a $\text{ppcm}(a, b) = \dfrac{|a \times b|}{\text{pgcd}(a, b)}$.
   Or 3 et 5 sont premiers entre eux donc $\text{pgcd}(3, 5) = 1$.
   Donc $\text{ppcm}(3, 5) = \dfrac{|3 \times 5|}{\text{pgcd}(3, 5)} = 3 \times 5 = 15$.
   Ainsi, ils s'arrêteront au bout de 15 parties.

2. En suivant le même raisonnement, comme $8 = 2^3$ et $12 = 2^2 \times 3$ donc $\text{pgcd}(8, 12) = 4$ donc $\text{ppcm}(8, 12) = \dfrac{|8 \times 12|}{\text{pgcd}(8, 12)} = \dfrac{2 \times 4 \times 12}{4} = 24$.
   Ainsi, ils s'arrêteront au bout de 24 parties.

Exercice 131. *Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple. Si elle est vraie, démontrer la proposition.*

1. *Soit a et b deux entiers relatifs non nuls tels que a divise b alors $-a$ divise $2b$.*

2. *Si l'entier naturel d non nul divise l'entier naturel n alors d divise $5n$.*

Correction 64.

1. Si a divise b alors, il existe un entier relatif k tel que $b = ak$.
   Posons $K = -k$, on a $2b = 2ak = 2a(-K) = 2(-a)K = -a2K$.
   Posons $k' = 2K$, c'est un entier donc $2b = -a2K = -ak'$.
   De ce fait, $-a$ divise $2b$ et la proposition est vraie.

2. Si d divise b alors, il existe un entier relatif k tel que $n = dk$.
   Donc $5n = 5dk = d5k = dK$ avec $K = 5k$ un entier.
   Ainsi, d divise $5n$, la proposition est donc vraie.

Exercice 132. *Montrer que si n est pair alors $4n + 3$ est impair.*

Correction 65. Si n est un entier pair alors il existe p un entier tel que $n = 2p$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 4n + 3 &= 4 \times 2p + 3 \\ &= 8p + 3 \\ &= 8p + 2 + 1 \\ &= 2(4p + 1) + 1 \end{aligned}$$

En posant $K = 4p + 1$ qui est un entier, on obtient que $4n + 3 = 2K + 1$ donc $4n + 3$ est impair.

Exercice 133. *Soient* $-5 \leq x < -2$ *et* $3 \leq y \leq 7$.

1. *Donner un encadrement de*
   (a) $x + y$
   (b) $x - y$
   (c) $2x - y$
   (d) xy
2. *Dans chaque cas, donner l'intervalle représenté.*

Correction 66. 1. (a) Si $x \geq -5$ et $y \geq 3$ alors $x + y \leq -2$.
Si $x \leq -2$ et $y \leq 7$ alors $x + y < 5$.
Donc $-2 \leq x + y < 5$.
   (b) Si $-5 \leq x < -2$ et comme $x - y = x + (-y)$, on a :
$3 \leq y \leq 7 \iff -7 \leq -y \leq -3$ donc $-12 \leq x - y < -1$
   (c) On a $-10 \leq 2x < -4$ et $-7 \leq -y \leq -3$ donc $-17 \leq 2x - y < -7$
   (d) Comme $x \geq -5$ et $y \geq 3$ donc $xy \geq -15$.
Comme $x < 2$ et $y \leq -7$ donc $xy < 14$.
Donc $-15 \leq xy < 14$.
2. (a) $[-2; 5[$
   (b) $[-12; -1[$
   (c) $[-17, -7[$
   (d) $[-15; 14[$

Exercice 134. *Écrire une inégalité vérifiée par* x *et utilisant une valeur absolue dans les cas suivants :*

1. $x \in [-8; 10]$
2. $x \in [0; 1, 1]$

3. $x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$

Correction 67. 1. Pour $[-8;10]$, le rayon est $\frac{10-(-8)}{2} = 9$ et le centre est $10 - 9 = 1$ donc $x \in [-8;10] \iff |x-1| \leq 9$.

2. Pour $[0;1,1]$, le rayon est $\frac{1,1-0}{2} = \frac{11}{20}$ et le centre est $0 + \frac{11}{20} = \frac{11}{20}$ donc $x \in [0;1,1] \iff |x - \frac{11}{20}| \leq \frac{11}{20}$.

3. Pour $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, le rayon est $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$ et le centre est $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ donc $x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}] \iff |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{6}$.

Exercice 135. *Rémi a gagné au loto, il a le choix entre deux lots :*

- *Une somme de 100 000 euros, puis 1400 euros par mois à vie.*
- *Une somme de 5000 euros, puis 2000 euros à vie.*

Comparer ces deux offres en fonctions du nombres de mois passés.

Correction 68. Notons m le nombre de mois, puis posons $A = 100000 + 1400m$ et $B = 5000 + 2000m$.

$$\begin{aligned}
A \geq B &\iff 100000 + 1400m \geq 5000 + 2000m \\
&\iff 95000 \geq 2000m - 1400m \\
&\iff 95000 \geq 600m \\
&\iff \frac{95000}{600} \geq m \\
&\iff \frac{950}{6} \geq m
\end{aligned}$$

Or $\frac{950}{6} \simeq 158,33$. On a donc :

- $A = B$ si $m = \frac{950}{6}$.
- $A \geq B$ si $m \geq \frac{950}{6}$.
- $A \leq B$ si $m \leq \frac{950}{6}$.

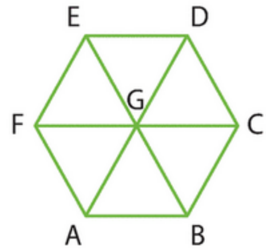
Ainsi, la première offre est plus avantageuse les 158 premiers mois, donc pendant 13 ans et 2 mois. Après ce laps de temps, la deuxième est plus avantageuse.

15.8 Vecteurs du plan

15.8.1 Notions de vecteurs

Exercice 136.

76 On considère ci-dessous l'hexagone régulier ABCDEF de centre G.



1. Citer un vecteur qui a même direction que le vecteur $\overrightarrow{FG}$ mais pas le même sens.
2. Citer le représentant d'origine G du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
3. Citer deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AF}$.

Exercice 137. *Soit ABC un triangle. Construire D, E, F tels que :*

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BA}$.

Exercice 138. *Construire :*

1. *un triangle ABC tel que $AB = 4cm$, $BC = 5cm$ et $AC = 2,5cm$.*
2. *le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{AC}$.*
3. *le représentant d'extrémité A du vecteur $\overrightarrow{BC}$.*

Exercice 139. *$ABCD$ et $ABEF$ sont des parallélogrammes.*

1. *Construire une figure.*
2. *Citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.*
3. *Démontrer que $CDFE$ est un parallélogramme.*

Exercice 140. 1. *Construire un carré $ABCD$ de centre O.*

2. *Construire le point E tel que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{EB}$ et le point F tel que $[OC]$ et $[BF]$ ont le même milieu.*

3. *Démontrer que* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$.
4. *Que peut-on en déduire pour le quadrilatère* $AECF$ *?*
5. *En déduire que* O *est le milieu de* $[EF]$.

15.8.2 Vecteurs 2

Égalité de vecteurs

Exercice 141. *ABC un triangle. On nomme F l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et G l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.*

1. *Prouver que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BF}$*
2. *Qu'en déduit-on pour le point B ?*

Exercice 142.

1. *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, dessiner un contre-exemple.*
   (a) *Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*
   (b) *Si $AB = CD$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.*
   (c) *Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors A, B, C sont alignés.*
2. *Écrire la réciproque de chaque des affirmations du 1. puis dire si elles sont vraies ou fausses.*

Somme de vecteurs

Exercice 143. *Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On rappelle que le centre d'un parallélogramme est le point de rencontre des diagonales. Faire un dessin puis, compléter :*

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{...}$
2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{...}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{...}$
4. $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{...}$

Exercice 144. *On considère un quadrilatère $ABCD$. Construire un représentant des vecteurs suivants :*

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$
3. $-\overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$

Exercice 145. *Soient $ABCD$ un parallélogramme de centre O, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, et K le milieu de $[DC]$.*
Faire un dessin de la situation puis, représenter, dans une couleur différente, les vecteurs :

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{JC}$
2. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{KD}$
3. $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$
4. $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{JK}$

Relation de Chasles et propriétés algébriques

Exercice 146. *Simplifier les écritures vectorielles suivantes :*

1. $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR}$
2. $\overrightarrow{BV} - \overrightarrow{CV}$
3. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CF}$
4. $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DB}$

Exercice 147. 1. *Soit ABC un triangle. Faire une figure.*

2. *Construire le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.*
3. *Justifier pourquoi ce vecteur est égal à $\overrightarrow{AC}$.*

Exercice 148. *Soit I le milieu de $[AB]$. Compléter :*

1. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{...}$
2. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{...}$

Exercice 149. *$ABCD$ un rectangle de centre O. Faire une figure.*

1. *Construire le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$.*
2. *En utilisant un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OC}$.*
3. *De la même manière, montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$.*

Exercice 150. *Montrer que quels que soient les point A, B, C et D, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.*

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Exercice 151. *A et B deux points distincts. Placer les points M, N, P et Q tels que :*

1. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AB}$

Exercice 152.

1. *Tracer un vecteur $\overrightarrow{u}$ de votre choix.*
2. *Construire les vecteurs $3\overrightarrow{u}$, $-5\overrightarrow{u}$, $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{u}$ et $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{u}$.*
3. *Construire les vecteurs $2,5\overrightarrow{u}$, $-0,5\overrightarrow{u}$, $3,25\overrightarrow{u}$ et $-1,75\overrightarrow{u}$.*

Exercice 153. *Soit ABC un triangle.*

1. *Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$.*
2. *Démontrer que les points D, E, C sont alignés.*

Exercice 154. *Soit ABC un triangle.*

1. *Construire le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CB}$*
2. *Montrer que les points A, C, G sont alignés.*

15.9 Statistiques descriptives

15.9.1 Fiche n°1

Exercice 155. *Une usine fabrique des pièces métalliques qu'elle référence par un code (A 42.00 par exemple). Le tableau ci-contre indique le nombre de pièces fabriquées pour chaque référence.*

Référence des pièces	*A 42.00*	*A 38.01*	*E 27.05*	*C 15.00*
Quantité	*3800*	*2700*	*2200*	*1300*
Fréquence				

1. *Quelle est la population étudiée dans cette série statistique ?*
2. *Quel est le type du caractère étudié ?*
3. *Compléter la colonne des fréquences en détaillant au moins un calcul.*

Exercice 156. *25 élèves ont passé un test noté sur 10. Les résultats de ce test sont donnés dans le tableau ci-dessous.*

1. *Recopier et compléter le tableau avec les effectifs cumulés croissants, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.*

Note	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Effectif	*1*	*0*	*1*	*1*	*3*	*4*	*6*	*4*	*3*	*1*	*1*

2. *Combien d'élèves ont une note inférieure ou égale à 6 ?*
3. *Quelle est la proportion (exprimée en pourcentages) d'élèves n'ayant pas obtenu la moyenne ?*
4. *Quelle est la proportion des élèves ayant obtenu la note maximale ?*

Exercice 157. *Le tableau ci-dessous donne le nombre d'enfants par la famille dans une commune.*

Nombre d'enfants	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Effectif	*116*	*98*	*61*	*22*	*13*	*4*

1. *Quelle est la population étudiée ?*
2. *Préciser le caractère étudié et son type.*
3. *Compléter ce tableau par les effectifs cumulés croissants, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.*

15.9.2 Fiche n°2

Exercice 158. *Dans une salle d'escape game, deux jeux sont proposés à des tarifs différents par groupe selon le jeu et le jour. Le tarif est réduit hors week-end et vacances scolaires.*

1. *1er jeu : Le tarif réduit est de 115 euros, il est choisi par* 18% *des groupes, et le plein tarif est de 130 euros, il est choisi par un quart des groupes.*

2. *2ème jeu : le tarif réduit est de 205 euros, il est choisi par* 24% *des groupes, et le plein tarif est de 220 euros, il est choisi par* 33% *des groupes.*

Quel est le prix moyen payé par groupe ?

Exercice 159. *Un fournisseur d'électricité propose un tarif heure creuse/heures pleines : 0,147 euros par kWh en heures creuses et 0,1841 euros par kWh en heures pleines.*

1. *Une famille a calculé que* 40% *de sa consommation se fait en heures creuses et le reste en heures pleines. Calculer le prix moyen du kWh pour cette famille.*

2. *Ce fournisseur d'électricité propose un autre tarif dit « de base »où tout kWh coûte 0,174 euros. Par ailleurs, pour le tarif de base, il faut payer un abonnement annuel de 169,89 euros et pour l'autre tarif, l'abonnement coûte 183,63 euros.*
   À partir de combien de kWh consommés cette famille est-elle gagnante avec le tarif heures pleines/heures creuses ?

Exercice 160. *Dans une entreprise, le salaire mensuel moyen est de 2102 euros. L'entreprise annonce qu'elle va verser une prise de 150 euros à tous ses employés le mois prochain. Quel sera alors le revenu moyen (salaire plus prime) des employés de cette entreprise ?*

Exercice 161. *Dans un supermarché, les personnes ayant la carte du magasin peuvent économiser une certaine somme d'argent en faisant leurs courses. En moyenne, les clients économisent 2,53 euros par passage en caisse.*
Pour faire la promotion du magasin, la gérante a décidé qu'aujourd'hui tous les clients bénéficieraient d'un bonus de 10% *sur la somme économisée. Quel sera alors le gain moyen économisé par passage en caisse.*

Exercice 162. *Calculer l'écart-type de chaque série.*

1. *125 ;36 ;12 ;5 ;52 ;64 ;1*

2.

Valeurs	*-5*	*-2*	*1*	*6*	*8*
Effectif	*3*	*4*	*15*	*1*	*9*

Exercice 163. *Les opérateurs téléphoniques doivent mettre à disposition de leurs clientss une offre de service en langage des signes françaises. Le rapport du troisième trimestre 2022 de l'ARCEP donne les données à ce service par les utilisateurs.*

Note	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Effectif	*1239*	*384*	*1135*	*3182*	*21 909*

1. *Calculer la moyenne m et l'écart-type s des notes.*
2. *Quel pourcentage des notes se trouvent dans l'intervalle $[m-2s; m+2s]$?*

Exercice 164. *On considère les séries statistiques des nombre de licences féminines et masculines dans les fédérations unisport olympique en France en 2021. Les minimums, maximum, quartiles et médianes sont donnés ci-dessous.*

	Licence féminine	*Licence masculine*
Minimum	*830*	*1 242*
Q_1	*11 634*	*18 553*
Minimum	*29 402*	*50 756*
Q_3	*113 705*	*154 139*
Maximum	*557 724*	*1 722 059*

1. *Calculer et interpréter les écarts interquartiles des deux séries.*
2. *Quelle proportion approximative des fédérations ont :*
   (a) *un nombre de licenciées féminines compris entre 830 et 11 634 ?*
   (b) *un nombre de licenciés masculins compris entre 18 553 et 154 139 ?*
3. *Comparer ces deux séries à l'aide des indicateurs présents dans ce tableau.*

Ce trimestre, Joshua n'a eu que des notes sur 20 en SES mais elles ne sont pas toutes **coefficientées** de la même façon. Son professeur lui a expliqué qu'une note coefficient 0,5 comptait comme une note sur $0,5 \times 20 = 10$, qu'une note coefficient 3 comptait comme une note sur $3 \times 20 = 60$.

1. Sur les cinq notes sur 20 du trimestre, Joshua a eu :

• 17 coefficient 2 • 15 et 14 coefficient 1 • 5 coefficient 0,5 • 4 coefficient 0,25.

a) Recopier et compléter la phrase suivante :

Obtenir 17 coefficient 2 compte comme **...** sur 40.

b) Faire de même avec toutes les notes dont le coefficient n'est pas 1.

c) En déduire la note trimestrielle en SES de Joshua sur 95.

d) Par combien faut-il diviser cette note trimestrielle sur 95 pour la ramener sur 20 ? Quel est le lien avec les coefficients des cinq notes ?

