PRÉSENTATION DES TRAVAUX DE RECHERCHE

ALEXANDER D. RAHM

1. Axe de recherche *Torsion dans l'homologie de groupes arithmétiques*

Pour mes projets liés à la torsion dans l'homologie de groupes arithmétiques, j'ai plusieurs collaborateurs,

- Ethan Berkove (Lafayette College, Pennsylvania),
- Tuan Anh Bui (Vietnam National University / Université de Strasbourg),
- Grant Lakeland (Eastern Illinois University),
- Matthias Wendt (Universität Wuppertal),

qui m'ont rejoint à cause de la nouvelle technique de la *réduction des sous-complexes de torsion* que j'ai dévéloppée. Il s'agit d'une technique pour l'étude de groupes discrets, que j'ai d'abord mise en oeuvre dans [5] pour une classe spécifique de groupes arithmétiques: les groupes de Bianchi, pour lesquels la méthode a fourni toute l'homologie au dessus de la dimension cohomologique virtuelle. Des éléments de cette technique avaient déjà été utilisés avant par Soulé pour un groupe modulaire [16] ; et des versions ad hoc de la méthode avaient été mis en oeuvre par Mislin et puis par Henn. J'ai réussi à mettre la technique dans un cadre assez général [7]. Il convient de donner quelques exemples où la méthode généralisée a déjà donné de bons résultats:

- Les groupes de Bianchi,
- Les groupes de Coxeter,
- Les groupes SL_2 sur des anneaux de nombres arbitraires.

Les groupes de Bianchi. Dans le cas des groupes de Bianchi (groupes PSL_2 sur les anneaux quadratiques imaginaires), la technique de réduction des sous-complexes de torsion m'a permis de trouver une description de l'anneau de cohomologie de ces groupes en termes de quantités élémentaires de la théorie des nombres [7]. L'étape décisive a été d'extraire, à l'aide de la réduction des sous-complexes de torsion, les informations essentielles des modèles géométriques, et puis de les détacher complètement du modèle. J'ai donc pu démontrer que toutes ces informations sont contenues dans les *graphes des classes de conjugaison*, que je construis à cette fin pour un groupe arbitraire en partant de son système de sous-groupes finis modulo l'opération de conjugaison.

Les groupes de Coxeter. Rappelons que les groupes de Coxeter sont engendrés par des réflections; et leur homologie consiste uniquement en de la torsion. La technique de réduction des sous-complexes de torsion me permet ainsi d'emblée d'obtenir toute la torsion homologique de tous les groupes de Coxeter tétraédraux pour tous les nombres premiers impairs, dans une formule générale et aussi en termes de tableaux explicites [7].

Les groupes $\mathbf{PSL}_2$ sur des anneaux de nombres arbitraires. En collaboration avec Matthias Wendt, j'ai établi des formules pour la cohomologie de Farrell-Tate à coefficients de torsion impaire de tous les groupes $\mathrm{PSL}_2(A)$, où A est un anneau de S-entiers dans un corps de nombres arbitraire [14]. Matthias Wendt a aussi étendu ceci aux cas où A est un anneau de fonctions sur une courbe affine lisse sur un corps algébriquement clos. Ces deux résultats ensemble ont permis à Matthias Wendt de trouver une version raffinée de la conjecture de Quillen, qui tient compte de tous les types de contre-exemples connus [15]. Donc s'il n'existe pas de contre-exemple de type complètement nouveau à la conjecture de Quillen, la conjecture de Quillen–Wendt doit être vraie.

Adaptation de la technique pour SL_2. Avec Ethan Berkove, j'ai étendu ma technique de réduction de sous-complexes de torsion, qui était originalement conçue pour les groupes à centre trivial (PSL_2), pour pouvoir traiter aussi des groupes à centre non-trivial (SL_2). Ainsi, nous avons déterminé la 2-torsion de la cohomologie des groupes SL_2 sur les anneaux quadratiques imaginaires [3].

