

Calcul intégrale
Exo ODE – 16 avril 2025

Exercice 1.

1. Calculer $\int_1^e x \ln(x) dx$. (Indication : intégration par parties)
2. Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Montrer que $\frac{d}{dx} \ln(g(x) + x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
En déduire $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Exercice 2 (Développements limités et limites).

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \frac{x}{\tan(x)}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan(x)}{x^3}$.
3. Soit $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$. Donner son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 3 (Équation différentielle). On considère l'équation différentielle $y'' + y = \sin(x)$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation homogène associée.
2. Proposer une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$, et déterminer A et B .
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 4 (Équation différentielle et D.L.). On considère l'équation différentielle suivante (on ne peut pas la résoudre facilement) :

$$y' = e^{y^2}$$

1. Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution définie sur \mathbb{R} et vérifiant $y(0) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Trouver le D.L. à l'ordre trois (ou quatre) en 0 de la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 5 (Équation différentielle et D.L.). Mêmes questions que l'exercice précédent pour l'équation différentielle

$$y'' = \cos(y^2)$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.