2. Expliquer pourquoi la moyenne de Joshua est si haute malgré ces deux « mauvaises » notes.

3. En un seul calcul, déterminer la moyenne d'un élève ayant obtenu :

• 12 coefficient 3 • 9 et 16 coefficient 2 • 13 coefficient 0,75.

15.9.3 Proportion de proportion

Exercice 165. *La carte d'un restaurant est composée pour moitié de plats. Parmi eux,* 20% *sont végétariens. Déterminer la proportion de plats végétariens dans la carte du restaurant.*

Exercice 166. *Dans un lycée,* 30% *des élèves s'orientent en filière technologique en fin de Seconde. Parmi eux,* 40% *vont en série STMG.*

1. *Déterminer la proportion des élèves s'orientant en STMG parmi l'ensemble des élèves de seconde.*
2. *54 élèves vont en série STMG. Combien d'élèves de Seconde y a-t-il dans le lycée ?*

Exercice 167. *Un concours de talent se déroule en trois étapes.* 15% *des candidats qui se présentent sont retenus après la première étape, et* 20% *des candidats sont sélectionnés sont retenus après la deuxième étape. Pour la troisième étape, le jury retient les trois meilleurs candidats.*

1. *Déterminer la proportion des candidats retenus après la deuxième étape parmi tous les candidats.*
2. *Sachant qu'il y avait 600 candidats au début du concours, quel pourcentage des candidats de la troisième étape les trois meilleurs candidats représentent-ils ? Arrondir le résultat à* $0,1\%$ *près.*

Exercice 168. *En 2020, selon une étude de l'INSEE* $17,6\%$ *des salariés travaillaient à temps partiel.*
La proportion de femmes salariées à temps partiel parmi l'ensemble des salariés était alors $13,9\%$*.*

1. *Déterminer la proportion de femmes parmi les salariés à temps partiel en 2020.*
2. *On considère qu'il y avait 40 millions de travailleurs en 2020, combien de femmes travaillaient à temps partiel ?*

15.9.4 Activité coefficient multiplicateur

Exercice 169.

1. Le nombre représenté par 7 % est :

☐ 7 ☐ 0,7 ☐ 0,07 ☐ 1,07

2. Un département français a un taux de réussite au baccalauréat de 90 %. Sachant que 2 000 élèves ont passé le baccalauréat dans ce département, combien d'élèves l'ont obtenu ?

☐ 900 ☐ 1800 ☐ 1910 ☐ 1990

3. Un article coûtait 110 € avant les soldes. Après les soldes, il coûte 88 €. Quel est le taux de réduction qui a été appliqué ?

☐ 12 % ☐ 20 % ☐ 22 % ☐ 25 %

4. Le taux de chômage d'un pays est le pourcentage de chômeurs dans la population active. On cherche à comparer les taux de chômage de trois pays A, B et C à partir des informations suivantes :

- Le pays A compte 3 millions de chômeurs pour 30 millions d'actifs.
- Le pays B compte 4 millions de chômeurs pour 50 millions d'actifs.
- Le nombre de chômeurs du pays C représente 9 % de sa population active.

Si on range ces trois pays selon l'ordre croissant de leur taux de chômage, on obtient :

☐ A-B-C ☐ B-C-A ☐ A-C-B ☐ C-B-A *(Source : MEN-SG-DEPP)*

5. Étant en difficulté l'an passé, une entreprise a diminué la prime annuelle de ses employés de 50 %. Cette année, une amélioration de la situation conduit la direction à augmenter la prime de 50 %.

La prime va revenir à son niveau d'avant les difficultés.

☐ Vrai ☐ Faux

6. Pendant la période des soldes, un magasin affiche 70 % de réduction et 20 % de réduction supplémentaire. Un article coûtait 80 € avant les soldes. Quel est son prix après les deux réductions ?

☐ 8 € ☐ 11,20 € ☐ 19,20 € ☐ 44,80 €

7. Un autre magasin affiche 60 % de réduction et 40 % de réduction supplémentaire. Un article coûtait 120 €. Quel est son prix après les deux réductions ?

☐ 0 € ☐ 20 € ☐28,80 € ☐ 43,2 €

8. Un troisième magasin affiche 70 % de réduction et 50 % de réduction supplémentaire. Un article coûtait 100 €. Quel est son prix après les deux réductions ?

☐ 15 € ☐ 35 € ☐ il est gratuit ☐ il est gratuit et on reçoit un bon d'achat de 20 €

9. Un magasin de vélos électriques propose la promotion suivante : 10 % de réduction sur tous les modèles. Paiement de 40 % du vélo à l'achat et le reste sur quatre mensualités identiques. Quel sera le montant de chaque mensualité pour un vélo coûtant 800 € avant la promotion ?

☐ 72 € ☐ 80 € ☐ 100 € ☐ 108 €

Exercice 170. *Une entreprise donne à ses salariés une prime trimestrielle. En raison d'un ralentissement de l'activité économique, l'entreprise se retrouve fragilisée. La directrice de l'entreprise décide alors de baisser le montant de la prime trimestrielle de* 30%. *Les salariés acceptent cette décision pour sauver leur entreprise et leurs emplois.*

L'année suivante, la situation économique de l'entreprise commence à s'améliorer. La directrice décide alors d'augmenter la prime de 7% *chaque trimestre de l'année, afin de compenser progressivement la baisse de l'année précédente.*
Les salariés contestent cette augmentation et demandent une augmentation progressive de la prime de 10% *à chacun des trimestres.*

Étudier la situation. Une des propositions permet-elle de revenir à la situation de départ ?

15.9.5 Fiche d'exercice finale

Exercice 171. *1. Un opérateur téléphonique propose un forfait mobile de* 15 *euros.*

   (a) Si le prix du forfait augmente de 12%*, par quel nombre sera t'il multiplié ?*

   (b) Quel sera le nouveau prix ?

2. L'opérateur propose également des abonnements internet avec la fibre à 40 euros par mois.
Si le prix de l'abonnement baisse de 5%*, quel sera le nouveau prix ?*

Exercice 172. *Le prix d'un téléphone baisse de* 40% *lors d'une promotion.*
Le prix après réduction est de 135 *euros.*
Quel était le prix avant réduction ?

Exercice 173. *1. Un prix augmente de* 10% *puis baisse de* 40%*.*

   (a) Calculer le coefficient multiplicateur global.

   (b) En déduire le taux d'évolution global.

2. Reprendre les questions précédentes pour les cas suivants.

   (a) Une baisse de 20% *puis une hausse de* 10%*.*

   (b) Une baisse de 13% *puis une hausse de* $24,3\%$*.*

   (c) Une baisse de 70% *puis une hausse de* 200%*.*

Exercice 174. *Lorsque l'on tire sur un ressort, sa longueur augmente de* 86%*. De quel pourcentage diminue-t-elle lorsque le ressort retourne à sa position initiale ? Arrondir à* $0,01\%$ *près.*

Exercice 175. *Le cours d'une action en bourse s'écroule mardi et chute de* 70%*. De quel pourcentage faut-il qu'il augmente mercredi pour compenser cette chute ? Arrondir à* $0,1\%$ *près.*

Exercice 176. *On considère un lycée dans lequel* 30% *des élèves sont en Seconde. Parmi eux,* 8% *ont fait leur stage de Troisième dans une pharmacie.*

1. Déterminer la proportion d'élèves de Seconde ayant fait leur stage dans une pharmacie parmi tous les élèves du lycée.

2. On sait que $1,8\%$ *des élèves du lycée sont en Seconde et on fait leur stage dans un restaurant.*
Quel est le pourcentage d'élèves ayant fait un stage dans un restaurant parmi les élèves de Seconde ?

Exercice 177. *1. On considère un rectangle. On diminue de* 25% *sa longueur et de* 75% *sa largeur. De quel pourcentage a diminué son aire ?*

2. On considère un carré. On augmente la longueur de ses côtés d'un même pourcentage, afin que l'aire augmente de 96%*. De quel pourcentage a-t-on augmenté les côtés ?*

Exercice 178. *Une ville comptait* 12500 *habitants en 2022. On prévoit que chaque année, le nombre d'habitants augmente de* 5% *par rapport à l'année précédente.*

1. *Quel sera le nombre d'habitants en 2023 ?*
2. *On note $u(n)$ la population en $2022 + n$. Ainsi $u(0)$ est la population en* 2022*, $u(1)$ la population en* 2023.
   (a) *Donner la valeur de $u(0)$ et $u(1)$.*
   (b) *Donner la valeur de $u(2)$ et son interprétation.*
   (c) *Donner la valeur de $u(3)$ et son interprétation.*
   (d) *Déterminer une expression de $u(n)$ en fonction de n.*
3. *Déterminer en quelle année le nombre d'habitant dépassera 20 000.*

15.10 Probabilité sur un ensemble fini

15.10.1 Fiche n°1

Exercice 179.

L'expérience aléatoire consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés (un rouge et un jaune). On s'intéresse au couple formé par les numéros sur les faces supérieures des deux dés.

1. Dans un tableau à double entrée, recenser toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire. Combien d'issues possibles obtient-on ? Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

2. Déterminer la probabilité de l'événement A « obtenir un couple avec deux nombres pairs », puis celle de l'événement B « obtenir la face 4 sur le dé rouge ».

3. a. Traduire l'événement $A \cap B$ par une phrase puis déterminer la probabilité $P(A \cap B)$.

b. En déduire $P(A \cup B)$. Interpréter cette probabilité.

Exercice 180.

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée.
On note F l'événement « obtenir Face » et $\overline{F}$ son événement contraire.

1. Faire un arbre permettant de lister les issues possibles.

2. Définir l'univers de cette expérience aléatoire.

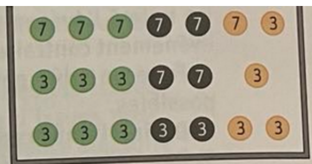
3. Déterminer la probabilité de l'événement A « obtenir deux fois Face ».

4. Déterminer la probabilité de l'événement B « obtenir deux faces différentes ».

5. Déterminer la probabilité de l'événement $\overline{B}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 181.

On dispose d'une urne qui contient :
– 8 jetons numérotés 7 dont 3 sont verts, 4 sont noirs et 1 est jaune ;
– 12 jetons numérotés 3 dont 6 sont verts, 2 sont noirs et les autres jaunes.



Tous les jetons sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard un jeton dans l'urne pour s'intéresser à sa couleur et à son numéro.

1. Dresser un tableau à double entrée pour regrouper les données de l'énoncé.

2. Indiquer l'univers de cette expérience aléatoire.

3. Déterminer la probabilité des événements :

a. A « obtenir un jeton numéroté 7 » ;

b. V « obtenir un jeton vert » , puis N « obtenir un jeton noir ».

4. Calculer $P(\overline{A})$ et traduire cette probabilité par une phrase.

5. Traduire par une phrase l'événement $A \cap N$, puis déterminer sa probabilité.

6. Calculer $P(A \cup N)$.

Exercice 182.

Dans une entreprise du bâtiment de 360 employés, on a observé que 35 % des employés sont des cadres et 45 % sont des femmes. Parmi elles, seules 48 sont des cadres. On choisit une personne au hasard. On note F l'événement « la personne choisie est une femme » et C l'événement « la personne choisie est un cadre ».

1. Réaliser un diagramme de Venn permettant de regrouper les données de l'énoncé.

2. Déterminer $P(\overline{F})$ et $P(C)$.

3. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme cadre.

4. Traduire par une phrase l'événement $\overline{F} \cap \overline{C}$, puis calculer sa probabilité.

5. À l'aide des événements F et C, traduire l'événement « la personne choisie est un homme cadre », puis calculer sa probabilité.

Exercice 183.

Partie B. Relevés météorologiques

On s'intéresse aux relevés de température et de pluviométrie à Paris-Montsouris durant les mois de janvier 2014, 2015, 2016, 2017 et 2018. On considère que la journée a été douce si la température moyenne de la journée était supérieure à 5 °C.

On choisit une journée au hasard. On note D l'événement « la journée a été douce » et S l'événement « il n'a pas plu durant cette journée (journée sèche) ».

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

	Journée pluvieuse $(\overline{S})$	Journée sèche (S)	Total
Journée douce (D)	80	35	115
Journée froide $(\overline{D})$	14	26	40
Total	94	61	155

Source https://www.terre-net.fr/meteo-agricole/historique-consultation/paris/2988507

1. Déterminer $P(\overline{D})$ et $P(S)$.

2. Traduire l'événement « la journée choisie a été froide et sans pluie » à l'aide des événements D et S, puis calculer sa probabilité.

3. Calculer sa probabilité $P(\overline{D} \cup S)$.

4. Si la journée a été froide, calculer la probabilité qu'il ait plu.

5. Peut-on affirmer qu'il y aura 8 jours de froid au cours du mois de janvier 2020 ?

Exercice 184.

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : une rose, une noire, une bleue et une jaune. On tire une boule au hasard, puis on la remet. On effectue ensuite un deuxième tirage.

1. Faire un arbre listant les issues possibles de l'univers.

2. Déterminer la probabilité des événements :

- I « n'obtenir que des boules de couleurs identiques » ;
- D « obtenir des boules de couleurs différentes » ;
- B « obtenir au moins une boule bleue ».

3. Au lieu de faire deux tirages, on fait trois tirages consécutifs mais sans remise. Répondre aux mêmes questions.

15.10.2 Fiche n°2

Exercice 185.

72 On lance cinq fois une pièce de monnaie.
La sortie de *Pile* rapporte 1 point. La sortie de *Face* ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à la suite des cinq lancers.

1. Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2. Préciser le nombre d'issues qui le composent.
3. Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

Exercice 186.

75 Soit un dé pipé dont la loi de probabilité est la suivante.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,15	0,25	0,2

Calculer la probabilité des événements suivants.
- A : « La face obtenue est impaire. »
- B : «La face obtenue est supérieure ou égale à 5.»

Exercice 187.

81 Un univers associé à une expérience aléatoire est constitué de trois issues A, B et C.
La loi de probabilité vérifie $p(\text{A}) = t^2$, $p(\text{B}) = t$ et $p(\text{C}) = \dfrac{1}{4}$
Déterminer t.

Exercice 188.

93 **1.** On lance un dé cubique. Exprimer simplement le contraire des événements suivants.

- A : « Le résultat du dé est pair. »
- B : « Le résultat du dé est supérieur ou égal à 5. »
- C : « Le résultat du dé est un multiple de 3 ou de 5. »

2. Exprimer simplement les événements suivants.

a) $A \cap B$ **b)** $\overline{A} \cap C$ **c)** $\overline{A \cup C}$

Exercice 189.

100 Soit S et T deux événements tels que $p(S) = 0{,}5$, $p(T) = 0{,}6$ et $p(S \cup T) = 0{,}9$. Calculer les probabilités suivantes.

a) $p(S \cap T)$ **b)** $p(\overline{S \cup T})$ **c)** $p(\overline{S \cap T})$

Exercice 190.

107 Gabriel possède deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4. Il lance les deux dés et note le produit des deux nombres obtenus.

1. Représenter la situation par un tableau à double entrée.

2. Déterminer l'univers.

3. Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 5.

Exercice 191.

111 Un sac contient quatre jetons sur lesquels sont indiqués les numéros -2 ; -1 ; 1 et 2. On tire au hasard successivement et sans remise deux jetons du sac.

1. Représenter la situation par un arbre.

2. Quelle est la probabilité que :

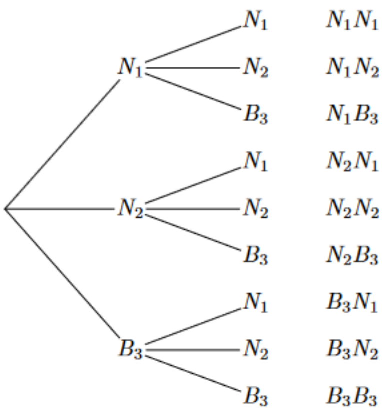
a) la somme des deux nombres obtenus soit nulle ?

b) la somme des deux nombres soit égale à -3 ?