Sous-groupes de congruence. En collaboration avec Ethan Berkove et Grant Lakeland (Eastern Illinois University), j'ai fourni de nouveaux outils pour le calcul de la torsion dans la cohomologie de sous-groupes de congruence dans les groupes de Bianchi : Un algorithme pour trouver des domaines fondamentaux particulièrement utiles, et une analyse de la suite spectrale équivariante combinée avec la réduction des sous-complexes de torsion [2].

Extension de la technique pour des groupes arithmétiques de rang supérieur. Pour des calculs de machine de la (co)homologie Farrell–Tate ou Bredon, on a besoin de complexes cellulaires dans lesquels les stabilisateurs fixent leurs cellules point par point. Tuan Anh Bui, Matthias Wendt et moi ont fourni deux algorithmes qui calculent une subdivision d'un complexe cellulaire qui admet cette propriété de rigidité [12]. En nous servant de ces algorithmes pour un complexe cellulaire pour $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{Z})$, nous avons calculé la cohomologie de Farrell–Tate pour les nombres premiers impairs, autant que l' homologie de Bredon pour l'espace classifiant des opérations propres, avec les coefficients dans l'anneau de représentations complexes. Dans un travail en cours, nous avons établi des formules pour la cohomologie Farrell–Tate de GL_3 sur les anneaux quadratiques imaginaires, aux nombres premiers impairs.

Vérification de la conjecture de Quillen – le cas quadratique imaginaire de rang 2. Avec Tuan Anh Bui, j'ai confirmé la conjecture de Quillen en cohomologie modulo 2 pour le cas des groupes arithmétiques $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-m})}[\frac{1}{2}])$, où $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-m})}$ est un anneau d'entiers quadratiques imaginaires. Afin d'exposer explicitement la structure, conjecturée par Quillen, de module libre sur l'anneau de cohomologie, nous avons calculé la cohomologie modulo 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}\,][\frac{1}{2}])$ à travers de la décomposition amalgamée de ce groupe [4].

Application à la conjecture de Baum/Connes. Dans la publication [8], j'ai, pour les groupes de Bianchi, transplanté la réduction des sous-complexes de torsion à la cohomologie de Bredon, avec les coefficients dans l'anneau de représentations complexes, relative à la famille des sous-groupes finis. Ceci m'a permis d'établir des formules pour cette homologie de Bredon, et, par la suite spectrale de Atiyah–Hirzebruch, pour la K-homologie équivariante des groupes de Bianchi, agissant sur leur espace classifiant pour actions propres. Comme le morphisme d'assemblage de Baum–Connes est un isomorphisme pour les groupes de Bianchi, j'obtiens le type d'isomorphisme de la K-théorie de leurs C^*-algèbres réduites, qui serait très dur à calculer directement.

Avec Ruben Sanchez-Garcia (University of Southampton), Jean-François Lafont (Ohio State University) et Ivonne Ortiz (Miami University Ohio), j'ai poursuivi ces investigations au delà des groupes arithmétiques, et établi des formules pour la K-homologie équivariante de tous les groupes compactes de réflections hyperboliques à trois dimensions [13]. Dans cet article, j'ai aussi démontré un nouveau critère pour l'absence de torsion dans la K-homologie équivariante, dans un cadre plus général.

2. Construction d'élements dans la K-théorie algébrique

Avec Rob de Jeu (VU University Amsterdam), je cherche pour des générateurs explicites de la K-théorie algébrique d'anneaux quadratiques imaginaires. À cette fin, j'ai construit des éléments non-triviaux dans les groupes d'homologie $\mathrm{H}_3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-m})))$, en termes d'images géométriques venant des groupes de Bianchi, qui peuvent être relevés dans la K-théorie algébrique. L'institut de recherches mathématiques Oberwolfach nous a approuvé un projet *Research in Pairs*, nous permettant de travailler sur une extension de notre méthode vers la K-théorie algébrique d'anneaux d'entiers de corps de nombres arbitraires, avec deux collaborateurs supplémentaires, Herbert Gangl (Durham University) et Dan Yasaki (University of North Carolina at Greensboro).

