

Calcul numérique et algébrique

Fiche 2 : Nombres complexes ;

Exercice 1 1. Mettre sous la forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) les nombres complexes suivants :

$$1 - i - (-i)^2 - i^3 ; \frac{1}{2i} ; \frac{1}{3 + 2i} ; \frac{i}{3 - 2i} ; \frac{2 + 3i}{3 - 4i}.$$

2. Donner la partie réelle et imaginaire des nombres complexes :

$$\frac{(3 + 2i)(2 - 3i)}{2 - 4i} ; (1 + i)^2 ; (1 + i)^3 ; (1 - i)^3.$$

Exercice 2 Donner le module et un argument des nombres complexes suivants et les écrire sous forme exponentielle :

$$i ; -2i ; 1 + i ; 1 - i ; 7 + 7i ; -7 - 7i ; (1 + i)^{2020} ; \frac{1}{1 + i}.$$

Exercice 3 1. Représenter dans le plan complexe les points M_i d'affixes z_i suivants :

$$z_1 = -2, z_2 = i, z_3 = -2 + i, z_4 = \overline{z_3}.$$

2. Représenter dans le plan complexe l'ensemble $\mathcal{A}$ des points complexes d'affixe z satisfaisant $|z| = 1$.

3. Représenter les ensembles :

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\} ; \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, z^2 = 1\} ; \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z|^2 - 4 = 0\}.$$

Exercice 4 On note $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2 .

2. Déterminer la forme algébrique de $z = \frac{z_1}{z_2}$.

3. Déterminer la forme exponentielle de z .

4. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 5 1. Déterminer les racines carrées complexes des nombres :

$$4, -5, i, -5i, 1-i, -3+4i.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0; (1-i)z^2-3z+2+i=0; z^2-(2+3i)z-5+i=0; iz^2+3iz-5-3i=0.$$

Exercice 6 1. Montrer l'égalité : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}})$

2. En déduire le module et l'argument de $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3. Idem pour $e^{i\frac{3\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 7 1. À l'aide de la formule de Moivre montrer que :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \text{ et } \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

2. À l'aide de la formule d'Euler montrer que :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

3. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

4. Linéarisation : Exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(kx)$ pour $k \in \mathbb{N}$; exprimer $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(kx)$ pour $k \in \mathbb{N}$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^3 = -2 + 2i, z^4 = 4e^{\frac{-2i\pi}{3}}, z^5 = -i.$$