15.10.3 Fiche de révision statistiques et probabilités

E.4 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche ; chacune d'elles est numérotée de 1 à 3. Le jeu consiste à tirer deux boules successivement avec remise : c'est-à-dire une première boule est tirée, puis remise dans l'urne avant de tirer une seconde boule.

Voici un arbre de décision basé sur le tirage de deux boules :



Une fois tirées les deux boules, on considère les deux couleurs obtenues et leur ordre de tirage

1. Combien d'événements élémentaires composent cette expérience aléatoire?
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   a. A : "*La première boule tirée est blanche*".
   b. B : "*Les deux boules tirées sont de couleurs différentes*".
   c. C : "*La seconde boule est une boule noire*".

Exercice 192.

Voici les derniers résultats au devoir de mathématiques de **35** élèves d'une classe de seconde :

Notes	5	7	8	10	11	13	14	15	16	18
Effectifs	2	4	4	6	4	3	5	2	3	2

1. Calculer la moyenne de cette série, arrondie au centième.

2. Calculer la médiane de cette série. Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

3. Calculer les quartiles Q_1 et Q_3.

4. L'enseignant décide d'ajouter un point à tous les élèves. Quelle sera la nouvelle moyenne à ce devoir?

5. Les notes de Tristan sur les cinq devoirs du trimestre sont :
   - **15** et **19** coefficient **1**;
   - **16** coefficient **2**;
   - **15** et **18** coefficient **3**.

   a. Quelle est la moyenne de Tristan ?

   b. Quelle doit être sa note au prochain devoir, qui sera coefficient **2**, pour obtenir **17** de moyenne?

Exercice 193.

Exercice 194. 1. *Une urne contient des boules jaunes, des rouges et des vertes. Un tiers des boules sont vertes et il y a deux fois plus de boules rouges que jaunes.*
On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur. Quelle est la loi de probabilité de cette expérience aléatoire ?

2. *Un dé cubique mal équilibré tombe deux fois plus souvent sur 6 que sur les autres faces qui, elles, tombent à la même fréquence.*
Quelle est la loi de probabilité des résultats de ce dé à six faces ?

Exercice 195. *On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 puis un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4. On considère le nombre de deux chiffres ainsi formé (le chiffre des dizaines est donnée par le dé cubique).*

1. *Quelle est probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?*

2. *Est-ce que cette probabilité est la même si on inverse les lancers de dé (c'est-à-dire si le chiffre des dizaines est donné par le dé tétraédrique) ?*

Exercice 196. *Un club pour adolescent organise des activités pour les vacances. Il propose une activité kayak, une activité escalade et une activité vélo. 160 adolescents participent au club. Parmi eux* $57,5\%$ *sont des filles.* 45% *des adolescents se sont inscrits à l'activité vélo. Il y a autant d'inscrits à l'activité escalade qu'à l'activité kayak. Un quart des garçons a choisi l'escalade et* 75% *des filles n'ont pas choisi le kayak.*

1. *Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant.*

	Kayak	Escalade	Vélo	Total
Filles				
Garçons				
Total				160

2. *On choisit au hasard un adolescent du club. On considère les évènements suivants :*

   - F *: « L'adolescent choisi est une fille. »*
   - K *: « L'adolescent s'est inscrit à l'activité kayak. »*
   - E *: « L'adolescent s'est inscrit à l'activité escalade »*

   (a) *Déterminer* $P(E), P(F)$ *et* $P(K)$.

   (b) *Décrire par une phrase les évènements :* $\overline{F} \cap K$, $F \cap \overline{K}$, $\overline{F} \cup E$, $\overline{K} \cap \overline{E}$ *et* $F \cup K$

   (c) *Calculer les probabilités des évènements précédents.*

3. *On choisit un adolescent au hasard parmi ceux inscrits à l'activité vélo. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?*

15.11 Fonction de références

15.11.1 Évaluation diagnostique

Énoncé

Exercice 197. *Soit f une fonction affine de la forme :* $f(x) = 3x + 2$

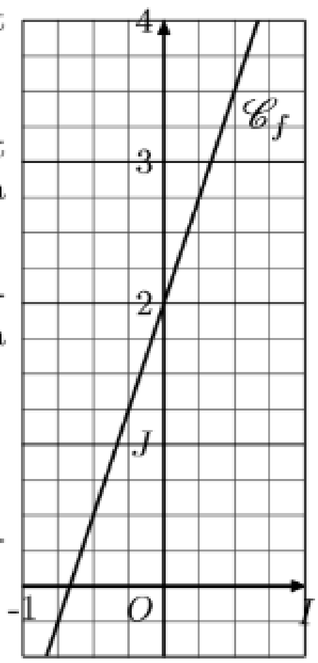
1. *Calculer l'image de* $3,5$ *par* f.
2. *Le point* $(1, 6)$ *appartient-il à la courbe représentant* f *?*
3. *Calculer l'antécédent de* 4 *par* f.

Exercice 198.

On considère la fonction affine f dont l'image de x s'exprime par :

$$f(x) = 3x + 2$$

Dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-contre, est donnée la droite $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Graphiquement, donner l'antécédent du nombre 0,5 par la fonction f.
2. a. Résoudre l'équation : $f(x)=8$

   b. En déduire l'antécédent du nombre 8 par la fonction f

Capacités attendues

Les deux exercices qui ont la même structure étaient là pour vérifier que le vocabulaire d'analyse (image, antécédent, concept d'une fonction) était acquis. On rappelle, toutefois, qu'un chapitre sur les fonctions affines fut réalisé au premier trimestre.
On en profitait à la question 2 pour réactiver les connaissances autour de l'équation de la courbe représentative de f, $y = f(x)$.

La dernière question était aussi l'occasion de vérifier les acquis autour des équations du premier degré.
Le premier exercice proposait une résolution algébrique tandis que le second était là pour proposer une résolution graphique plutôt qu'algébrique.

Analyse des rendus des éléves

Plusieurs interprétations sont possibles quant aux raisons des erreurs :

1. Le vocabulaire n'est pas acquis, il en résulte une incompréhension des questions autour des images et antécédent. Ce manque est assez problématique, car il ne permet pas de repérer les lacunes existantes du fait que les exercices ne peuvent être entamés.

2. Les techniques autour des équations du premier ne sont pas acquises. De ce fait, des erreurs de calcul surviennent.

3. L'expression algébrique d'une fonction et ses incidences ne sont pas maitrisées.

4. La définition $\mathcal{C}_f = \{(x; f(x))\}$ n'est pas comprise, ainsi le lien entre représentation graphique et expression algébrique n'est pas réalisé.

15.12 Travail transitionnel

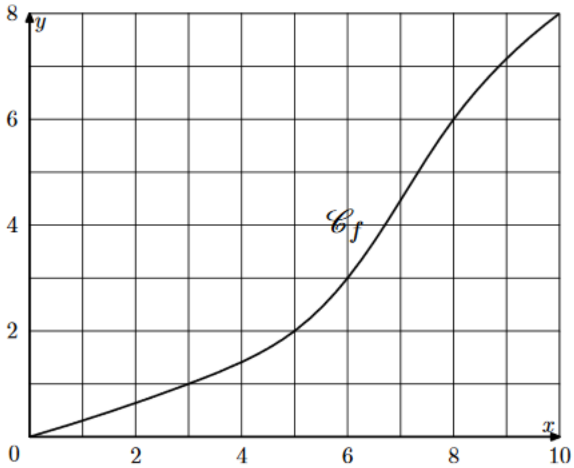
On propose plusieurs exercices différents en fonction des manques repérés.

15.12.1 Erreur 1

Pour le 1, on insistera sur la nécessité d'apprendre le cours et le vocabulaire dispensé. On proposera, toutefois, aussi les conseils qui suivent à ce type d'élève.

Exercice 199.

E.6 Dans le repère ci-dessous, est représentée la courbe représentative de la fonction f.



On note $f(x)$ l'image du nombre x par la fonction f.

1. a. Compléter le tableau suivant :

x	0	3	6	8	10
$f(x)$					

   b. Donner un antécédent du nombre 6 par la fonction f.

2. Donner un antécédent du nombre 2 par la fonction f.

3. Déterminer une valeur approchée de l'antécédent de 4 ; c'est-à-dire la valeur approchée d'un nombre x vérifiant $f(x) = 4$.

Exercice 200.

E.10 On a utilisé une feuille de calcul pour obtenir les images de différentes valeurs de x par une fonction f.
Voici une copie de l'écran obtenu :

$B2$ f_x $\sum$ $=$ $=3\times B1-4$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$f(x)$	-10	-7	-4	-1	2	5	8

1. Quelle est l'image de -1 par la fonction f ?
2. Donner un 'antécédent du nombre 5 par la fonction f ?

15.12.2 Erreur 2

Pour le 2, on proposera des exercices techniques de collège autour de la résolution d'équation du premier degré. On insistera sur les règles autour de l'égalité et le statut de cette dernière (par exemple deux expressions littérales différentes égales représentent le même nombre).

Exercice 201.

E.4 Le chocolatier a vendu 315 boites dans la semaine. Chaque boite contient 19 chocolats. Une boîte vide coûte 200 F.

1. En supposant qu'un chocolat coûte 100 F.
   a. Calculer le prix d'une boîte de chocolats?
   b. En déduire combien rapporte la vente des 315 boîtes durant la semaine?
2. Quel devrait être le prix d'un chocolat si le chocolatier voulait vendre sa boîte 2 290 F?

Exercice 202.

E.10 On considère les deux programmes de calcul ci-dessous :

Programme A :	**Programme B :**
• Choisir un nombre ;	• Choisir un nombre ;
• Le Multiplier par 3 ;	• Y ajouter 3 ;
• Soustraire 4 ;	• Le multiplier par -2 ;
• Ecrire le résultat final.	• Ecrire le résultat final.

1. Soit x le nombre à choisir afin que ces deux programmes de calcul affichent le même résultat. Écrire l'équation vérifiée par le nombre x.
2. Résoudre l'équation précédente.

Exercice 203.

E.8 Résoudre les équations suivantes en détaillant votre démarche :

a. $2(x+5) = 3(2x-2)$　　b. $2(x-2) - 4(1-x) = 4$

c. $3(x-2) + 4 = 2 - x$　　d. $5(x+1) = 3(3-x)$

15.12.3 Erreur 3

Pour le 3, on reviendra à des exercices d'applications directes sur la définition de fonction, c'est-à-dire le fait qu'une fonction exprime l'évolution d'une quantité par rapport à une variable, évolution qui est linéaire ici.

Exercice 204.

Dans cet exercice, on considère le rectangle $ABCD$ ci-contre tel que son périmètre soit égal à $31\,cm$.

(1) (a) Si un tel rectangle a pour longueur $10\,cm$, quelle est sa largeur?

(b) Proposer une autre longueur et trouver la largeur correspondante.

(c) On appelle x la longueur AB.
En utilisant le fait que le périmètre de $ABCD$ est de $31\,cm$, exprimer la largeur BC en fonction de x.

(d) En déduire l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de x.

(2) On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x(15{,}5 - x)$

(a) Calculer $f(4)$.

(b) Vérifier qu'un antécédent de 52,5 est 5.

Exercice 205.

E.21 Pour ses 32 ans, Denis a acheté un vélo d'appartement afin de pouvoir s'entraîner pendant l'hiver. La fréquence cardiaque (FC) est le nombre de pulsations *(ou battements)* du coeur par minute

Denis souhaite connaître sa fréquence cardiaque maximale conseillée *(FCMC)* afin de ne pas la dépasser et ainsi de ménager son coeur. La FCMC d'un individu dépend de son âge a, exprimé en années, elle peut s'obtenir grâce à la formule suivante établie par Astrand et Ryhming :

Fréquence cardiaque maximale conseillée = 220-âge

On note $f(a)$ la FCMC en fonction de l'âge a, on a donc :
$f(a) = 220 - a$.

(1) (a) Vérifier que la FCMC de Denis est égale à 188 $^{\text{pulsations}}/_{\text{minute}}$.

(b) Comparer la FCMC de Denis avec la FCMC d'une personne de 15 ans.

(2) Après quelques recherches, Denis trouve une autre formule permettant d'obtenir sa FCMC de façon plus précise. Si a désigne l'âge d'un individu, sa FCMC peut être calculée à l'aide de la formule de Gellish :

Fréquence cardiaque maximale conseillée :
$= 191{,}5 - 0{,}007\times\text{âge}^2$

On note $g(a)$ la FCMC en fonction de l'âge a, on a donc :
$g(a) = 191{,}5 - 0{,}007\times a^2$

Denis utilise un tableur pour comparer les résultats obtenus à l'aide des deux formules :

B2 f_x $\sum$ = =220-A2

	A	B	C
1	Âge a	FCMC $f(a)$ (Astrand et Ryhming)	FCMC $g(a)$ (Gellish)
2	30	190	185,2
3	31	189	184,773
4	32	188	184,332
5	33	187	183,877

Quelle formule faut-il insérer dans la cellule `C2` puis recopier vers le bas, pour pouvoir compléter la colonne "FCMC $g(a)$ (Gellish)"?

15.12.4 Erreur 4

Pour le 4, on soumettra plutôt des exercices autour du tracé de courbe représentative de fonction (même si c'est le point important du chapitre qui arrive) ; on insistera sur la définition de la courbe $\mathcal{C}_f$ et sur le fait qu'un point de coordonnée $(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.

Exercice 206.

E.17

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f. Le point $A(x_A\,;y_A)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- x_A appartient à l'ensemble de définition de f $(x_A \in \mathcal{D}_f)$
- L'image de x_A est y_A $\quad (f(x_A) = y_A)$

On considère la fonction f dont l'expression est définie par la relation : $\quad f(x) = 2x^2 - 3x + 2$

Parmi les points ci-dessous, quels sont ceux qui appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :

$A(1\,;2)$; $B(4\,;22)$; $C(-1\,;9)$; $D(0\,;3)$

Justifier vos réponses

Exercice 207.

72 **1.** Soit la fonction h définie sur [0 ; 5] par $h(x) = 4 - (x - 3)^2$.

a) Construire un tableau de valeurs de la fonction h avec un pas de 0,5.

b) Tracer un repère. On prendra comme unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées.

c) Tracer la courbe de la fonction h.

15.13 Courbes de fonctions

Exercice 208. *On étudie la fonction carré k définie par* $k(x) = x^2$.

1. *Construire un tableau de valeurs pour la fonction k avec un pas de* 1 *sur l'intervalle* $[-6; 2]$.
2. *Tracer un repère orthogonal en prenant comme unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées.*
3. *Dans ce repère, placer les points de coordonnées* (x, x^2) *associés au tableau de valeurs puis tracer la courbe représentative de k sur* $[-6; 2]$.

Exercice 209. *On étudie la fonction racine carré g définie par* $g(x) = \sqrt{x}$.

1. *Construire un tableau de valeurs pour la fonction g avec les valeurs suivantes : 0 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100.*
2. *Tracer un repère orthogonal la courbe représentative de g sur* $[0; 100]$

Exercice 210. *On étudie la fonction cube j définie par* $j(x) = x^3$.

1. *Construire un tableau de valeurs pour la fonction k avec un pas de* 1 *sur l'intervalle* $[-5; 5]$.
2. *Tracer un repère orthogonal la courbe représentative de j sur* $[-5; 5]$.

Exercice 211. 1. *Tracer la courbe de la fonction cube sur* $[-3; 3]$.

2. *Déterminer graphiquement par la fonction cube :*
   (a) *l'image des nombres : 3 ; 2 ; -1 ; 2 ;*
   (b) *les éventuels antécédents de : 1 ; 0 ; -1 ; 5 ; -10 ; -27 ; 8*

Exercice 212. *On étudie la fonction inverse b définie par* $b(x) = \frac{1}{x}$.