3. Formes modulaires de Bianchi

Pour mes investigations sur les formes modulaires de Bianchi, j'ai obtenu une bourse de 900,000 heures de procésseurs de l'ICHEC (Irish Centre for High-End Computing). Les formes modulaires de Bianchi sont associées aux pavages de l'espace hyperbolique à 3 dimensions par les groupes de Bianchi, déterminés par des diagrammes comme celui montré dans la figure 1. Celles des formes modulaires de Bianchi qui sont cuspidales et bien saisies, obtenues en se servant de la procédure de changement de base de Langlands ou de la multiplication complexe, sont ce que nous appelons les formes "non-véritables". Les formes cuspidales qui restent sont donc appelés "véritables". Dans mon article avec Mehmet Haluk Şengün (University of Sheffield) [9], une extrême rareté des formes véritables a été constatée, mais ces calculs furent limités au niveau 1. Dans mon article avec Panagiotis Tsaknias (Université du Luxembourg) [11], les formules pour les formes non-véritables sont étendues aux niveaux supérieurs, et les premières, rares instances de formes modulaires de Bianchi véritables de niveau supérieur et poids supérieur sont observées.

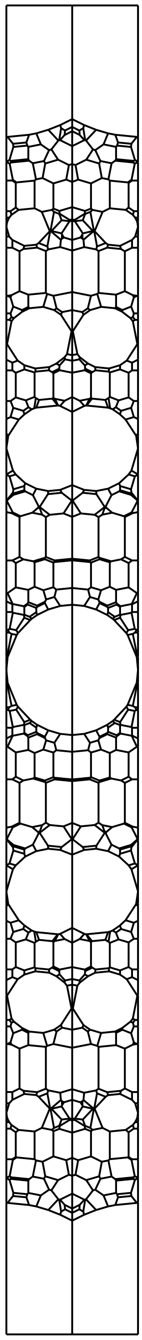

Figure 1. Domaine fondamental pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-102}])$, calculé par [6].

4. Cohomologie de Chen–Ruan

Avec Fabio Perroni (Università di Trieste), j'ai démontré la conjecture de Ruan sur la cohomologie de résolutions crépantes d'orbi-espaces, qui postule que cette cohomologie coïncide avec la cohomologie Chen–Ruan de l'orbi-espace concerné. J'ai aussi établi des formules de dimension pour cette dernière [10].

5. Congruences de formes modulaires modulo puissances de premiers

Avec Emiliano Torti et Gabor Wiese (Université du Luxembourg), je cherche des congruences de formes modulaires modulo puissances de premiers. Nous avons isolé trois cas particulièrement intéressants, auxquels la condition d'augmentation de niveau est remplie à valuation 2, respectivement 4. Je suis en train de vérifier si parmis eux, il y a un qui constituerait un contre-exemple à une extension du théorème de Ribet et Diamond supplémentaire à celle mise en oeuvre par Torti [17].

6. Analyse de simulations de liquides complexes

En collaboration avec le groupe de recherche de Tanja Schilling (Universität Freiburg), j'analyse des simulations de liquides complexes, comme décrit dans notre première publication de ce projet [1]. J'ai développé un logiciel pour la construction du complexe de Vietoris–Rips et le calcul de son homologie, afin d'observer comment cette dernière varie au cours des processus simulés.

References

[1] Arshia Atashpendar, Sarthak Arora, Alexander D. Rahm, and Tanja Schilling, *Simulation study of the electrical tunneling network conductivity of suspensions of hard spherocylinders*, Physical Review E, 98, 062611.

[2] Ethan Berkove, Grant Lakeland, and Alexander D. Rahm, *The mod 2 cohomology rings of congruence subgroups in the Bianchi groups*, Journal of Algebraic Combinatorics, posted on December 2, 2019, DOI 10.1007/s10801-019-00912-8. With an appendix by Tuan Anh Bui and Sebastian Schönnenbeck.