1. *Construire un tableau de valeurs pour la fonction b avec les valeurs suivantes : -4 ; -3 ;-2 ; - 1 ;-0.5 ; -0.25 ; 0.25 ; 0.5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 .*
2. *Tracer un repère orthogonal la courbe représentative de b en prenant comme 1 cm sur l'ace des abscisse comme unité et 1 cm sur l'axe des ordonnées pour 0,5 unité.*

Exercice 213. *Soit la fonction h définie sur* $[0; 5]$ *par* $h(x) = 4 - (x - 3)^2$.

1. (a) *Construire un tableau de valeurs de la fonction h avec un pas de* $0, 5$.
   (b) *Tracer un repère. On prendra comme unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonées.*

(c) *Tracer la courbe de la fonction h.*

2. *Reprendre la question 1. avec la fonction $h : x \mapsto \frac{3}{x+1}$ sur $[0; 5]$.*

Exercice 214. *Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction défnie sur $[-4; -2[\cup] - 2; 3]$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$*

Exercice 215. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.*

1. (a) *Calculer l'image de 10 par f.*
   (b) *Le point $A(10; 1005)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?*

2. *Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse -2 qui appartient à la courbe représentative de f.*

Exercice 216. *On considère la fonction g définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x+6}{1+x}$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère. Le point $B(x_B; 5)$ appartient à $\mathcal{C}_g$. Déterminer l'abscisse du point B.*

Exercice 217. *On considère la fonction g définit sur $\mathcal{R}$ par $g(x) = (6x - 2)(3x + 5)$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.*

1. *Le point $M(\frac{2}{3}; 5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_g$?*

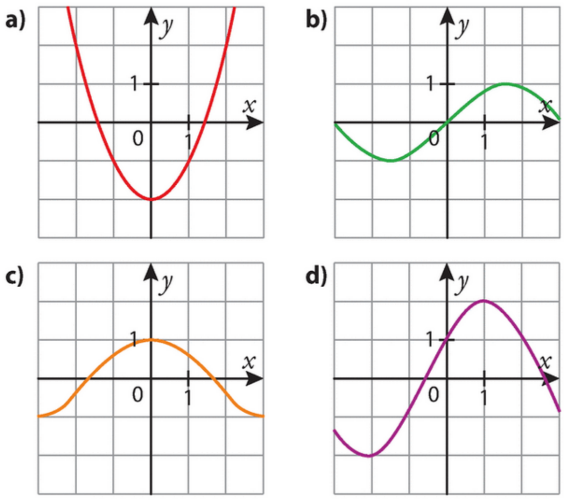
2. *Le point R a pour abscisse 2 et appartient à $\mathcal{C}_g$. Quelle est son ordonnée ?*

3. *Calculer les abscisses des points S et T appartenant à $\mathcal{C}_g$ tels que leurs ordonnées soient nulles.*

15.14 Parité et encadrement de nombres réels

Exercice 218.

104 Pour chacune des courbes ci-dessous, dire si elle semble être la courbe représentative d'une fonction paire, d'une fonction impaire ou d'une fonction qui n'est ni paire ni impaire.



Exercice 219. *Considérons une fonction f définie sur $[-3;3]$. On sait que $f(1) = 3$, $f(2,5) = 4$, $f(3) = 1$ et que f est paire.*
Tracer l'allure de la courbe possible pour f.

Exercice 220. *Considérons une fonction impaire f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(0) = 0$.*

Exercice 221. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x$.*

1. *Calculer les images de 1 et -1 par g.*
2. *La fonction g est-elle paire ?*
3. *La question précédente suffit-elle pour affirmer que g est impaire ?*
4. *Montrer que g est impaire.*

Exercice 222.

1. *Il existe deux nombres entiers égaux à leurs carrés. Lesquels ?*
2. *Tracer les courbes des fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ dans un repère orthogonal. Comparer x^2 et x.*

Exercice 223. *Considérons deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -4x - 4$.*

1. Dans un repère orthonormé, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

2. Conjecturer la comparaison de $f(x)$ et $g(x)$ selon les valeurs de x.

3. Factoriser la différence $f(x) - g(x)$ puis démontrer la conjecture précédente.

Exercice 224. *La distance entre le domicile de Lisa et son lieu de travail est de $60km$. Suivant les jours, elle met entre $1h15$ et $1h30$ pour effectuer le déplacement.*
On note t (en h) la durée en trajet et v (en $km.h^{-1}$) la vitesse moyenne de Lisa sur ce parcours.

1. Exprimer v en fonction de t

2. Donner un encadrement de t en heures.

3. En déduire un encadrement de v.

Exercice 225. *A l'intérieur d'un piston, la pression P, en bars, et le volume V, en litres, suivent la loi : $P \times V = 1$.*

1. Expliquer pourquoi cette loi est liée à la fonction inverse.

2. A l'intérieur du pisto, le volume peut varier entre 0,5 et 5 litres. Quelles sont les valeurs possibles pour la pression ?

Exercice 226. *Prenons f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$.*

1. Afficher à l'écran de la calculatrice, dans une même fenêtre, les courbes représentatives de f et g. Préciser la fenêtre utilisée.

2. Conjecturer la position relative de ces deux courbes.

3. Démontrer cette conjecture.

15.15 Résolution d'équations et d'inéquation

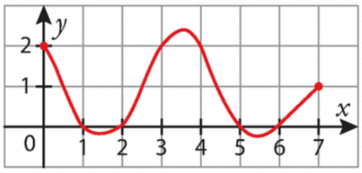
Exercice 227. 1. *Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentant la fonction carré.*

2. *Utiliser ce graphique pour déterminer dans chaque cas les nombres réels x tels que :*

   - $0 \leq x^2 \leq 3$.
   - $2 < x^2 \leq 16$
   - $x^2 \geq 7$

Exercice 228.

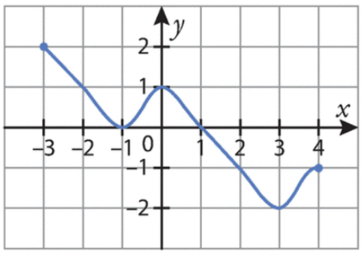
84 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$. Estimer les solutions des équations :



a) $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = 0$ **c)** $f(x) = -1$ **d)** $f(x) = 1$

Exercice 229.

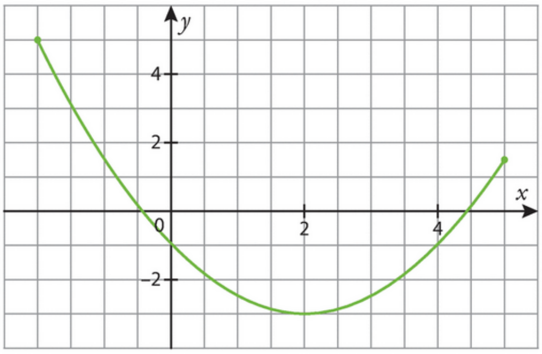
85 Voici la courbe représentative d'une fonction k définie sur $[-3\,;4]$. Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes.



a) $k(x) = 1$ **b)** $k(x) = 0$ **c)** $k(x) > -1$
d) $k(x) < 0$ **e)** $k(x) \geqslant -2$ **f)** $k(x) \geqslant 2$

Exercice 230.

89 On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 5]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$.



1. Estimer graphiquement les deux solutions de l'équation $f(x) = 1$.

2. Voici un tableau de valeurs de la fonction f.

x	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
$f(x)$	0,125	0,38	0,645	0,92	1,205	1,5

a) Donner un encadrement d'une des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

b) Quelle est la précision de cette approximation ?

3. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au dixième près, puis au centième près de l'autre solution.

Exercice 231.

93 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2x^2 - 14 = 22$ **b)** $x^3 - 13 = 102$

c) $3\sqrt{x} = 60$ **d)** $2x^3 + 15 = 71$

Exercice 232.

94 **1.** Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré.

a) 4 **b)** –3 **c)** 10^3 **d)** $\frac{1}{2}$

2. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction carré.

a) 6 **b)** 64 **c)** –2 **d)** 10^6

Exercice 233.

101 On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 6 < 8$.

1. Montrer que c'est équivalent à résoudre $x^2 < 1$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de $2x^2 + 6 < 8$.

Exercice 234. *On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 6 < 8$.*

1. *Montrer que c'est équivalent à résoudre* $x^2 < 1$.

2. *En déduire l'ensemble des solutions de* $2x^2 + 6 < 8$.

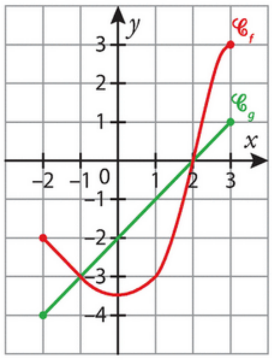
Exercice 235.

115 Voici les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-2\,;3]$. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a) $g(x) = f(x)$

b) $g(x) \leqslant f(x)$

c) $g(x) > f(x)$



15.16 Exercices d'approfondissement

Exercice 236. *Le prix de l'essence sans plomb est de 1,80 euro le litre. Marius veut faire le plein de sa voiture. Il compte mettre x litres dans son réservoir vide qui peut contenir 40 litres. La station dans laquelle il se sert ne délivre pas moins de 5 litres.*
On considère la fonction P qui à chaque valeur de x associe le prix payé par Marius.

1. *D'après le contexte de l'exercice, à quel intervalle x appartient-il ?*
2. *Quel est l'ensemble de définition de la fonction P ?*
3. *Déterminer l'expression algébrique de la fonction P.*

Exercice 237. *Considérons les fonctions $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \sqrt{x}$.*

1. *Tracer les courbes représentatives de f, g et h sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.*
2. (a) *Résoudre $x^2 - x \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *Comparer f et g sur $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$*
3. (a) *Pour tout réel $x > 0$, établir que $f(x) - h(x) = \frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$.*
   (b) *Comparer les fonctions f et h sur les intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[96 <$*

Exercice 238. *Dans le cadre d'un projet, un groupe a lancé un petit prototype de fusée. La hauteur h en mètres du projectile en fonction du temps t en secondes a pu être modélisée par la fonction h définie par $h(t) = 25t - t^2$.*

1. *Quelle est la hauteur du projectile au bout de 3 secondes ?*
2. *Construire un tableau de valeurs avec un pas de $0,5$.*
3. *Trouver à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée, au centième près, de la durée pendant laquelle la fusée reste à une altitude supérieure ou égale à 10 m.*
4. *Au bout de combien de temps la fusée retombe-t-elle au sol ? Sur quel intervalle cette modélisation a-t-elle du sens ?*

Exercice 239. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.*

1. *Le point $A(-1; 9)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?*
2. *Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse 4 qui appartient à la courbe représentative de f.*

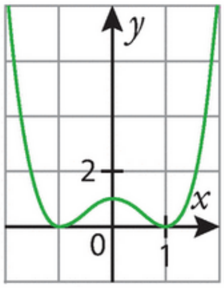
3. *Existe-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 33 ? Si oui, donner leurs coordonnées.*

4. *Considérons la fonction $g(x) = x^3 + 3x^2 - 21$ pour tout réel x.*

   (a) *Montrer que résoudre $f(x) \leq g(x)$ revient à résoudre $27 \leq x^3$.*

   (b) *Résoudre $f(x) \leq g(x)$.*

Exercice 240. *On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction*



h définie sur $\mathbb{R}$.

1. *Conjecture la parité de h.*

2. *La fonction h est définie par $h(x) = (x^2 - a)^2$ où a est un réel. Sachant que la courbe de h passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ déterminer la valeur de a.*

3. *Le point $B(1,5; 2)$ appartient-il à la courbe de h ?*

Exercice 241. 1. *Dans un repère orthonormée d'unité 1 cm, tracer la représentation de la fonction carré sur $[0; 9]$.*

2. *Tracer la droite Δ d'équation $y = x$.*

3. *Tracer la courbe symétrique par rapport à la droite Δ de la représentation graphique de la fonction racine carré.*

4. *Cette courbe est une porte portion de la courbe d'une fonction connue. Laquelle ?*

5. (a) *Pour tout réel x que vaut $\sqrt{x^2}$?*

   (b) *Pour tout réel x positif, que vaut $(\sqrt{x})^2$?*

Remarque 54. *On dit que les fonctions carré et racine carrée sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ sont réciproques. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie observée dans l'exercice.*

15.17 Vecteur avec coordonnées

15.17.1 Lecture graphique

Exercice 242. 1. *Placer le point* $A(-3;4)$.

2. *Soit* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. *Placer les points* B *et* C *tel que* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{u}$.

3. *Que peut-on dire du point A ?*

Exercice 243. *Soient* $A(6;5), B(2;-3)$ *et* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

1. *Placer le point* C *tel que* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{u}$.
2. *Placer le point* D *tel que* $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{u}$.
3. (a) *des points* C *et* D.
   (b) *des vecteurs* $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ *et* $\overrightarrow{CB}$.

15.17.2 Coordonnée d'un vecteur par le calcul

Exercice 244. *On considère les points* $A(1;2), B(-2;5)$ *et* $C(-3;-3)$. *Calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 245. *Soient les points* $A(3;5), B(2;-1), C(-2;-4)$ *et* $D(-1;2)$.

1. *Calculer les coordonnées de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$.
2. *Que peut-on dire du quadrilatère* $ABCD$ *?*

15.17.3 Coordonnée d'une expression vectorielle

Exercice 246. *Considérons les vecteurs suivants* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

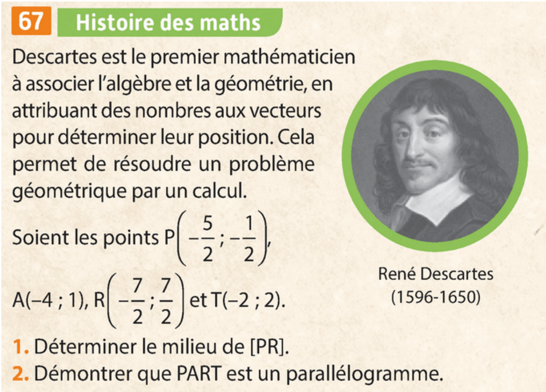
1. *Déterminer les coordonnées des vecteurs* $2\overrightarrow{u}$ *et* $-\overrightarrow{v}$.
2. *Quelles sont les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{w}$ *vérifiant l'égalité* $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ *?*

Exercice 247. *Soient* $A(3;-2;)$, $B(-1;2)$ *et* $C(2;3)$. *Calculer les coordonnées de* $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$.

15.17.4 Coordonnée du milieu

Exercice 248. *On donne les points* $A(2;3)$ *et* $B(-1;-4)$.
Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

Exercice 249.



67 Histoire des maths

Descartes est le premier mathématicien à associer l'algèbre et la géométrie, en attribuant des nombres aux vecteurs pour déterminer leur position. Cela permet de résoudre un problème géométrique par un calcul.

Soient les points $P\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $A(-4;1)$, $R\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$ et $T(-2;2)$.

1. Déterminer le milieu de [PR].
2. Démontrer que PART est un parallélogramme.

René Descartes (1596-1650)

15.17.5 Norme et longueur

Exercice 250. *Considérons les points* $F(7;-1)$, $I(5;-4)$ *et* $L(-4;2)$.

1. *Calculer les longueurs* FI, FL *et* IL.
2. *Justifier que le triangle* FIL *est rectangle en* I.

Exercice 251. *Considérons les points* $A(-2;1)$, $B(-4;4)$ *et* $C(0;-2)$.