[3] Ethan Berkove and Alexander D. Rahm, *The mod 2 cohomology rings of* SL_2 *of the imaginary quadratic integers*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), no. 3, 944–975, DOI 10.1016/j.jpaa.2015.08.002. With an appendix by Aurel Page. MR3414403

[4] Anh Tuan Bui and Alexander D. Rahm, *Verification of the Quillen conjecture in the rank 2 imaginary quadratic case*, accepted for publication in Homology, Homotopy and Applications (2019).

[5] Alexander D. Rahm, *The homological torsion of* PSL_2 *of the imaginary quadratic integers*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no. 3, 1603–1635, DOI 10.1090/S0002-9947-2012-05690-X. MR3003276

[6] ———, *Bianchi.gp*, Open source program (GNU general public license), validated by the CNRS: `http://www.projet-plume.org/fiche/bianchigp` subject to the Certificat de Compétences en Calcul Intensif (C3I) and part of the GP scripts library of Pari/GP Development Center, 2010.

[7] ———, *Accessing the cohomology of discrete groups above their virtual cohomological dimension*, J. Algebra **404** (2014), 152–175. MR3177890

[8] ———, *On the equivariant* K*-homology of* PSL_2 *of the imaginary quadratic integers*, Annales de l'Institut Fourier **66** (2016), no. 4, 1667–1689.

[9] Alexander D. Rahm and Mehmet Haluk Şengün, *On level one cuspidal Bianchi modular forms*, LMS J. Comput. Math. **16** (2013), 187–199, DOI 10.1112/S1461157013000053. MR3091734

[10] Fabio Perroni and Alexander D. Rahm, *On Ruan's cohomological crepant resolution conjecture for the complexified Bianchi orbifolds*, Algebr. Geom. Topol. **19** (2019), no. 6, 2715–2762, DOI 10.2140/agt.2019.19.2715. MR4023327

[11] Alexander D. Rahm and Panagiotis Tsaknias, *Genuine Bianchi modular forms of higher level at varying weight and discriminant*, J. Théor. Nombres Bordeaux **31** (2019), no. 1, 27–48 (English, with English and French summaries). MR3994718

[12] Anh Tuan Bui, Alexander D. Rahm, and Matthias Wendt, *The Farrell-Tate and Bredon homology for* $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{Z})$ *via cell subdivisions*, J. Pure Appl. Algebra **223** (2019), no. 7, 2872–2888, DOI 10.1016/j.jpaa.2018.10.002. MR3912952

[13] Jean-François Lafont, Ivonne J. Ortiz, Alexander D. Rahm, and Rubén J. Sánchez-García, *Equivariant* K*-homology for hyperbolic reflection groups*, Q. J. Math. **69** (2018), no. 4, 1475–1505, DOI 10.1093/qmath/hay030. MR3908707

[14] Alexander D. Rahm and Matthias Wendt, *On Farrell-Tate cohomology of* SL_2 *over* S*-integers*, J. Algebra **512** (2018), 427–464, DOI 10.1016/j.jalgebra.2018.06.031. MR3841530

[15] Alexander D. Rahm and Matthias Wendt, *A refinement of a conjecture of Quillen*, Comptes Rendus Mathématique de l'Académie des Sciences **353** (2015), no. 9, 779–784, DOI http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.03.022.

[16] Christophe Soulé, *The cohomology of* $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$, Topology **17** (1978), no. 1, 1–22.

[17] Emiliano Torti, *On the level raising of cuspidal eigenforms modulo prime powers*, arXiv e-prints (November 2018), arXiv:1811.05702.

Dr. Alexander D. Rahm, Professeur à l'Université de la Polynésie Française, Laboratoire GAATI. Adjunct Lecturer at National University of Ireland. `http://gaati.org/rahm/`