1. *Calculer les longueur* AB, AC *et* BC.
2. *Les points forment-ils un triangle ou sont-ils alignés ?*

15.17.6 Colinéarité

Exercice 252. *On considère le cercle* $\mathcal{C}$ *de centre* $I(-4;2)$, *de rayon 5. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à* $\mathcal{C}$ *?*

1. $A(0;5)$
2. $B(-3;7)$
3. $C(-9;2)$
4. $D(-7;-2)$

Exercice 253. *Soit* $ABCD$ *un carré de centre* O. *On note* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{j}$ *et on se place dans le repère* $(A\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. *Quelle est la nature du repère* $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

2. *Quelles sont les coordonnées de A, B et D ?*

3. (a) *Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.*

   (b) *En déduire les coordonnées du point O*

4. *Soient E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ et F le point défini par $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.*
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire les coordonnées du point E.

5. *Quelles sont les coordonnées du point F ?*

6. *Les points O, E et F sont-ils alignés ?*

15.17.7 Détermination des coordonnées d'un point

Exercice 254. *Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, celles du point $A(5; 2)$.*
Calculer les coordonnées du point B telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Exercice 255. *Considérons les points $A(3; -2)$ et $M(0; 3)$.*
Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 256. *Considérons les points $A(-1; 1)$ et $D(2; -3)$. Déterminer les coordonnées des points B et C tels que $ABDC$ soit un losange.*

15.18 Séance d'exercice noté le 11/04/2024

Exercice 257 (2 points)**.** *1. Comment obtient-on le coefficient multiplicateur global associé à deux évolutions successives ?*

2. Comment obtient-on le coefficient multiplicateur réciproque associé à une évolution ?

Correction 69. 1. Si on a deux coefficients multiplicateurs c_1 et c_2, on obtient le coefficient multiplicateur global c en réalisant le produit $c = c_1 \times c_2$.

2. Si on a un coefficient multiplicateur c alors le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est $\frac{1}{c}$

Exercice 258 (4 points)**.** *1. Un prix augmente de* 10% *puis baisse de* 40%

(a) Calculer le coefficient multiplicateur global.

(b) En déduire le taux d'évolution global.

2. Reprendre les mêmes questions pour une baisse de 70% *puis une hausse de* 200%*.*

Correction 70. 1. (a) Le coefficient multiplicateur global est $c = 1,1 \times 0,6 = 0,66$

(b) On a l'égalité $c = 1 - t$ donc $t = c - 1$ donc $t = 0,66 - 1 = -0,44$ donc on a une baisse de 44%.

Exercice 259 (2 points)**.**
Une fonction f a les propriétés suivantes :

- *elle est définie sur* $[0; 8]$
- *l'équation $f(x) = 3$ a deux solutions : 1 et 3.*
- *l'image de 0 est 1 ;*
- *l'inéquation $f(x) \leq 0$ a pour ensemble solution* $[5; 7]$.

Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

Exercice 260 (4 points)**.**
On considère dans la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = (x - 2)(2x - 30)$. *Déterminer les points d'intersections de la courbe représentative de h avec les axes du repère.*

Exercice 261 (3 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

1. *Calculer les images de 4 et -4 par f.*

2. *La fonction f est-elle paire ou impaire ?*

Exercice 262 (2 points)**.** *Eva a allumé le chauffage dans sa chambre. Au départ, la température était de 16 °C. Eva constate que toutes les heures la température semble augmenter de 0,7 °C.*
T est la fonction donnant la température de la chambre d'Eva en fonction de n le nombre d'heures écoulées depuis la mise en route du chauffage.

1. *Donner $T(0)$, $T(1)$ puis l'expression de $T(n)$ d'après les constations d'Eva.*

2. *Cette expression $T(n)$ a-t-elle du sens pour tout nombre d'heures écoulées n ?*

Correction 71.
1. On a $T(0) = 16, T(1) = 16 + 0,7 = 16,7$ donc $T(n) = 16 + n \times 0,7$.

2. Elle a un sens mathématique, mais dans la réalité la fonction T atteindra une valeur maximum $T(m)$ au bout d'un certain nombre d'heure m.

Exercice 263 (2 points)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{3x+1} = 2$.

Correction 72. Tout, d'abord $3x + 1 \geq 0$ car la fonction racine carré n'est définie que sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$. Donc $x \geq -\frac{1}{3}$, donc l'équation est résoluble.
Alors, on a :
$\sqrt{3x+1} = 2 \iff \sqrt{3x+1}^2 = 2^2 \iff 3x + 1 = 4 \iff x = 1$ donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1\}$.

15.19 Équations de droites

15.19.1 Équation cartésienne de droite

Exercice 264. *Considérons deux points distincts* A *et* B*, prenons* $k \in [-5;5]$.

1. *Tracer la droite* (AB) *puis tracer un représentant de* $k\overrightarrow{AB}$ *d'origine* A *pour créer le point* M.

2. *Pour quelles valeurs de* k*, a t on que :*

   (a) *le point* M *est confondu avec* A *?*

   (b) *le point* M *est confondu avec* B *?*

   (c) *le point* M *est le milieu du segment* $[AB]$ *?*

3. *Où se situent tous les points* M *pour lesquels :*

   (a) k *est un réel compris entre* 0 *et* 1 *?*

   (b) $k > 1$ *?*

   (c) $k < 0$ *?*

4. *Considérons maintenant les points* N *tels que* $\overrightarrow{BN} = h\overrightarrow{BC}$ *où* h *est un réel.*

   (a) *Où se situent tous les points* N *?*

   (b) *Quelles sont alors les valeurs du paramètre* h *correspondant aux points* A, B *et* C *?*

   (c) *Dans ce cas, quel point joue le rôle de l'origine et quel est un vecteur directeur de la droite* (AB) *?*

Exercice 265. *On donne une équation cartésienne de la droite* (d) : $x - 3y + 7 = 0$.

1. *Le point* $C(-3;1)$ *appartient-il à cette droite ?*

2. *Déterminer l'ordonnée du point* D *d'abscisse* $\frac{5}{3}$ *qui appartient à la droite d.*

3. *Déterminer l'abscisse du point* E *d'ordonnée* $-\frac{3}{2}$ *qui appartient à la droite d.*

4. *Donner un vecteur directeur de cette droite.*

Exercice 266. *Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la droite d'équation cartésienne* $2x - 6y + 3 = 0$ *avec les deux axes du repère orthonormé.*

Exercice 267. *Considérons la droite d'équation cartésienne* $3x - 5y - 2 = 0$

1. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses.*

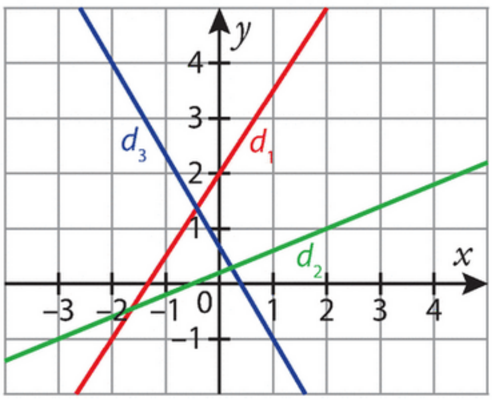
2. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.*

Exercice 268. *Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point* $A\binom{1}{-1}$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\binom{3}{-2}$.

Exercice 269. *Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point* $A\binom{-3}{1}$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\binom{2}{-0}$.

Exercice 270.

55 Pour chacune des droites représentées, donner un vecteur directeur, un point et une équation cartésienne.



Exercice 271. *Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points :*

1. $C(0;5)$ *et* $D(3;-2)$.

2. $S(-2;-3)$ *et* $V(0;3)$.

Exercice 272. *On considère le carré* $ABCD$ *tel que* $A(0;0)$ *et* $B(2;0)$. *Déterminer une équation cartésienne de la droite de* (BD).

Exercice 273. *Représenter les droites d'équations cartésiennes :*

1. $-4x + 3y + 2 = 0$.

2. $3x + 2y - 1 = 0$.

3. $x - 4 = 0$.

4. $x - 3y + 1 = 0$

Exercice 274. *Représenter les droites suivantes :*

1. *Celle qui passe par le point* $A(-2;3)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\binom{4}{-1}$.
2. *Celle qui passe par le point* $B(3;-1)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{v}\binom{-2}{3}$.

15.19.2 Équations réduite de droites

Exercice 275. *On considère la droite d'équation réduite $y = -2x + 1$.*

1. *Le point A de coordonnées $(1; 2)$ appartient-il à la droite ?*
2. *Déterminer l'abscisse du point de la droite d'ordonnée -1.*
3. *Déterminer l'ordonnée du point de la droite d'abscisse -3.*

Exercice 276. *Considérons la droite d'équation réduite $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$*

1. *Quelle est la valeur de son coefficient directeur m ?*
2. *Quelle est la valeur de son ordonnée à l'origine p ?*

Exercice 277. *Considérons la formule donnant l'aire d'un cylindre $\mathcal{A} = 2\pi rh$. Exprimer la hauteur h en fonction de $\mathcal{A}$ et r.*

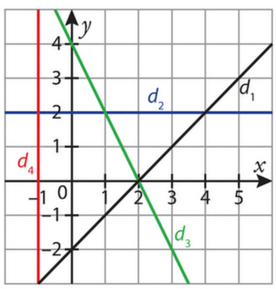
Exercice 278. *Soit la formule donnant la vitesse v en fonction de la distance d et du temps t : $v = \frac{d}{t}$.*
Exprimer le temps t en fonction de v et de d.

Exercice 279. *Dans un repère orthonormé, représenter les droites d'équations réduites :*

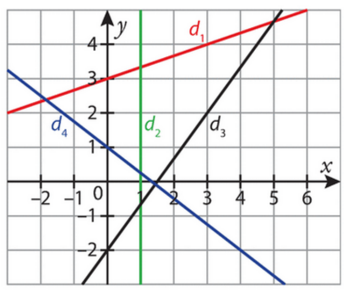
1. $y = \frac{5}{4}x + 2$
2. $y = 2$
3. $y = \frac{7}{3}x - 1$
4. $x = -3$

Exercice 280.

78 Pour chacune des droites représentées ci-dessous, lire graphiquement son équation réduite.

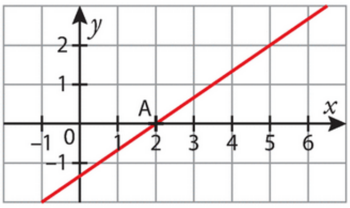


80 Même exercice que le **78** avec les droites suivantes.



Exercice 281.

82 On considère la droite d représentée dans le repère ci-dessous.



1. Donner graphiquement les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d d'abscisse 3.

2. En déduire les coordonnées d'un vecteur directeur d'abscisse 1 et d'un autre d'abscisse −2.

3. En partant du point A(2 ; 0) et en se déplaçant de −2 horizontalement et de $-\frac{4}{3}$ verticalement on trouve le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

En déduire la valeur de p.

4. Donner l'équation réduite de la droite d.

Exercice 282. *1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) passant par $A(2;-1)$ et $B(-3;2)$.*

2. Trouver l'équation de la droite réduite de la droite (GH) passant par les point $G(-2;5)$ et $H(4;-1)$.

Exercice 283. *Trouver l'équation réduite de la droite :*

1. *de coefficient directeur $-\frac{1}{3}$ et passant par le point $A(-1;-2)$*
2. *de coefficient directeur $\frac{3}{4}$ et passant par le point $B(2;-3)$.*

Exercice 284. *Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point $D(3;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{2}{-3}$.*

Exercice 285. *On considère le triangle ABC rectangle en A et tel que $AC = 2AB$, $A(0;0)$ et $B(3;0)$.*
Déterminer l'équation réduite de la droite (BC) par le calcul.

15.19.3

15.19.4 Équations de droite 4

Exercice 286. *Maxence a dit à son cousin Thomas :« Cette année, j'ai le double de ton âge. » Thomas répond à Maxence : « Dans douze ans, la somme de nos âges sera le double de celle de cette année. »*
Déterminer l'âge de Maxence et de Thomas.

Exercice 287. *Dans un repère orthonormé* $(O; I; J)$*, on considère les points* $A(-3; 5)$*,* $B(9; 2)$ *et* $C(2; 0)$*.*

1. *Déterminer une équation cartésienne de la droite* (AB)*.*
2. *Montrer que le point* C *n'appartient pas à la droite* (AB)*.*
3. *Déterminer une équation cartésienne de la droite* d *passant par le* C *et de coefficient directeur* $\frac{7}{2}$*.*
4. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection* M *des droites* (AB) *et* d*.*
5. *Déterminer l'abscisse du point d'intersection* P *de la droite* (AB) *avec l'axe des abscisses.*

Exercice 288. *Dans un repère orthonormée, on considère les carrés* $ABCD$ *et* $BEFG$ *tels que* $A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1)$ *et* $E(3; 0)$*.*

1. *Déterminer les équations réduites des droites* (AG) *et* (CE)*.*
2. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection* K *avec ces deux droites.*
3. *Déterminer l'équation réduite de la droite* (DF)*.*
4. *Montrer que le point* K *appartient à la droite* (DF)*.*
5. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites* (DF) *et* (AB)*.*

Exercice 289. *On considère un segment* $[AB]$ *et un point* C *n'appartenant pas à* $[AB]$*. On prend* $(A(0; 0), B(1; 0)$ *et* $C(a; b)$ *où* a *et* b *sont des réels quelconques.*

1. *Placer le point* D *tel que* $\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{CA}$*.*
2. *Déterminer les cordonnées du point* D *et du point* K *milieu du segment* $[BD]$ *en fonction de* a *et* b*.*
3. *Déterminer une équation cartésienne de la droite* (CK)*, en fonction de* a *et* b*.*

4. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (Ck) et (AB), en fonction de a et b.*

5. *Quelle remarque peut-on faire sur ce point M si on modifie le point C ?*

Exercice 290. *Considérons un triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 6$, $AC = b$ et $BC = a$.*

1. *Sachant que son aire vaut $8,64cm^2$, déduire la valeur du produit ab.*

2. *Combien vaut $a^2 + b^2$?*

3. *En déduire les valeurs de $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$.*

4. *En déduire les valeurs de $a+b$ et $a-b$.*

5. *Quelles sont les longueurs des côtés AC et BC ?*

Exercice 291. *Considérons la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ et deux points A et B d'abscisses respectives a et b strictement positives appartenant à sa représentation graphique.*

1. *Donner les coordonnées des points A et B.*

2. *Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) en fonction de a et b.*

3. *Déterminer les coordonnées des points d'intersections de cette droite avec les deux axes du repère.*

4. *En déduire qu'il n'existe pas deux entiers distincts tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$*

Exercice 292. *On considère un carré $ABCD$ de côté 1, un triangle équilatéral ABE à l'intérieur du carré et un triangle équilatéral BCF à l'extérieur du carré. On utilise le repère $(A; B; D)$.*

1. *Tracer une figure de la situation.*

2. *Montrer que les coordonnées de E et F sont : $E(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $F(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.*

3. *On veut montrer l'alignement des points D, E, F par plusieurs méthodes.*

   (a) *Démonter par le calcul vectoriel.*

   (b) *Déterminer une équation de la droite (DE), puis vérifier que le point F appartient à (DE).*

   (c) *Déterminer les angles des triangles ADE, BEF puis CDE. Conclure.*

Exercice 293. *On place un point $M(a; b)$ sur le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.*

1. *Déterminer l'équation réduite de la droite* (OM) *en fonction de* a *et de* b.
   <u>*Indications :*</u> *Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut* -1.

2. *En déduire l'équation de la droite perpendiculaire à* (OM) *passant par* M. *Cette droite est la tangente au cercle en* M.

3. *Déterminer les coordonnées des points d'intersections de cette tangente avec les axes de coordonnées en fonction de* a *et* b.

15.20 Devoirs Maison

15.20.1 Devoir Maison n°1

Il faut justifier tous les raisonnements et calculs. Les efforts de rédactions et raisonnements formalisés seront valorisés.

Nombres et Calculs

1. Il y a environ 2×10^{15} atomes de cuivre dans $211ng$ de cuivre. On rappelle que ng est l'abréviation de nanogramme et qu'un nanogramme est égal à 10^{-9}. Quelle est la masse d'un atome de cuivre ?
2. Si Julie prend $\frac{1}{16}$ d'une tarte, Léo prend la moitié de ce qu'a laissé Julie, quelle est la fraction de tarte qui reste ?
3. Écrire la décomposition en facteurs premiers des nombres 1266 et 387 puis rendre irréductible la fraction $\frac{1266}{387}$.
4. Développer et réduire l'expression $(5x - 4)(2x + 12)$.
5. Résoudre les équations suivantes :
   - $5x - 1 = 9$.
   - $4x - 8 = 7x + 4$.
   - $x^2 - 16 = 0$.
6. Pour deux nombres réels a et b, développer $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$.

Organisation et gestion de données

1. Voici les notes que Louis a obtenues durant le trimestre : $13; 10; 8; 14; 15$. Calculer la moyenne trimestrielle de Louis ?
2. On lance dix-mille fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note les fréquences d'apparition de chacune des valeurs. Que pouvez-vous dire de ces fréquences ?
3. Calculer l'antécédent de 10 par la fonction $f(x) = -2x - 4$.
4. Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = -1$ et $f(1) = -\frac{5}{2}$.
5. On tire, deux fois de suite et avec remise, une boule dans une urne contenant une boule bleue et deux boules rouges.
   Quelle est la probabilité de tirer successivement deux boules rouges ?

6. Si le prix d'un kilo de pommes de terre augmente de 1% par mois pendant une année, de combien a-t-il augmenté au bout de l'année ?

7. Une automobile roule à exactement 90 km/h pendant une heure. Au bout de 10 mn quelle distance a-t-elle parcourue ?

8. Pour un revenu x compris entre 26420 et 70830 euros, les impôts sont calculés par à l'aide d'une fonction affine f de la forme $f(x) = ax + b$.

   (a) Déterminer a et b sachant qu'un revenu de 70830 euros paye 15682 euros d'impôts, et qu'un revenu de 26420 euros paye 2359 euros d'impôts (on trouvera $f(x) = 0,3x - 5567$)

   (b) Quel est l'impôt pour un revenu de 50000 euros ?

   (c) Quel est le revenu pour un impôt de 10000 euros ?

   (d) Quand le revenu augmente de 1000 euros (en restant entre 26420 et 70830 euros), de combien augmente l'impôt ?

   (e) Quand le revenu est multiplié par 2 (en restant entre 26420 et 70830 euros), l'impôt est-il multiplié par 2 ?

Géométrie

1. Quel est le volume d'un cube dont un côté mesure $2,5m$? On donnera le résultat en m^3 et en dm^3 (décimètre cube).

2. On considère deux triangles rectangles en A, notés ABC et $AB'C'$, tels que $AB' = 3AB$ et $AC' = 3AC$, les points B' et C' étant situés respectivement sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.
   Tracer une figure de la situation puis que peut-on dire :

   - des aires de ces triangles ?
   - des périmètres de ces triangles ?

15.20.2 Devoir Maison n°2 le 19/10/2023

Exercice 294. *Donner tous les nombres entiers appartenant à chacun des intervalles suivants.*

1. $[4; 10]$
2. $[2,1; 5,2]$
3. $]3; 7]$

Exercice 295. *Représenter sur une droite graduée chacun des intervalles suivants.*

1. $]1; 6]$
2. $[-0.5; 3.2]$
3. $]-\infty; 2]$
4. $[0; +\infty[$

Exercice 296. *Écrire les inégalités vérifiées par les réels x pour chacun des cas suivants.*

1. $x \in [0; 1,2]$
2. $x \in]-\frac{5}{3}; 3[$
3. $x \in [4,73; +\infty[$
4. $x \in]-\infty; 0[$

Exercice 297. *Les propositions conditionnelles suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez*

1. *Si* $\frac{1}{4} < x$ *alors* $x \in [0,2; +\infty[$.
2. *Si* $x < \pi$ *alors* $x \in]-\infty; 3,1[$.
3. *Si* $x \in [0.8; 2]$ *alors* $x \in [0,7; 1]$.
4. *Si* $x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ *alors* $x \in [0; 1]$.

Exercice 298. 1. *Donner les amplitudes intervalles suivants.*

(a) $[5; 100]$
(b) $[1; \frac{4}{3}]$
(c) $[2 - \frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{3}]$
(d) $[5 - \frac{1}{n}; g + \frac{1}{n}]$, *où* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \neq 0$

2. *Donner un intervalle d'amplitude* $0,1$ *contenant* $\sqrt{5}$.

3. *Donner un intervalle d'amplitude* 10^{-2} *contenant* π.

Exercice 299. *Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles suivants.*

1. $[20;25[$ *et* $[14;21[$

2. $]-\infty;7,5]$ *et* $[10;22]$

3. $]-1;+\infty[$ *et* $]-\infty;1[$

4. $]0;1]$ *et* $[0,5;0,7]$

Exercice 300. *Utiliser les intervalles (on pourra utiliser le symbole de réunion ou intersection) pour décrire, si possible, les ensembles de nombres* x *tels que :*

1. $x < 1$ *et* $x \geq -3$

2. $x \leq -2$ *ou* $x > 1$

3. $x \leq 3,5$ *ou* $x < 1$

4. $x \geq \pi$ *et* $x \leq 3$

Exercice 301.
La formule de Lorentz est une formule donnant la masse idéale (théorique) en kg noté $p(t)$ *d'un homme de taille* t *(en cm) avec* $t \geq 130$. *Elle est donnée par :* $p(t) = t - 100 - \dfrac{t-150}{4}$.

1. *D'après cette formule, quel est le poids idéal d'un homme mesurant 170 cm ?*

2. *D'après cette formule, quel est le poids idéal d'un homme mesurant 2 m ?*

3. *Montrer que* p *est une fonction affine.*

4. *Un homme a une masse idéale de 74 kg. Combien mesure-t-il ?*

5. *Établir le tableau de variation et de signe de la fonction* p.

15.20.3 Devoir Maison n°3 : Vecteurs

Exercice 302. 1. *Construire un triangle ABC. Placer les point D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC}$.*

2. (a) *Justifier que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.*
   (b) *En déduire que $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AC}$.*

3. *Que peut-on en conclure pour les droites (AC) et (DE) ?*

Exercice 303. 1. *Construire un parallélogramme $ABCD$ et le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$.*

2. (a) *Justifier que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.*
   (b) *Justifier que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.*

3. *En déduire que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.*
   Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ECBD$?

Exercice 304. 1. *Construire un parallélogramme $ABCD$.*

2. *Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$.*

3. *En écrivant $\overrightarrow{MN}$ sous la forme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ prouver que $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BC}$.*

4. *Que peut-on en déduire pour la nature du quadrilatère $BCNM$?*

Exercice 305. *A, B et C trois points du plan tels que pour tout point M du plan, on a $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.*
Montrer que les points A, B, C sont alignés et représenter ces points.

Exercice 306. 1. *Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O. Nommer I le milieu de $[OC]$.*

2. *Construire A' le symétrique de A par rapport à D et O' le symétrique de O par rapport à B.*

3. (a) *Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.*
   (b) *Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.*
   (c) *En déduire que I est le milieu de $[A'O']$.*

15.20.4 Devoir Maison n°4 : Statistiques et Probabiités

Exercice 307. *Une entreprise fabrique des carreaux de ciment qu'elle conditionne par cartons de 25.*
Sur les 120 derniers cartons envoyés, elle a reçu des plaintes (car beaucoup de carreaux étaient cassés) selon la répartition suivante :

Nombre de carreaux cassés	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*10*
Nombre de cartons	*24*	*16*	*22*	*28*	*25*	*5*

1. (a) *Déterminer le minimum, le maximum, la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de cette série.*

   (b) *Sans calcul supplémentaire, peut-on affirmer qu'au moins* 75% *des cartons contenaient 4 carreaux cassés ou plus ?*

2. (a) *Déterminer la moyenne m et l'écart-type s de cette série.*

   (b) *Quelle proportion des valeurs de la série est dans l'intervalle $[m-2s;m+2s]$?*

3. *Cette société a décidé de changer le type de cartons utilisé pour emballer les carreaux.*
   Sur les 50 premiers cartons envoyés de ce nouveau type, la série du nombre de cassés par carton est résumée par les indications suivantes.

   - $Q_1 = 3$.
   - *La médiane est égale à 4.*
   - $Q_3 = 5$
   - $m = 4,14$
   - $s = 0.94$

   (a) *Ce changement de type de carton est-il efficace ?*

   (b) *Les nouveaux cartons coûtent 50 centimes de plus que les précédents et l'entreprise rembourse les carreaux cassés, à 60 centimes pièce.*
   Quel type de carton peut-on lui conseiller ?

Exercice 308. *Lorsque l'on réalise une expérience aléatoire dont les issues sont des nombres, on doit que l'espérance associée à cette expérience aléatoire est la moyenne des issues, pondérée par leurs probabilités.*
Calculer l'espérance associée à chacune des expériences aléatoires suivantes.

1. *On lance un dé à 6 faces non truqué : on gagne 10 euros si le résultat est 6 et on perds 2 autrement : le résultat de l'expérience est le gain algébrique (qui peut être négatif) réalisé.*

2. *On joue 10 euros à quitte ou double sur le noir à la roulette et on considère le gain algébrique. On rappelle que dans une roulette standard, il y a 18 cases rouges, 18 cases noire et une case verte le 0).*

3. *Lorsque l'on va prendre le bus, on attend 1 ; 2 ; 3 ou 4 minutes avec les probabilités respectives de 0,2 ; 0,35 ; 0,15 et 0,3 : on considère le temps passé à attendre le bus.*

Exercice 309. *Dans un lycée, on demande aux élèves de Seconde de choisir leurs trois spécialités pour la classe de Première. Dans ce lycée il y a seulement les spécialités :*

- H *« Histoire-géographie, géopolitique et sciences politiques. »*
- L *« Langues, littératures et cultures étrangères »*
- S *« Sciences économiques et sociales »*
- M *« Mathématiques »*
- C *« Physique-Chimie »*

1. *À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de choix possibles.*

2. *Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard prenne les spécialités M ou L.*

3. *Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard prenne les spécialités M et L.*

4. *Calculer $P(S \cap C)$ et $P(C)$*

15.20.5 Devoir Maison n°5 : Fonction de références

Exercice 310. *Une fonction f a les propriétés suivantes :*

- *elle est définie sur* $[0; 8]$
- *l'équation* $f(x) = 3$ *a deux solutions : 1 et 3.*
- *l'image de 0 est 1 ;*
- *l'inéquation* $f(x) \leq 0$ *a pour ensemble solution* $[5; 7]$.

Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

Exercice 311. *On considère dans la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par* $h(x) = (x-2)(2x-30)$. *Déterminer les points d'intersections de la courbe représentative de h avec les axes du repères.*

Exercice 312. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = (x-2)(x+3)$

1. *Calculer les images de 4 et -4 par f.*
2. *La fonction f est-elle paire ou impaire ?*

Exercice 313. *Eva a allumé le chauffage dans sa chambre. Au départ, la température était de 16 °C. Eva constate que toutes les heures la température semble augmenter de 0,7 °C.*
T est la fonction donnant la température de la chambre d'Eva en fonction de n le nombre d'heures écoulées depuis la mise en route du chauffage.

1. *Donner $T(0)$, $T(1)$ puis l'expression de $T(n)$ d'après les constations d'Eva.*
2. *Cette expression $T(n)$ a-t-elle du sens pour tout nombre d'heures écoulées n ?*

Exercice 314. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$, $\sqrt{3x+1} = 2$.

15.20.6 Devoir Maison n°6 : Vecteur 2

Exercice 315. *Considérons les points* $F(7;-1)$, $I(5;-4)$ *et* $L(-4;2)$.

1. *Calculer les longueurs* FI, FL *et* IL.
2. *Justifier que le triangle* FIL *est rectangle en I.*

Exercice 316. *Considérons les points* $A(-2;1)$, $B(-4;4)$ *et* $C(0;-2)$.

1. *Calculer les longueur* AB, AC *et* BC.
2. *Les points forment-ils un triangle ou sont-ils alignés ?*

Exercice 317. *Les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *sont* $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, *celles du point* $A(5;2)$.
Calculer les coordonnées du point B *telles que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Exercice 318. *Considérons les points* $A(3;-2)$ *et* $M(0;3)$.
Déterminer les coordonnées du point B *tel que* M *soit le milieu du segment* $[AB]$.

Exercice 319. *Considérons les points* $A(-1;1)$ *et* $D(2;-3)$. *Déterminer les coordonnées des points* B *et* C *tels que* $ABDC$ *soit un losange.*

Exercice 320. *Soit* $ABCD$ *un carré de centre* O. *On note* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{j}$ *et on se place dans le repère* $(A\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. *Quelle est la nature du repère* $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
2. *Quelles sont les coordonnées de* A, B *et* D *?*
3. (a) *Exprimer* $\overrightarrow{AO}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.
   (b) *En déduire les coordonnées du point* O
4. *Soient* E *le point défini par* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ *et* F *le point défini par* $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ *en fonction des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$. *En déduire les coordonnées du point* E.
5. *Quelles sont les coordonnées du point* F *?*
6. *Les points* O, E *et* F *sont-ils alignés ?*

15.21 Évaluations hebdomadaires

Ces interrogations furent principalement effectuées sur le créneau du mercredi matin et elles duraient 20 à 35 minutes.

15.21.1 Interrogation n°1, le 13/09/2023

Calculatrice interdites.
On rappelle que :

- $x \in A$ se lit « x appartient à A ».
- $E \subset F$ se lit « E est inclus dans F ».

Exercice 321 (Question de cours). *2 points*

1. *Donner la définition d'un nombre décimal.*
2. *Donner le symbole désignant l'ensemble des rationnels.*
3. *Donner le symbole désignant les entiers relatifs.*

Exercice 322 (Vrai/Faux). *5 points*
Justifiez.

1. $2,6 \in \mathbb{Z}$.
2. $-\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}$.
4. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$.
5. $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

Exercice 323. *4 points*
Donner le nom et le symbole du plus petit ensemble auquel appartiennent les nombres proposés.

1. $\frac{1}{4}$.
2. 5.
3. $\frac{3}{2}(11-3)$.
4. $\frac{7}{3}-(-\frac{2}{3})$.

15.21.2 Interrogation n°2, le 02/10/2023

Calculatrice interdites.

Exercice 324 (Question de cours)**.** $3 + \frac{1}{2}$ *points*

1. *Donner le symbole désignant les entiers relatifs.*
2. *Si* $\dfrac{a}{b}$ *est l'écriture sous forme de fraction irréductible d'un nombre décimal, comment pourrait-on caractériser le dénominateur b ?*
3. *Donner la définition d'une fonction affine f.*
4. *Donner la formule permettant de calculer le taux de variation (ou d'accroissement) d'une fonction affine f.*

Exercice 325. *2 points*
Donner le nom et le symbole du plus petit ensemble auquel appartiennent les nombres proposés.

1. $\dfrac{3}{7} - \dfrac{2}{7} \times \dfrac{21}{8}$.
2. $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{3}}$.

Exercice 326. *2 points*
Soient $f(x) = \dfrac{4}{3}x - 3$ *et* $g(x) = -x + 6$ *deux fonctions affines.*

1. *Calculer le taux d'accroissement des fonctions f.*
2. *Résoudre $f(x) = g(x)$, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 327. $2 + \frac{1}{2}$ *points*
Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, soit $A(x) = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2$

1. *Développer puis réduire $A(x)$.*
2. *Factoriser $A(x)$.*
3. *(Bonus 1 point) Résoudre $A(x) = 0$.*

15.21.3 Interrogation n°3, le 29/11/2023

Les calculatrices sont interdites. Toutes les réponses doivent être justifiées. Tout effort de rédaction sera valorisé.

Exercice 328 (Question de cours)**.**
Soient a et b deux entiers relatifs, supposons $a < b$. Écrire une expression mathématique correspondant aux affirmations suivantes.

1. *La division euclidienne de b par a a pour quotient 12 et reste 5.*
2. *Si b est un multiple de a, que peut-on dire sur le reste de la division euclidienne ?*
3. *a est pair.*
4. *a est multiple de b.*

Correction 73. Soient a et b deux entiers relatifs.

1. $b = 12a + 5$.
2. Si b est un multiple de a, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif tel que $b = ak$. Donc, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de b par a est nul.
3. L'entier relatif a est pair donc il est divisible par 2. Ainsi, il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.
4. a est multiple de b donc il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$.

Exercice 329.

1. *Donner tous les diviseurs positifs de 11.*
2. *Donner tous les diviseurs positifs de 21.*
3. *Déterminer tous les multiples de 8 inférieurs à 50.*

Correction 74.

1. 11 est un nombre premier donc ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même 11.
2. On a $21 = 7 \times 3$, donc la liste de ses diviseurs positifs est $1; 3; 7; 21$.
3. On récite la table de 8 et on trouve : $8; 16; 24; 32; 40; 48$.

Exercice 330. *Montrer que*

1. *La somme de deux entiers relatifs impairs est paire.*
2. *La somme du carré de deux entiers relatifs paire est paire.*

Correction 75.

1. Prenons a, b deux entiers relatifs impairs, il existe k et k' deux entiers tels que :

- $a = 2k + 1$
- $b = 2k' + 1$

Sommons-les, on a : $a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2$ donc en factorisant par 2, on a $a+b = 2(k+k'+1)$. Posons $K = k+k'+1 \in \mathbb{Z}$, alors on a $a + b = 2K$ donc $a + b$ est pair.

2. Si a et b sont deux entiers relatifs pairs, alors il existe k et k' deux entiers tels que :

   - $a = 2k$
   - $b = 2k'$

   Sommons leurs carrés on a : $a^2 + b^2 = (2k)^2 + (2k')^2 = 4k^2 + 4k'^2 =$ donc en factorisant par 2 on a $a^2 + b^2 = 2(2k^2 + 2k'^2)$. En posant $K = 2k^2 + k'^2 \in \mathbb{Z}$, qui est un entier, car la somme de deux entiers est un entier, on a $a^2 + b^2 = 2K$ donc $a^2 + b^2$ est pair.

Exercice 331. *La somme de trois entiers consécutifs est-elle un multiple de 3 ?*

Correction 76. Soit n un entier, $(n+1)$ est successeur et $(n+2)$ le successeur de $(n+1)$. Calculons la somme, on a $n+(n+1)+(n+2) = n+n+1+n+2 = 3n + 3$.
En factorisant par 3, on a $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$.
Puis en posant $K = n + 1$, on obtient $n + (n + 1) + (n + 2) = 3K$ donc la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 332. *Pour tous a, b, c trois entiers relatifs avec a non nul.*
Si a divise b et a divise c alors montrer que :

1. *a divise $b + c$.*
2. *a divise $b - c$.*

Correction 77. Prenons $a, b, c \in \mathbb{Z}$ trois entiers relatifs. Si a est un diviseur de b (respectivement c) il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ (respectivement un entier relatif $k' \in \mathbb{Z}$) tel que $b = ak$ (respectivement $c = ak'$).

1. Sommons b et c, on a $b + c = ak + ak' = a(k + k')$.
   Posons $K = k+k' \in \mathbb{Z}$ alors, on a $b+c = aK$ donc $b+c$ est un multiple de a.
2. Réalisons la différence $b - c = ak - ak' = a(k - k')$.
   Posons $K = k - k' \in \mathbb{Z}$ donc $b - c = aK$ donc a divise $b - c$.

15.21.4 Interrogation n°4, le 10/01/2024

Exercice 333. *1. Définir la notion de caractère et préciser ses types possibles.*

2. Définir la fréquence d'un individu au sein d'une population.

3. Quels sont les trois caractéristiques qui définissent un vecteur ?

4. Définir la relation de Chasles pour deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5. Caractériser vectoriellement le fait que trois points A, B, C soient alignés.

Exercice 334. *$ABCD$ est un rectangle de centre O.*

1. Faire une figure.

2. Construire le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$.

3. En utilisant un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OC}$.

4. De la même manière, montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$

Exercice 335. *1. Tracer un vecteur $\overrightarrow{u}$ de votre choix.*

2. Construire les vecteur $3\overrightarrow{u}$, $-5\overrightarrow{u}$ et $\frac{1}{4}\overrightarrow{u}$.

Exercice 336. *Soient A, B, C trois points du plan vérifiant $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. Montrer que A, B, C sont alignés.*

15.21.5 Interrogation n°5, le 17/01/2024

Exercice 337. *1. On considère le la série statistique suivante :*

Valeur	x_1	x_2	x_3	x_4
Effectif	n_1	n_2	f_4	n_4
Fréquence	f_1	f_2	f_3	f_4

(a) *Donner la formule de la moyenne en fonction des effectifs.*

(b) *Donner la formule de la moyenne en fonction des fréquences.*

(c) *Donner la fréquence cumulé de x_2.*

2. *Considérons trois ensembles A, B et C emboités tels que $C \subset B \subset A$. Notons p_1 la proportion de B dans la population de A. Notons p_2 la proportion de C dans la population de B. Donner la proportion de C dans A*

Exercice 338. *Dans une entreprise, le salaire mensuel moyen est de 2339,50 euros. L'entreprise propose une augmentation généralisée du salaire de ses employés, selon deux modalités possibles :*

- *Tous les salaires augmentent de* 10%.
- *Tous les salaires augmentent de 200 euros.*

1. (a) *Déterminer quel serait le nouveau salaire mensuel moyen si la modalité 1 est choisie.*

   (b) *Même question avec la modalité 2.*

   (c) *L'entreprise réalise un vote auprès de ses employés pour savoir quelle modalité choisir. A votre avis, quelle modalité va être choisie par les employés ?*

2. *La répartition des salaires dans l'entreprise est la suivante :*

Salaire	*1450*	*1510*	*1925*	*5125*
Nombre d'employés	*15*	*10*	*15*	*10*

   (a) *Justifier que le salaire mensuel moyen est bien de 2339,50 euros puis calculer l'écart-type associé.*

   (b) *Calculer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile de cette série des salaires dans l'entreprise.*

   (c) *De manière »très surprenante« , le résultat du vote réalisé dans l'entreprise afin de choisir la modalité d'augmentation montre que les employés préfèrent la modalité 2.*
   Expliquer pourquoi.

15.21.6 Interrogation n°6, le 31/01/2024

Exercice 339. *Le volume d'eau d'un lac diminue de* 6% *en août en raison d'une canicule puis augmente de* 4% *en septembre en raison de forte pluies. Le volume d'eau a-t-il augmenté ou diminué entre début août et fin septembre ? Préciser le pourcentage d'évolution.*

Exercice 340. *Dans un lycée de 172 élèves, on a modifié les règles d'usages du téléphone. Avant, il était toléré, mais maintenant, il est prohibé sauf pendant l'heure de repas. Le proviseur désire réaliser un bilan en comparant deux séries statistiques :*
Le premier relevé :

Nombre de SMS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'élèves	7	6	2	1	8	6	5	9	14	16	21

Nombre de SMS	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nombre d'élèves	12	7	5	7	10	5	9	11	8	3

Le second relevé après le changement de règlement :

Nombre de SMS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'élèves	3	2	1	2	4	3	3	10	13	12	15

Nombre de SMS	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nombre d'élèves	24	34	21	14	5	2	3	1	0	0

1. *Calculer la moyenne et l'écart type de chacune de ces séries statistiques.*
2. *Le nombre de SMS envoyés en moyenne par élèves avant et après le changement de règlement est-il significatif ?*
3. *Les écarts types sont-ils proches ? Interpréter.*

15.21.7 Interrogation n°7, 02/2024

86 Cuisine et devis

Léo décide de refaire sa cuisine.

1. Il fait un devis pour les meubles de sa nouvelle cuisine. Le montant HT (Hors Taxes) du devis est 6 500 € et la TVA est fixée à 10 %.

a) Quel est le montant TTC (Toutes Taxes Comprises) du devis ?

b) Léo donne son accord pour le devis.
Il doit régler un acompte de 40 % sur le montant TTC.
Quel montant doit-il payer ?

c) Il doit ensuite régler la moitié du montant restant lors de la livraison des meubles. Quel pourcentage du montant total cela représente-t-il ?

d) Enfin, il doit payer le reste après la pose. À quelle somme cela correspond-il ?

2. Léo décide également d'acheter de l'électroménager.

a) Il souhaite acheter un réfrigérateur, qui coûte initialement 699 euros et qui est en soldes à –20 %.
Quel est le prix du réfrigérateur ?

b) Léo souhaite également acheter un four. Le prix du four a subi une première baisse de 30 %, puis une seconde baisse de 10 %. Quel est le pourcentage de réduction sur le four ?

c) Enfin Léo achète un four à micro-ondes.
Le micro-ondes est soldé à –40 %. Son prix soldé est 63 €.
Quel était son prix avant les soldes ?

15.21.8 Interrogation n°8, 03/2024

Exercice 341 (6 points)**.**
Soit $f(x) = x^2$ *la fonction carrée,* $g(x) = \frac{1}{x}$ *la fonction inverse et* $h(x) = x^3$ *la fonction cube.*

1. *Dresser le tableau de variation de* g.
2. *Dresser le tableau de signe de* h.
3. *Dresser le tableau de variation de* f
4. *Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonctions* h *et* g.

Exercice 342 (4 pts)**.**

1. *Tracer la courbe représentative de la fonction carrée sur l'intervalle* $I = [-3; 12]$.
2. *Résoudre dans* I, $x^2 \geq 8$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *:*
   (a) $x^2 = 12$.
   (b) $x^2 \geq 6 = 36$.

Exercice 343 (Bonus)**.**
Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $2x^2 + 1 \leq -7$.

15.22 Devoirs Surveillés

15.22.1 Devoir surveillé n°1, durée 2h00 le 18/10/2023

Les calculatrices sont interdites. Toutes les réponses doivent être justifiées. Tout effort de rédaction sera valorisé.

Exercice 344. *2 points.*

1. *(1 point) Définir le taux de variation (ou d'accroissement) d'une fonction affine.*
2. *(1 point) Soit f une fonction affine. Caractériser les variations de f.*

Exercice 345. *2 points*
Pour chacune des affirmations suivantes dire, si elle est vraie ou fausse. Justifiez.

1. *($\frac{1}{2}$ point) La courbe représentative d'une fonction affine f est un arc de cercle.*
2. *($\frac{1}{2}$ point) Tout nombre décimal est un nombre rationnel.*
3. *($\frac{1}{2}$ point) Un nombre réel est toujours un entier naturel.*
4. *($\frac{1}{2}$ point) Les variations d'une fonction affine f dépendent de son ordonnée à l'origine.*

Exercice 346. *2 points*
Considérons l'expression $A(x) = x^2 - 25 + (x+5)(4-3x)$.

1. *($\frac{1}{2}$ point) Développer puis réduire $A(x)$.*
2. *($\frac{1}{2}$ point) Factoriser $A(x)$*
3. *(1 point) En choisissant l'expression appropriée de A, résoudre $A(x) = 0$.*

Exercice 347. *3 points*
Calculer les nombres suivants puis donner le plus petit ensemble de nombre auquel le résultat appartient.

1. *($\frac{1}{2}$ point)* $2(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2})$
2. *($\frac{1}{2}$ point)* $\frac{15}{66} - \frac{10}{44}$
3. *(1 point)* $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{23}{7}}$

4. (1 point) $\dfrac{5-\frac{2-3}{5-9}}{\frac{3+1}{4}+\frac{9-4}{3}}$

Exercice 348. *5 points.*
On considère la fonction affine f dont on connaît l'image de deux nombres réels : $f(1)=1$ et $f(5)=-7$.

1. *(1 point) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $f(x)=-2x+3$.*
2. *(1 point) Dresser le tableau de variation de la fonction f en justifiant.*
3. *($\frac{1}{2}$ point) Tracer la représentation graphique de f dans un repère.*
4. *($\frac{1}{2}$ point) Résoudre graphiquement $f(x)=\frac{1}{3}$. Donner la solution approchée au dixième.*
5. *(1 point) Déterminer la valeur exacte de la solution de l'équation précédente.*
6. *(1 point) Dresser le tableau de signe de f.*

Exercice 349. *6 points*
Une usine produit et vend des stylos. Pour l'entreprise, la production quotidienne de stylos engendre un coût total noté $C(x)$ composé de coût variable proportionnel au nombre x de stylos vendus.
La recette brute, noté $R(x)$ est le nombre de stylos vendus $2,50$ euros pièce. Le bénéfice net, noté $B(x)$, est la différence entre la recette et le coût total. On a alors $B(x)=R(x)-C(x)$.

1. *(1 point) Donner l'expression de la recette brute en fonction x.*
2. *(1 point) Le coût total est donné par la formule :*

$$C(x)=\frac{5}{4}x+180$$

   Quels sont les coûts fixes ? Quel est le coût variable ?

3. *(1 point) Exprimer le bénéfice en fonction de x*
4. *(1 point) Dans un repère d'unité 1 cm pour 25 stylos sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 25 euros sur l'axe des ordonnées, tracer la droite représentant la fonction recette et la droite représentant la fonction coût total.*
5. *(1 point) Déterminer par lecture graphique le nombre minimum de stylos à vendre pour que l'entreprise commence à faire des bénéfices.*
6. *(1 point) Déterminer ce nombre par le calcul.*

15.22.2 Devoir surveillé n°2, durée 1h00 le 04/12/2023

Les calculatrices sont interdites. Toutes les réponses doivent être justifiées. Tout effort de rédaction sera valorisé.
Le devoir était sur 24,5, il ne fallait donc pas tout faire pour obtenir 20.

Exercice 350. *4 pts Sachant que* $-8 \leq x < 7$,

1. *Donner l'intervalle auquel appartient le nombre* x.
2. *Donner un encadrement de* $\frac{x}{4} + 7$ *et* $x + 12$.
3. *Pour chacun de ces encadrements obtenus, donner l'intervalle représenté.*

Exercice 351. *4 pts Soit* $x \in [4; 5[$.

1. *Représenter cet intervalle par une inégalité.*
2. (a) *À quel intervalle appartient : a)* $2x$ *?, b)* $5 - 2x$ *? c)* $3x - 7$ *?, d)* $x + 7$ *?*
   (b) *Représenter dans chaque cas l'intervalle obtenu par une inégalité.*

Exercice 352. *4 pts Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels* x *vérifiant :*

1. $|x - 2| \leq 5$.
2. $|x + 5| \leq 4$.

Donner aussi le centre et le rayon de l'intervalle.

Exercice 353. *4 pts Écrire une inégalité vérifiée par* x *et utilisant une valeur absolue dans les cas suivants. Donner aussi le centre et le rayon de l'intervalle.*

1. $x \in [-7; 8]$.
2. $x \in [\frac{1}{4}; \frac{7}{9}]$.

Exercice 354. *4,5 pts Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.*

1. $3x + 2 \leq 4x - 14$
2. $9y + 19 \leq -y + 51$
3. $\dfrac{14}{3}z \leq 2z - \dfrac{1}{3}$

Exercice 355. *4 Comparer les expressions suivantes.*

1. $A = 2t + 9$ *et* $B = -2t + 3$ *pour tout nombre réel* t.
2. $A = y^2 - 6y + 150$ *et* $B = y^2 + 4y$ *pour tout nombre réel* y.

15.22.3 Devoir surveillé n°3, durée 2h, décembre 2023

Les calculatrices sont interdites. Toutes les réponses doivent être justifiées.
Tout effort de rédaction sera valorisé.

Inégalité et Intervalle

Exercice 356. *Considérons les intervalles suivants :*

a) $[5; 9]$

b) $]-\infty; \frac{1}{2}[$

c) $]-7; 0]$

1. *Donner un nombre appartenant à chaque intervalle.*
2. *Donner les intervalles sous forme d'une inégalité.*
3. *Représenter chaque intervalle sur une droite graduée (différente).*

Exercice 357. *Considérons les intervalles suivants :*

a) $x \geq \sqrt{2}$

b) $5 \leq x \leq 11$

c) $-1 \leq x < 12$

d) $7,2 < y \leq 120\pi$

1. *Donner un nombre appartenant à chaque intervalle.*
2. *Donner les inégalités suivantes sous forme d'intervalles.*
3. *Considérons les intervalles* $[1; 7]$ *et* $[5; 11]$.
   (a) *Donner le centre* c *et le rayon* r *des deux intervalles.*
   (b) *Écrire ces deux intervalles sous la forme* $|x - c| \leq r$.

Exercice 358. 1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$*, les inéquations suivantes, puis donner l'ensemble* $\mathcal{S}$ *des solutions sous la forme d'un intervalle :*
   (a) $2x + 9 \geq 19 - 2x$
   (b) $-2(x - 15) > 3 + x$

2. *On considère les intervalles* $I = [2,5; +\infty[$ *et* $J =]-\infty; 9]$.
   (a) *Déterminer l'intersection* $I \cap J$ *de ces deux intervalles.*

(b) *Soit* $t \in I \cap J$*, un nombre appartenant à cette intersection.*

(c) *Donner un encadrement de* $3t - 2$*.*

Exercice 359. 1. *Expliquer pourquoi si* $y \geq 3$ *alors* $3y - 4$ *est positif.*

2. *Expliquer pourquoi si* $z > -6$ *alors* $z^2 + z + 7 > 0$*.*

Arithmétique

Exercice 360. *Considérons l'entier* $a = 156$*.*

1. *Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre* a*.*

2. *Donner l'ensemble des diviseurs de l'entier a inférieur à 50.*

3. *Écrire sous forme de fraction irréductible* $\dfrac{156}{39}$

Exercice 361. 1. *Quel que soit l'entier relatif* x*, montrer que la différence de deux multiples de* x *est un multiple de* x*.*

2. *Prenons deux entiers relatifs a et b pairs.*

   (a) *Montrer que* a^2 *et* b^2 *sont deux nombres pairs.*

   (b) *Montrer que la somme* $a^2 + b^2$ *est paire.*

Exercice 362. *729 élèves sont inscrits à la cantine du lycée. Pour simplifier l'aménagement à l'intérieur du réfectoire, il convient de constituer des tables ayant le même nombre d'élèves. Combien d'élèves doit-il y avoir par table ? Justifier sa démarche.*

Exercice 363. *On considère un triangle rectangle dont les longueurs sont trois entiers consécutifs.*

1. *Si la longueur de l'hypoténuse est l'entier* $(n + 1)$*, quels sont les deux autres longueurs.*

2. *Déterminer la longueur des trois cotés du triangle.*

15.22.4 Devoir surveillé n°4, durée 2h, Mars 2024

Exercice 364 (Questions de cours)**.**

1. *Donner la formule permettant de calculer la moyenne de quatre valeurs* x_1,x_2, x_3, x_4 *pondérées par les coefficients respectifs* c_1, c_2, c_3, c_4.
2. *Que permettent de comparer les écarts-types de deux séries statistiques de même nature ?*
3. *Pour une série ordonnée d'effectifs* n *impair, quel est le rang de la valeur médiane ?*
4. *Quelle égalité relie la probabilité d'un évènement et de son contraire ?*
5. *Quelle égalité relie les probabilités des évènements* $A, B, A \cup B, A \cap B$ *?*
6. *Qu'est-ce qu'une loi équirépartie sur* Ω *? Quelle est la probabilité d'une issue dans ce cas ?*

Exercice 365. *On lance un dé à douze faces numérotées de 1 à 12.*

1. *Déterminer la probabilité que le nombre obtenu soit 12.*
2. *Déterminer la probabilité que le numéro obtenu soit un nombre premier.*
3. *Déterminer la probabilité que le numéro obtenu soit un multiple de 3 plus petit que 10.*

Exercice 366. *Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les évènements suivants :*

- O_1 *: « La première ligne est occupée. »*
- O_2 *: « La seconde ligne est occupée. »*

Une étude statistique montre que :

- $P(O_1) = 0,4$
- $P(O_2) = 0,3$
- $P(O_1 \cap O_2) = 0.2$

Calculer la probabilité des évènements suivants.

1. *« La ligne 1 est libre. »*
2. *« Au moins une des lignes est occupée. »*
3. *« Au moins une des lignes est libre. »*

Exercice 367. *Jeanne est directrice d'une agence bancaire. Elle souhaite diminuer de* 20% *le nombre de photocopies réalisées dans son agence durant l'année.*

1. *Elle prévoit de diminuer le nombre de photocopies de* 10% *le premier semestre et de* 10% *le second semestre. Est-ce que cela lui permettra d'atteindre son objectif ?*

2. *Au premier trismestre, le nombre de photocopies a diminué de* 7%, *avant d'augmenter de* 2% *au deuxième trimestre et de diminuer à nouveau de* 6% *au troisième trimestre. On arrondira les résultats à* $0,01\%$ *près.*

   (a) *Déterminer le taux d'évolution global pour les trois premiers trimestres.*

   (b) *En déduire l'évolution que doit subir le nombre de photocopies lors du dernier trimestre pour que Jeanne puisse atteindre son objectif.*

Exercice 368. *Les autorités d'une île isolée ont décidé d'installer une éolienne. L'éolienne choisie fonctionne lorsque le vent atteint au moins de 8 noeuds et il faut l'arrêter lorsque le vent atteint ou dépasse 48 noeuds.*

1. *Les autorités décident de mesurer pendant un mois la vitesse du vent, en noeuds, au sommet d'une montagne. Une mesure est effectué chaque jour. Voici les résultats :*

Vitesse	*7*	*14*	*16*	*18*	*20*	*22*	*24*	*26*	*27*	*30*	*44*	*50*
Effectif	*1*	*2*	*1*	*1*	*4*	*5*	*3*	*4*	*4*	*2*	*1*	*2*

   (a) *Quelle est la proportion des jours de ce mois l'éolienne aurait-elle pu fonctionner ?*

   (b) *Déterminer la médiane et l'écart interquartile de cette série statistique.*

2. *Un emplacement sur une falaise a été également retenu. Le même mois, on y a mesuré les vitesses du vent et on a obtenu :*
   $Q'1 = 14$, *médiane' =22 et* $Q'_3 = 34$.
   Peut-on affirmer que la vitesse du vent est comprise entre 22 et 34 inclus au moins 50% *du temps ? Justifier.*

3. *Sachant qu'une éolienne a un rendement optimal aux alentours de 23 noeuds, quel site parait le plus intéressant pour l'installation de l'éolienne ?*

Exercice 369. *Un club pour adolescent organise des activités pour les vacances. Il propose une activité kayak, une activité escalade et une activité* *vélo. 160 adolescents participent au club. Parmi eux* $57,5\%$ *sont des filles.* 45% *des adolescents se sont inscrits à l'activité vélo. Il y a autant d'inscrits à l'activité escalade qu'à l'activité kayak. Un quart des garçons a choisi l'escalade et* 75% *des filles n'ont pas choisi le kayak.*

1. *Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant.*

	Kayak	Escalade	Vélo	Total
Filles				
Garçons				
Total				160

2. *On choisit au hasard un adolescent du club. On considère les évènements suivants :*

   - F *: « L'adolescent choisi est une fille. »*
   - K *: « L'adolescent s'est inscrit à l'activité kayak. »*
   - E *: « L'adolescent s'est inscrit à l'activité escalade »*

   (a) *Déterminer* $P(E), P(F)$ *et* $P(K)$*.*

   (b) *Décrire par une phrase les évènements :* $\overline{F} \cap K$, $F \cap \overline{K}$, $\overline{F} \cup E$, $\overline{K} \cap \overline{E}$ *et* $F \cup K$

   (c) *Calculer les probabilités des évènements précédents.*

3. *On choisit un adolescent au hasard parmi ceux inscrits à l'activité vélo. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?*

15.22.5 Préparations des devoirs surveillés

Exercice 370. *Un dé cubique mal équilibré tombe deux fois plus souvent sur* 6 *que sur les autres faces qui, elles, tombent, à la même fréquence. Quelle est la loi de probabilité des résultats de ce dé à six faces ?*

Exercice 371. *Considérons la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = 5x + 2$ *et* $\mathcal{C}_g$ *sa courbe représentative dans un repère.*

1. *Le point* R *a pour abscisse* 2 *et appartient à* $\mathcal{C}_g$. *Quelle est son ordonnée ?*

2. *Calculer l'abscisse du point* T *appartenant à* $\mathcal{C}_g$ *tel que l'ordonnée de* T *soit nulle.*

Exercice 372 (2 points)**.**
Soit h *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(x) = 3x^4 - 5$.

1. *Conjecturer une possible symétrie pour la courbe représentative de la fonction* h.

2. *Justifier votre conjecture.*

Exercice 373. *Soit* h *la fonction définie sur* $[0; 5]$ *par* $h(x) = 4 - (x - 3)^2$.

1. *Construire un tableau de valeurs de la fonction* h *avec un pas de* $0,5$.

2. *Tracer dans un repère la courbe de la fonction* h *avec* 1*cm pour chacun des deux axes.*

Exercice 374. *Enzo décide d'acheter une coque pour son téléphone portable ainsi que des écouteurs.*
Si la coque est en soldes à -20% *et les écouteurs en soldes à* -30% *alors, il payera un total de 80e.*
Si la coque est en soldes à -30% *et les écouteurs en soldes à* -20% *alors, il payera un total de 85e.*
Déterminer le prix de la coque non soldée et des écouteurs non soldés.

Exercice 375. *On tire au hasard une carte dans un jeu de tarot. On considère que toutes les cartes sont différentes et indiscernables au toucher et visuellement. L'univers est l'ensemble des 52 issus d'un jeu de cartes classique (10 cartes numérotées et 3 figures par type Cœur, Carreau, Trèfle et Pique).*

1. *Pourquoi est-on en situation d'équiprobabilité ?*

2. *Donner un évènement élémentaire.*

3. *Quelle est la probabilité d'obtenir :*

   (a) *Le Roi de cœur ?*
   (b) *Une figure ?*

15.22.6 Devoir surveillé n°5, durée 1h, Mars 2024

Exercice 376 (Question de cours (2 points)).

1. *Quelle égalité relie la probabilité d'un évènement et de son contraire ?*
2. *Comment obtient-on le coefficient multiplicateur global associé à deux évolutions successives ?*

Exercice 377 (4 points).
Samuel a constaté que le prix de la maison qu'il convoitait était passé de 150 milliers d'euros en 2016 à 157,6 milliers deux ans plus tard. Samantha lui fait remarquer : « Mais c'est bien plus que l'inflation annuelle de 2% annoncée ! »

1. *Déterminer le coefficient multiplicateur global associé à l'évolution du prix de la maison.*
2. *On cherche à déterminer l'évolution annuelle moyenne en pourcentage*
   (a) *Expliquer pourquoi le coefficient multiplicateur annuel moyen c doit vérifier l'équation* $c^2 = 1,0507$.
   (b) *En déduire le taux d'évolution annuel moyen.*
   (c) *Que penser de l'affirmation de Samantha ?*

Exercice 378 (5 points).
On tire au hasard une carte dans un jeu de tarot. On considère que toutes les cartes sont différentes et indiscernables au toucher et visuellement. L'univers est l'ensemble des 78 cartes :

- *52 issus d'un jeu de cartes classique (10 cartes numérotées et 3 figures par type Cœur, Carreau, Trèfle et Pique).*
- *4 cavaliers*
- *21 atouts*
- *1 excuse.*

1. *Pourquoi est-on en situation d'équiprobabilité ?*
2. *Donner un évènement élémentaire.*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir :*
   (a) *Le cavalier de cœur ?*
   (b) *Un atout ?*
   (c) *Une figure ?*

4. Les évènements "obtenir un atout" et "obtenir une figure" sont-ils disjoints ?

Exercice 379 (5 points)**.**
Les trois questions sont indépendantes.

1. *Une urne contient des boules jaunes, des rouges et des vertes. Un tiers des boules sont vertes et il y a deux plus de boules rouges que de jaunes. On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur. Quelle est la loi de probabilité de cette expérience aléatoire ?*

2. *Un dé cubique mal équilibré tombe deux fois plus souvent sur* 6 *que sur les autres faces qui, elles, tombent, à la même fréquence.*
   Quelle est la loi de probabilité des résultats de ce dé à six faces ?

3. *On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 puis un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4.*
   On considère le nombre de deux chiffres ainsi formé (le chiffre des dizaines est donné par le dé cubique).
   (a) *Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?*
   (b) *Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier ?*
   (c) *Est-ce que cette probabilité est la même si on inverse les lancers de dé (c'est-à-dire si le chiffre des dizaines est donné par le dé tétraédrique) ?*

Exercice 380 (4 points)**.**
Un QCM est composé de deux questions. Pour chacune, trois réponses sont proposées dont une, seulement, est correcte Une réponse correcte rapporte 2 points, une fausse enlève un point. Un élève décide de répondre au hasard. On note X le nombre de points obtenu par l'élève.

1. *Construire un arbre pour modéliser la situation.*

2. *Quelles sont les valeurs possibles de X ?*

3. *Proposer une loi de probabilité pour X.*

4. *Si l'élève décide de toujours répondre au hasard à ce genre de QCm dans toute sa scolarité, combien de points peut-il espérer avoir en moyenne au QCM ?*

15.22.7 Devoir surveillé n°6, durée 1h, Mars 2024

Exercice 381 (Question de cours 4 points).

1. *Citer les quatre fonctions de références vues en classes, donner leur ensemble de définition puis faire un croquis de leur courbe représentative.*

2. *Donner le tableau de variation et de signe de chaque fonction de la question précédente.*

Exercice 382 (2 points).
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + p$ où p est un nombre réel. On sait que le point $A(5; 22)$ appartient à la courbe de f , déterminer le réel p.

Exercice 383 (5 points).
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.

1. *De quel nombre ne peut-on pas calculer l'image par f ?*

2. *En déduire, l'ensemble de définition de f.*

3. *Construire un tableau de valeurs avec un pas de 1 pour l'intervalle $[-5; 5]$.*

4. *Construire un tableau de valeurs avec un pas de $0,2$ pour l'intervalle $[0,5; 1,5]$.*

5. *Tracer la courbe de la fonction f avec les points obtenus.*

Exercice 384 (4 points).
Considérons la fonction $f(x) = x^3$.

1. *Montrer que pour tout nombre réel $f(-x) = -f(x)$.*

2. *Qu'en déduit-on pour la fonction cube ?*

3. *La courbe représentative de f dans un repère possède telle une symétrie ? Justifiez.*

Exercice 385 (Vrai/Faux 5 points).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x-a)^2 + 4$, où a est un nombre réel quelconque. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire, en justifiant, si elle est vraie.

1. *Si $f(x) = 4$ alors $x = a$.*

2. *Pour toute valeur de a, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.*

3. *Pour toute valeur de a, le point de coordonnées $(3a; 4(1+a^2))$ appartient à la courbe de f.*

4. *Il existe une valeur de a pour laquelle la fonction f est paire.*

Bibliographie

[1] Éric Barbazo. *Mathématiques seconde*. Hachette Éducation, 2014.

[2] Barnet. *Maths 1ere enseignement scientifique*. Hachette éducation, 2023.

[3] Darthos. *Maths 1re, enseignement spécifique et mathématique*. Hatier, 2023.

[4] Lixi. *Transmath*. Nathan, 2019.

[5] Malaval. *Hyperbole Seconde*. Natahn, 2017.

[6] *Maths 2nde*. Magnard, 2023.

[7] Éducation nationale. « Programme de mathématiques de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin Officiel* (2023).

[8] Éducation nationale. « Programme de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique en classe de première générale ». In : *Bulletin Officiel* (2023).